MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK V ČÍSLO 3

POZNÁMKA O ABSOLÚTNE KONVERGENTNÝCH RADOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

Nech $\{a_i\}$ je postupnosť kladných čísel, nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentný. Označme $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$. Označme ďalej znakom $W_1(W_2)$ množinu všetkých čísel w, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare $w = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$, kde

$$b_i = a_i \text{ alebo } b_i = 0 \ (b_i = a_i \text{ alebo } b_i = -a_i) \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots$$

P. Kesava Menon v práci [1] dokázal tvrdenie:

(M) Ak pre $i = 1, 2, \ldots$ platí $a_n \geqq R_n$, potom množina W_1 je perfektná.

T. Šalát v práci [2] dokázal tvrdenie:

(Š) Množina W_2 je perfektná.

Pri dôkaze tvrdenia (M) sa v práci [1] postupuje tak, že sa dokáže, že komplement množiny W_1 je súčtom dizjunktných otvorených intervalov bez spoločných koncových bodov. V práci [2] je dôkaz tvrdenia (Š) vykonaný okľukou zavedením vhodnej metriky na množine všetkých postupností $\{c_i\}$, kde $c_i = 1$ alebo $c_i = -1$ a použitím niektorých viet o spojitom zobrazení metrických priestorov. V nasledujúcej poznámke uvedieme jednoduchý a priamy dôkaz vety, ktorá zahrňuje ako špeciálne prípady tvrdenia (M) aj (Š). Je to táto veta:

Veta. *Nech $\{C_i\}$ $(i = 1,2, \ldots)$ je systém množín komplexných čísel, pre ktoré platí:*

(A) 1. *Množina $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ je ohraničená,* 2. *každá množina C_i je kompaktná,* 3. *medzi množinami C_i je nekonečne mnoho takých, ktoré obsahujú viac ako jedno číslo.*

Nech $\{a_i\}$ je postupnosť prvkov úplného normovaného vektorového priestoru X, nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|$ je konvergentný. Nech W je množina všetkých prvkov $w \in X$, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare $w = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$, kde $b_i = c_i a_i$, $c_i \in C_i$, $i = 1,2, \ldots$

Potom množina W je perfektná.

Dôkaz. 1. Nech sú splnené predpoklady vety. Používajme označenia, zavedené v znení vety. Ľahko sa zistí, že každý rad tvaru $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i$ (1) je konvergentný. Totiž označme znakom s_n n-tý čiastočný súčet radu (1). Nech $R = \sup_{z \in C} |z|$, nech n, m sú prirodzené čísla. Z nerovnosti

$$\| s_{n+m} - s_n \| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} \| c_i a_i \| \leq R \sum_{i=n+1}^{n+m} \| a_i \|$$

vyplýva, že postupnosť $\{s_n\}$ je cauchyovská, teda konvergentná v X.

2. Nech $w^n \in W$, $n = 1, 2, \ldots$, $w^n \to w'$. Dokážeme, že platí: $w' \in W$. Nech

$$w^n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^n a_i. \tag{2}$$

Zaveďme tieto označenia: Ak $\{n\}$ je postupnosť všetkých prirodzených čísel (s obvyklým usporiadaním), znakom $\{n(1)\}$ označíme postupnosť, vybranú (predpísaným spôsobom) z postupnosti $\{n\}$; analogicky označíme symbolom $\{n(2)\}$ postupnosť, vybratú určitým spôsobom z postupnosti $\{n(1)\}$ atď. Zostrojme predovšetkým postupnosť $\{c_i\}$ takto: z postupnosti $\{c_1^n\}$ vyberieme konvergentnú čiastočnú postupnosť $\{c_1^{n(1)}\}$ a jej limitu označíme c_1; z postupnosti $\{c_2^{n(1)}\}$ vyberieme konvergentnú čiastočnú postupnosť $\{c_2^{n(2)}\}$ a jej limitu označíme c_2, atď. Označme:

$$w^\circ = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i. \tag{3}$$

3. Označme znakom s_k^n, resp. s_k° k-ty čiastočný súčet radu (2), resp. (3). Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Vyberme index k tak, aby platilo:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \| a_i \| < \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Potom je zrejme pre $n = 1, 2, \ldots$

$$\| w^n - s_k^n \| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \| s_k^\circ - w^\circ \| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Vymerme index n_1 tak, aby pre $n > n_1$ platila nerovnosť $\| w' - w^n \| < \frac{\varepsilon}{4}$ (5).

Podľa odseku 2 pri zvolenom k je:

$$s_k^{n(k)} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{n(k)} a_i \to \sum_{i=1}^{k} c_i a_i = s_k^\circ, \quad ak\ n(k) \to \infty.$$

Z postupnosti $\{n(k)\}$ môžeme teda vybrať také číslo $m > n_1$, že platí $\| s_k^m - s_k^\circ \| < \frac{\varepsilon}{4}$ (6). Z nerovnosti $\| w' - w^\circ \| \leq \| w' - w^m \| + \| w^m - s_k^m \| + \| s_k^m - s_k^\circ \| + \| s_k^\circ - w^\circ \|$ a z nerovností 4, 5, 6 vyplýva $\| w' - w^\circ \| < \varepsilon$, $w' = w^\circ$, $w' \in W$. Teda množina W je uzavretá.

4. Nakoniec dokážme, že množina W neobsahuje izolovaný bod. Nech $w \in W$, $w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i$, nech $\varepsilon > 0$. Nájdime index k taký, že pre $i > k$ je $\| a_i \| < \frac{\varepsilon}{2R}$. Vyberme ďalej index $l > k$ tak, aby množina C_l obsahovala viac ako jeden prvok. Nech $c_l' \in C_l$, $c_l' \neq c_l$.

Utvorme rad

$$c_1 a_1 + \ldots + c_{l-1} a_{l-1} + c_l' a_l + c_{l+1} a_{l+1} + \ldots = w'.$$

Potom platí $\| w - w' \| = \| c_l a_l - c_l' a_l \| \leq 2R \| a_l \| < \varepsilon$.

Poznámky. 1. Z predošlej vety vyplýva, že predpoklad $a_n \geqq R_n$ je v tvrdení (M) nie potrebný.

2. Množina W je zrejme ohraničená. Ak lineárny priestor X má konečný počet dimenzií, potom z ohraničenosti a perfektnosti množiny W vyplýva, že množina W je zároveň kompaktná. V lineárnom priestore s nekonečným počtom dimenzií môžu, ako je známe, existovať množiny, ktoré sú ohraničené a perfektné a nie sú kompaktné. Pre množinu W však vždy platí: *Množina W je kompaktná.* Nech je totiž $\{w^n\}$ ľubovoľná postupnosť prvkov z množiny W; používajme rovnaké označenia ako v dôkaze predošlej vety (bez predpokladu, že $\{w^n\}$ je konvergentná postupnosť). Na základe časti 2. a 3. dôkazu predošlej vety sa ľahko zistí, že čiastočná postupnosť $\{w'^n\}$, $w'^n = w^{\nu(n)}$ postupnosti $\{w^n\}$ konverguje k prvku w°.

3. Na príkladoch sa ľahko zistí, že žiaden z predpokladov 1., 2., 3. podmienky (A) nemôžeme vynechať, ak má byť zachovaná platnosť uvedenej vety. Pritom ohraničenosť množiny C neslúži len na to, aby sme zaručili konvergenciu všetkých radov tvaru (1). Ak volíme napr. $a_n = 2^{-n}$, $C_n = \{0, 2^n\}$, potom $W = \{0, 1, 2, \ldots\}$, t. j. W nie je perfektná množina.

4. Nech sú splnené predpoklady vety. Zrejme platí: ak každá množina C_i, $i = 1, 2, \ldots$ je konvexná, potom tiež množina W je konvexná.

5. P. K. Menon v práci [1] vyšetruje tiež mieru množiny W_1. Ak predpokladáme, že X je množina všetkých reálnych čísel a $C \subset X$, nerobilo by ťažkosti zovšeobecniť postup P. K. Menona pri vyšetrovaní miery aj na množinu W, vyhovujúcu podmienkam našej vety.

6. Naskytuje sa otázka, *či pre každú ohraničenú perfektnú množinu A úplného lineárneho normovaného priestoru X existuje taký rad (1) a systém množín komplexných čísel $\{C_i\}$, vyhovujúci podmienkam uvedenej vety, aby v zmysle tejto vety platilo $W = A$.*

Došlo 18. X. 1954.

LITERATÚRA

1. P. Kesava Menon: On a class of perfect sets, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 706-711. 2 T. Šalát: O súčtoch istých konvergentných radov, Matem. fyz. časopis SAV, 1954.

ЗАМЕТКА ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ

ЯН ЯКУБИК, Кошице

Выводы

Пусть $\{a_1\}$ — последовательность положительных чисел, пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится. Обозначим $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$, обозначим дальше знаком $W_1(W_2)$ множество всех чисел w, которые можно выразить в виде $w = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$, где $b_i = a_i$ или $b_i = 0$ ($b_i = a_1$ или $b_i = -a_i$) для $i = 1, 2, \ldots$

П. Кесава Менон в статье [1] доказал утверждение (M): Если для $i = 1, 2, \ldots$ выполняется $a_n \geq R_n$, тогда множество W_1 совершенно.

Т. Шалат в статье [2] доказал: (Ш) Множество W_2 совершенно.

В заметке доказана следующая теорема, которая содержит как частные случаи утверждения (M) и (Ш).

Пусть $\{C_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) — система множеств комплексных чисел, для которых имеет место (A) 1. множество $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ограничено 2. каждое из множеств C_i компактно 3. среди множеств находится бесконечное число таких, которые содержат более одного элемента.

Пусть $\{a_i\}$ — последовательность элементов полного нормированного пространства X, пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_1 \|$ сходиться. Пусть W — множество всех элементов $w \in X$, которые можно выразить в виде $w = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$, где $b_i = c_i a_i$, $c_i \in C_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда множество W — совершенно.