POZNÁMKA K TEÓRII BIKOMPAKTNÝCH POLOGRÚP

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava

Nech S je Hausdorffova bikompaktná pologrupa. V práci [4] som vyšetroval vlastnosti takejto pologrupy a odvodil rad viet o jej štruktúre. Obsahom predloženej poznámky je ukázať ako možno z prvých viet práce [4] odvodiť jednoduchými dedukciami dve dôležité vety o bikompaktných pologrupách.

Nižšie uvedená veta 2 je známa. Prvý raz ju ohlásil Peck [3] a druhý raz ju dokázal Numakura [2]. Veta 1 je — aspoň v podanej formulácii — nová.

1.

Pre pohodlie čitateľa zopakujem stručne tie poznatky, ktoré potrebujem z práce [4].

Nech S je bikompaktná Hausdorffova pologrupa. Nech je $a \in S$. Označme $A = \{a, a^2, a^3, \dots\}$. Potom uzáver $\bar{A}$ obsahuje jeden a len jeden idempotent e. Z toho špeciálne vyplýva, že každá pologrupa uvažovaného typu má aspoň jeden idempotent. Budeme hovoriť, že element a patrí k idempotentu e_α, ak e_α je jediným idempotentom $\in \bar{A}$. Keďže každý element $a \in S$ patrí k jednému a len jednému idempotentu, S sa rozpadne na súčet dizjunktných množín $S = \sum_\alpha K_\alpha$, kde K_α je súhrn všetkých elementov $\in S$, ktoré patria k idempotentu e_α. Zrejme je $e_\alpha \in K_\alpha$. Každá z množín K_α obsahuje ako podmnožinu istú maximálnu grupu $G_\alpha \subseteq K_\alpha$, ktorá má e_α za jednotkový element. Každá grupa G_α je uzavretá a platí $K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = G_\alpha$.

2.

Hovoríme, že v S platí pravidlo krátenia sprava, ak pre každé $a, b, c \in S$ z rovnice $ba = ca$ vyplýva $b = c$. Podobne hovoríme, že v S platí pravidlo krátenia zľava, ak z rovnice $ab = ac$ vyplýva $b = c$. Hovoríme, že v S platí pravidlo krátenia, ak platí pravidlo krátenia sprava aj pravidlo krátenia zľava.

Lemma 1. *Nech v S platí pravidlo krátenia sprava. Potom pre každé dva idempotenty e_α, $e_\beta \in S$ platí $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$.*

Dôkaz: Vyplýva zo vzťahu $(e_\alpha e_\beta)e_\beta = e_\alpha e_\beta$, v ktorom možno krátiť elementom e_β sprava.

Veta 1: *Nech S je Hausdorffova bikompaktná pologrupa, v ktorej platí pravidlo krátenia sprava. Potom S je množinovým súčtom dizjunktných izomorfných grúp. Pologrupa S je pritom zľava jednoduchá, t. j. neobsahuje žiaden ľavý ideál $\neq S$.*

Dôkaz: a) Píšme $S = \sum_\alpha K_\alpha$, kde α prebieha istú množinu indexov. Nech e_α je jediným idempotentom $\in K_\alpha$. Tvrdím, že pre každé α je $K_\alpha = G_\alpha$. Najprv je $K_\alpha e_\alpha = G_\alpha$. Predpokladajme, že je $K_\alpha - G_\alpha \neq \Phi$. Nech je $\omega_\alpha \in K_\alpha - G_\alpha$. Potom by bolo $\omega_\alpha e_\alpha \in G_\alpha$, t. j. $\omega_\alpha e_\alpha = g_\alpha$, kde je $g_\alpha \in G_\alpha$. Zo vzťahu $\omega_\alpha e_\alpha = g_\alpha = g_\alpha e_\alpha$ vyplýva, po krátení elementom e_α sprava, $\omega_\alpha = g_\alpha \in G_\alpha$, čo je v rozpore s voľbou elementu ω_α.

Teda je $S = \sum_\alpha G_\alpha$; S je množinovým súčtom dizjunktných grúp.

b) Nech je e_β ľubovoľný idempotent $\in S$. Potom

$$Se_\beta = (\sum_\alpha G_\alpha)e_\beta = \sum_\alpha (G_\alpha e_\alpha)e_\beta = \sum_\alpha G_\alpha(e_\alpha e_\beta) = \sum_\alpha G_\alpha e_\alpha = S.$$

Teda pre každé $e_\beta \in S$ platí vzťah $Se_\beta = S$.

c) Nech je b ľubovoľný element $\in S$. Ukážeme, že je $Sb = S$. Keďže b patrí do niektorej z grúp $G_\beta \subseteq S$, ktorá má idempotent e_β, existuje taký element $\bar{b}$, že je $\bar{b}b = e_\beta$. Zrejme je $S\bar{b} \subseteq S$. Teda $S\bar{b}b \subseteq Sb \subseteq S$, t. j. $S = Se_\beta \subseteq Sb \subseteq S$. Preto je $Sb = S$.

Rovnica $Sb = S$ hovorí, že pologrupa S nemá žiaden ľavý ideál $\neq S$; teda S je zľava jednoduchou pologrupou.[1]

d) Ukážme, že pre každé $e_\beta \in S$ je $e_\beta S = G_\beta$. Najprv platí $e_\beta S = e_\beta \sum_\alpha G_\alpha \supseteq e_\beta G_\beta = G_\beta$. Teda $e_\beta S \supseteq G_\beta$. Množina $e_\beta S$ je pologrupa, lebo je to pravý ideál z S. Ďalej pologrupa $e_\beta S$ má jediný idempotent e_β. Ak totiž element $e_\beta\omega$, $\omega \in S$ je idempotentom, platí $e_\beta\omega \cdot e_\beta\omega = e_\beta\omega$, t. j. $e_\beta\omega \cdot e_\beta\omega = e_\beta(e_\beta\omega)$ a po krátení sprava $e_\beta\omega = e_\beta$. Pre každé $\alpha \neq \beta$ je $e_\beta S \cap G_\alpha = \emptyset$. Keby totiž existoval element $g \in e_\beta S \cap G_\alpha$, platilo by jednak $g \in G_\alpha$, jednak $g = e_\beta \cdot \omega$ pre isté $\omega \in S$. Z toho vyplýva $e_\alpha g = e_\alpha e_\beta \omega$, teda $g = e_\alpha\omega$. Zo vzťahu $e_\beta\omega = e_\alpha\omega$ vyplýva $e_\alpha = e_\beta$, čo je v rozpore s predpokladom. Keďže pre $\alpha \neq \beta$ je $e_\beta S \cap G_\alpha = \emptyset$, máme nevyhnutne $e_\beta S \subseteq G_\beta$. Úhrnom je $e_\beta S = G_\beta$.

e) Nakoniec dokážeme, že grupy G_α a G_β sú izomorfné. Zobrazenie

$$x \in G_\alpha \to e_\beta x \in G_\beta \qquad (1)$$

[1] Keďže sme ukázali, že S je zľava jednoduchá pologrupa, ktorá má idempotent, mohli by sme k dokončeniu dôkazu použiť už známe výsledky zo všeobecnej teórie jednoduchých pologrúp (pozri Clifford [1], Schwarz [5]). Dávam však prednosť priamemu dôkazu, ktorý je pomerne krátky.

je homomorfné zobrazenie grupy G_α do grupy G_β, lebo ak (pri $x, y \in G_\alpha$) je $x \to e_\beta x \in G_\beta$, $y \to e_\beta y \in G_\beta$, je $xy \to e_\beta xy = e_\beta x(e_\alpha y) = e_\beta x(e_\alpha e_\beta)y = e_\beta(xe_\alpha)e_\beta y = e_\beta x \cdot e_\beta y \in G_\beta$.[2]

Dvom rôznym elementom $x \neq y$ zodpovedajú dva rôzne elementy $e_\beta x \neq e_\beta y$. (Lebo $e_\beta x = e_\beta y$ by implikovalo $e_\alpha e_\beta x = e_\alpha e_\beta y$, teda $e_\alpha x = e_\alpha y$, t. j. $x = y$.) Pritom je množina obrazov v homomorfizme (1) celá grupa G_β. Ak totiž y je ľubovoľný element $\in G_\beta$, elementu $e_\alpha y \in G_\alpha$ v homomorfizme (1) zodpovedá práve element $e_\beta e_\alpha y = e_\beta y = y \in G_\beta$. Inverzné zobrazenie k zobrazeniu (1) je zobrazenie $y \in G_\beta \to e_\alpha y \in G_\alpha$. Teda je (1) izomorfizmom. Treba ešte ukázať, že topologické priestory G_α, G_β sú homomorfné. To vyplýva okamžite z toho, že zobrazenie [1] a zobrazenie k nemu inverzné sú spojité zobrazenia G_α na G_β, resp. G_β na G_α. Tým je veta 1 úplne dokázaná.

Z vety 1 ihneď vyplýva:

Veta 1a: *Hausdorffova bikompaktná pologrupa s jediným idempotentom, v ktorej platí pravidlo krátenia sprava, je grupa.*

Lemma 2. *Pologrupa, v ktorej platí pravidlo krátenia, má najviac jeden idempotent.*

Dôkaz: Nech pologrupa S má dva idempotenty e_α, e_β. Potom zo vzťahu $e_\alpha \cdot e_\beta = e_\alpha \cdot (e_\alpha e_\beta)$ vyplýva $e_\beta = e_\alpha e_\beta$. Podobne zo vzťahu $e_\alpha \cdot e_\beta = (e_\alpha e_\beta) \cdot e_\beta$ vyplýva $e_\alpha = e_\alpha e_\beta$. Teda $e_\alpha = e_\beta$, č. b. t. d.

Veta 2: *Hausdorffova bikompaktná pologrupa S, v ktorej platí pravidlo krátenia, je grupa.*

Dôkaz: Podľa lemmy 2 a uvedených výsledkov má S práve jeden idempotent. Teda je S — podľa vety 1 — grupa.

Poznámka. Z vety 2 vyplýva tiež takýto dôsledok. Súvislá Hausdorffova bikompaktná pologrupa s konečným počtom idempotentov, v ktorej platí pravidlo krátenia sprava, je grupa. Dôkaz vyplýva bezprostredne z toho, že každá z grúp G_α je uzavretá a súčet konečného počtu takých grúp nemôže byť súvislý.

Došlo 15. VIII. 1954.

Katedra matematiky SVŠT v Bratislave

LITERATÚRA

1. A. H. Clifford: A system arising from a weakened set of group postulates, Ann. of Math. *34*, 1933, 865—871. 2. K. Numakura: On bicompact semigroups, Mathematical Journal of Okayama Univ., *1*, 1952, 99—108. 3. J. E. L. Peck: The embedding of topological groupoids in topological quasigroups, Bull. Amer. Math. Soc. *56*, 1950, 351. 4. Št. Schwarz: K teórii bikompaktných pologrúp (rusky), Čechoslovackij matematičeskij žurnal, *5* (80), 1955, 1—23. 5. Št. Schwarz: Struktura prostych pologrupp bez nuľa, tamže, *1* (76), 1951, 51—65.

[2] Používame pritom vzťah $x = xe_\alpha$ a lemmu 1.

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ

Выводы

Целью этой статьи является доказательство следующих двух теорем. Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа.

1. Если в S имеет место правило сокращения справа, то S — соединение дизъюнктных изоморфных групп. Полугруппа S при этом — слева проста, т. е. не содержит левого идеала отличного от S.

2. Если в S имеет место правило сокращения слева и справа, то S является группой.