# POZNÁMKA O JEDNOZNAČNOSTI DIREKTNÍCH ROZKLADŮ PRVKŮ V MODULÁRNÍCH SVAZECH KONEČNÉ DÉLKY

VÁCLAV HAVEL, Praha

## § 1. Předběžné úvahy

1,1. Nechť $S$ je modulární svaz konečné délky, $I$ $(O)$ jeho největší (nejmenší) prvek. Prvek $I$ nechť je rozložitelný (ve smyslu definice 1,3).

1,2. Zavedeme symbol (srov. 1, str. 94)[1]

$$a = \mathop{\times}_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times \ldots \times a_n$$

(a nazveme jej rozkladem prvku $a$ ve složky $a_i$), právě když platí tyto tři podmínky:

$$O \neq a_i \in S \text{ pro každé } i = 1, \ldots, n > 1,$$

$$a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i,$$

$$(a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1}) \wedge a_i = O \text{ pro každé } i = 2, \ldots, n.$$

Lze ukázat (*3*, theorém 5), že poslední podmínku lze nahradit symetrickou podmínkou

$$a_1 \wedge (a_2 \vee \ldots \vee a_n) = a_i \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n) = \\ = a_n \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}) = O,$$

kde $i = 2, \ldots, n-1$.

1,3. Prvek $a \in S$ prohlásíme za (ne)rozložitelný, právě když (ne)existuje rozklad tvaru $a = a_1 \times a_2$ $(a_1, a_2 \in S)$.

1,4. Prvek $a \in S$ nazveme doplnitelným, právě když existuje prvek $\bar{a}$ (doplněk prvku $a$) tak, že platí $a \times \bar{a} = I$.

1,5. Oreova věta o náhradě (*1*, str. 94):

Platí-li v $S$ rovnice $a = \mathop{\times}_{i=1}^{m} a_i = \mathop{\times}_{j=1}^{n} b_j$, kde $a_i$, $b_j$ jsou nerozložitelné prvky, pak jest $m = n$ a při vhodném označení platí:

$$a = a_1 \times b_2 \ldots \times b_n = b_1 \times \ldots \times b_{i-1} \times a_i \times b_{i+1} \times \ldots \times b_n = \\ = b_1 \times \ldots \times b_{n-1} \times a_n \; (i = 2, \ldots, n-1).$$

[1] Odkazy na literaturu, uvedené na konci článku.



Budeme vyšetřovat tuto podmínku:

(1) V $S$ existuje (až na pořadí složek) právě jeden rozklad prvku $I$ v nerozložitelné složky.

## § 2. Poučky, týkající se podmínky (1)

Odvodíme několik jednoduchých podmínek pro to, aby v $S$ platilo (1).

**Poučka 2,1.** *V S platí (1), právě když je pro každý doplnitelný prvek $a \in S$ splněna jedna z (navzájem ekvivalentních) implikací*

$$a \vee b = I, \quad b \neq \bar{a} \Rightarrow a \wedge b > O, \tag{2,1}$$

$$a \wedge b = O, \quad b \neq \bar{a} \Rightarrow a \vee b < I. \tag{2,2}$$

Důkaz: Neplatí-li (2,1), pak jest $a \times b = I$ a neplatí ani (1). Obdobně je tomu tak, když neplatí (2,2).

Neplatí-li (1), pak podle 1,5 existuje nerozložitelný prvek $a \in S$, který má v $S$ dva různé doplňky $\bar{a}$, $b$. Pak ale neplatí ani implikace (2,1) ani implikace (2,2).

Poučka je tím dokázána.

**Poučka 2,2.** *V S platí (1), právě když jsou pro jakékoliv dva rozklady*

$$I = \mathop{\times}_{i=1}^{m} a_i = \mathop{\times}_{j=1}^{n} b \tag{3}$$

*splněny rovnice*

$$a_i = \bigvee_{j=1}^{n} (a_i \wedge b_j) \text{ pro } i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

(srov. **3**, theorém 2).

Důkaz: Nechť platí (1). Pak oba rozklady mají společné zjemnění $I = \mathop{\times}_{k=1}^{N} c_k$, kde $c_k$ jsou nerozložitelné prvky a $N \geq \max(m, n)$.[2]

Prvky $c_k$ generují v $S$ Booleovu algebru délky $N$ (*3*, důsledek z theorému 2). Protože prvky $a_i$, $b_j$ patří do této algebry, plynou z distributivity rovnice (4).

Nechť pro kterékoliv rozklady (3) platí (4). Buď $a$ jakýkoliv doplnitelný prvek z $S$. Buďte dále $a_1, a_2$ jeho doplňky. Za rovnice (3) vezmeme nyní rovnice $I = a_1 \times a = a_2 \times a$. Podle rovnic (4) platí v našem případě $a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2$. Tedy prvek $a$ má právě jeden doplněk. Z toho plyne podle věty 1,5 platnost podmínky (1).[3]

[2] Za prvé: Každý rozložitelný prvek dá se v $S$ rozložit v samé nerozložitelné složky. Za druhé: Z rovnic $a = a_1 \times a_2$, $a_1 = a_1' \times a_2'$ plyne $a = a_1' \times a_2' \times a_2$.

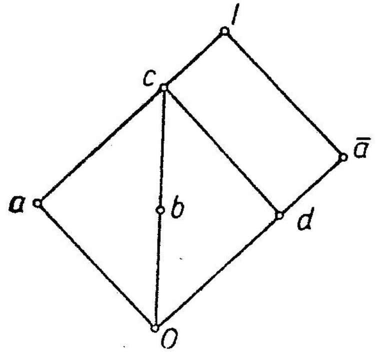
[3] Neplatí-li podmínka (1), pak existují navzájem různé nerozložitelné prvky $v_1, \ldots, v_N, w_{k+1}, \ldots, w_N$ $(k < N)$ tak, že platí $I = v_1 \times \ldots \times v_N = v_1 \times \ldots \times v_k \times w_{k+1} \times \ldots \times w_N$. Podle věty 1,5 provedeme (při vhodném označení) postupné náhrady $v_1 \times \ldots \times v_{k+1} \times w_{k+2} \times \ldots \times w_N = v_1 \times \ldots \times v_{k+2} \times w_{k+3} \times \ldots \times w_N = \ldots = v_1 \times \ldots \times v_{N-1} \times w_N$. Prvek $v_1 \vee \ldots \vee v_{N-1}$ má různé doplňky $v_N$, $w_N$, což je hledaný spor. Tedy platí podmínka (1).

**Poučka 2,3.** *V S platí (1), právě když žádný jeho podsvaz není isomorfní s některým ze svazů, jejichž diagramy jsou na obr. 1—4, kde a, b jsou nerozložitelné prvky.*

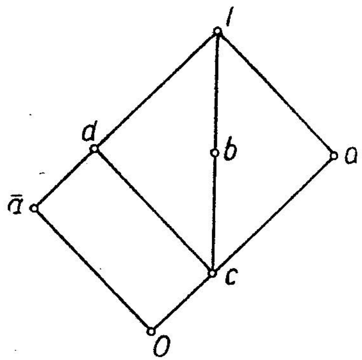
Důkaz: Existuje-li některý z podsvazů, daných zmíněnými diagramy, pak zřejmě platí:

$$a \times \bar{a} = b \times \bar{a} = I, \quad a \neq b. \tag{5}$$

Tedy podmínka (1) není splněna.



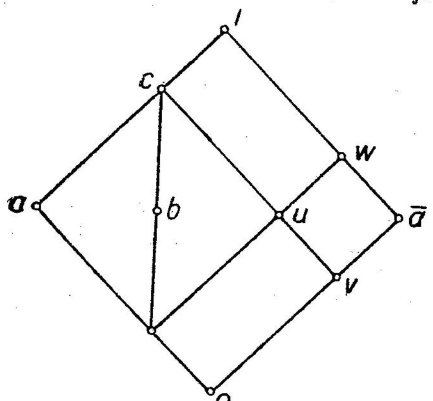

Obr. 1.



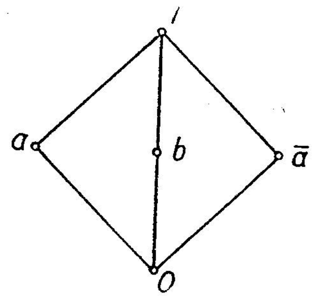

Obr. 2.

Nechť v $S$ existují dva různé rozklady prvku I. Podle věty 1,5 existují pak nerozložitelné prvky $a$, $b$ tak, že platí (5).[4] Označme $P$ podsvaz, generovaný v $S$ prvky $a$, $b$, $\bar{a}$. Ukážeme, že $P$ je dáno některým z diagramů na obr. 1—4.

Platí-li $a \times b = I$, pak z této rovnice a z rovnic (5) plyne snadno, že $P$ má diagram na obr. 4.




Obr. 3.




Obr. 4.

Nechť tedy neplatí $a \times b = I$. Pak jsou možné tyto tři případy:

1. $a \wedge b = 0$, $a \vee b < I$,
2. $a \wedge b > 0$, $a \vee b = I$,
3. $a \wedge b > 0$, $a \vee b < I$.

[4] Argumentace je obdobná jako v předešlé poznámce.



ad 1. Označme $a \vee b = c$, $\bar{a} \wedge c = d$. Podle (5) plyne $a \wedge d = b \wedge d = 0$, $\bar{a} \vee c = I$. Podle modularity a podle (5) plyne $a \vee d = b \vee d = c$. Poněvadž prvky $a$, $b$, $\bar{a}$, $c$, $d$ jsou navzájem různé, má $P$ diagram na obr. 1.

ad 2. Případ je duální k případu 1).

ad 3. Označme $a \vee b = c$, $a \wedge b = d$, $\bar{a} \wedge d = w$, $\bar{a} \wedge c = v$, $d \vee v = u$. Z těchto rovnic, z rovnic (5) a z modularity odvodíme:

$a \vee v = a \vee (\bar{a} \wedge c) = (a \vee \bar{a}) \wedge c = c$, $a \wedge v = a \wedge \bar{a} \wedge c = 0$,
$a \vee w = I$, $a \wedge w = a \wedge (\bar{a} \vee d) = (a \wedge \bar{a}) \vee d = d$,
$a \vee u = a \vee d \vee v = a \vee (\bar{a} \wedge c) = (a \vee \bar{a}) \wedge c = c$, $a \wedge u = a \wedge (d \vee v) = (a \wedge v) \vee d = d$;
$b \vee v = b \vee (\bar{a} \wedge c) = (\bar{a} \vee b) \wedge c = c$, $b \wedge v = 0$, $b \vee w = I$, $b \wedge w = b \wedge (\bar{a} \vee d) = (\bar{a} \wedge b) \vee d = d$,
$b \vee u = b \vee d \vee v = c \vee d = c$, $b \wedge u = b \wedge (d \vee v) = (b \wedge v) \vee d = d$;
$\bar{a} \vee u = \bar{a} \vee d \vee v = \bar{a} \vee d = w$, $\bar{a} \wedge u = \bar{a} \vee (d \vee v) = (\bar{a} \wedge d) \vee v = v$,
$\bar{a} \wedge d = 0$, $\bar{a} \vee c = I$;
$c \vee w = I$, $c \wedge w = c \wedge (\bar{a} \vee d) = (\bar{a} \wedge c) \vee d = d \vee v = u$;
$d \wedge v = 0$.

Snadno dokážeme (nepřímo), že prvky $a$, $b$, $\bar{a}$, $c$, $d$, $u$, $v$, $w$ jsou navzájem různé. Z toho plyne, že $P$ má diagram, zakreslený na obr. 3. **Poučka je dokázána.**

V distributivním svazu $S$ je ovšem podmínka (1) splněna. Z pouček 2,2 a 2,3 vidíme, že svaz $S$ s podmínkou (1) je poněkud obecnější než distributivní svaz $S$, že však oba tyto typy jsou velmi blízké.

Došlo 21. IX. 1954.

## LITERATURA


1. G. Birkhoff, Lattice theory, rev. ed. 1948. 2. O. Ore, On the foundation of abstrac algebra II, Ann. of Math. 37 (1935), str. 406—437. 3. V. Havel, Rozklady prvků ve svazech splňujících podmínku pro klesající řetězce, Časopis pro pěst. mat. 80(1955) str. 1—16.


## ЗАМЕТКА К ОДНОЗНАЧНОСТИ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ В ДЕДЕКИНДОВЫХ СТРУКТУРАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

ВАЦЛАВ ГАВЭЛ

### Выводы


Пусть S-дедекиндова структура конечной длины, наибольший элемент I которой прямо разложим. В статье исследовано несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы существовало одно и только одно (с точностью до последовательности компонент) прямое разложение элемента I в неразложимые компоненты. Одно такое условие заключается в том, чтобы для каждого дополнительного элемента существовало в S одно и только одно дополнение. Содержанием теорем 2,1 и 2,2 являются две варианты выше приведенного условия. В теореме 2,3 исследуется другое условие: требование, чтобы ни одна подструктура из S не была изоморфной с которой-нибудь из структур, диаграммы которых изображены на фиг. 1—4.