MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK V ČÍSLO 2

O NIEKTORÝCH VLASTNOSTIACH RIEŠENÍ LINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE HOMOGÉNNEJ TRETIEHO RÁDU

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

V tejto práci sa zaoberám niektorými špeciálnymi vlastnosťami riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu:

$$y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0 \tag{a}$$

za určitých špeciálnych predpokladov o koeficientoch $A(x)$, $b(x)$.

Práca je rozdelená na dve časti:

V prvej časti na základe výsledkov G. Sansoneho [1] a M. Šveca [2] ukážem, že existujú tri množiny integrálov diferenciálnej rovnice (a), ktoré vyhovujú určitým diferenciálnym rovniciam druhého rádu. Prvá obsahuje všetky integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré v čísle $a \in (-\infty, \infty)$ spĺňajú podmienku: $y(a) = 0$. Druhá množina obsahuje všetky integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré v čísle $a \in (-\infty, \infty)$ spĺňajú podmienku: $y'(a) = 0$ a tretia množina sú integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré spĺňajú v čísle $a \in (-\infty, \infty)$ podmienku: $y''(a) = 0$.

Každá z množín sa dá písať v tvare $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$, kde $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ sú integrály v prvom prípade:

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \qquad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

v druhom prípade:

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \qquad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

v treťom prípade:

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \qquad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

pritom y_1, y_2, y_3 je fundamentálny systém diferenciálnej rovnice (a).

V druhej časti pomocou disperzií riešim určitý krajový problém tretieho rádu, kde podmienky sú predpísané v troch bodoch.

I.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu (a). O koeficientoch $A(x)$, $b(x)$ predpokladajme:

1. Nech $A(x) > 0$, $b(x) \geqq 0$, $A'(x)$ sú spojité funkcie pre $x \in (-\infty, \infty)$. Nech $b(x)$ nie je rovné nule v žiadnom čiastočnom intervale z intervalu $(-\infty, \infty)$.
2. Nech $A(x)$ je také, že integrály rovnice $u'' + \frac{1}{2} Au = 0$ oscilujú. Platí tzv. integrálna identita pre integrály $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a):

$$yy'' - \frac{1}{2} y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2 \, dx = \text{konšt.},$$

kde $a \in (-\infty, \infty)$ pevné číslo a $x \in (-\infty, \infty)$ ľubovoľné.

Veta 1: *Ak $y(x)$ je ľubovoľný integrál diferenciálnej rovnice* (a), *potom spĺňa najviac v jednom bode $a \in (-\infty, \infty)$ podmienku:*

$$y(a) = y'(a) = 0 \qquad (v_1)$$

a nemá naľavo od a žiaden nulový bod.

Podobne integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a) *vlastnosti*

$$y'(a) = y''(a) = 0 \qquad (v_2)$$

v ľubovoľnom čísle $a \in (-\infty, \infty)$, nemá naľavo od a žiaden nulový bod.

Prvé tvrdenie našej vety je známe [1]. Dôkaz druhého tvrdenia vyplýva priamo z integrálnej identity:

Nech $y(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti (v_2). Potom integrálna identita pre $y(x)$ znie:

$$yy'' - \frac{1}{2} y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2 \, dx = A(a) \cdot y^2(a).$$

Dajme tomu, že $y(x)$ má naľavo od a nulový bod x_1. To však znamená, že

$$-\frac{1}{2} y'^2(x_1) - \int_{x_1}^a by^2 \, dx = A(a) \cdot y^2(a).$$

To však nie je možné. Tým je tvrdenie dokázané.

Veta 2: *Integrály diferenciálnej rovnice* (a) *vlastnosti* (v_1) *alebo* (v_2), *alebo vlastnosti* (v_3): *$y(a) = y''(a) = 0$, sú závislé.*

Dôkaz: Dokážme napríklad prvé tvrdenie.

Nech y_1, y_2, y_3 je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (a), t. j.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \neq 0$$

pre každé x. Utvorme si funkciu

$$y(x) = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}.$$

Je zrejmé, že $y(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti (v_1). Ukážeme, že každý integrál $z(x)$ diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti (v_1) sa dá písať v tvare $z(x) = cy(x)$.

Nech $z(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ je ľubovoľný integrál diferenciálnej rovnice (a). Voľme c_1, c_2, c_3 tak, aby platilo:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + c_3 y_3(a) &= 0, \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + c_3 y_3'(a) &= 0, \\ c_1 y_1''(a) + c_2 y_2''(a) + c_3 y_3''(a) &= \beta \neq 0, \end{aligned}$$

kde β ľubovoľné číslo, t. j. nech:

$$c_1 = \frac{\beta}{W(a)} \cdot \begin{vmatrix} y_2(a), & y_3(a) \\ y_2'(a), & y_3'(a) \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{\beta}{W(a)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_3'(a) \end{vmatrix},$$

$$c_3 = \frac{\beta}{W(a)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a) \end{vmatrix}.$$

Keď ich však dosadíme do $z(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$, dostaneme $z(x) = \frac{\beta}{W(a)} \cdot y(x)$.

Podobne by sme ukázali v druhom aj v treťom prípade, že každý integrál $z(x)$ vlastnosti (v_2) alebo (v_3) sa dá písať v tvare:

$$z(x) = C \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \text{ resp. } z(x) = c \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}.$$

Ak v rovnici (a) je $b(x) \equiv 0$, potom rovnica

$$y''' + 2Ay' + A'y = 0 \qquad (1)$$

je samoadjungovanou.

Ak $u(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice $u'' + \frac{1}{2} A(x)u = 0$, ktorý spĺňa počiatočné podmienky $u(a) = 0$, $u'(a) \neq 0$, potom $y(x) = u^2(x)$ predstavuje integrál diferenciálnej rovnice (1) s dvojnásobným nulovým bodom v a, [1].

G. Sansone [1] dokázal tiež nasledujúcu vetu (Porovnávacia veta so samoadjungovanou): Nech platia predpoklady 1., 2. o koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) a nech $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$. Nech $y(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa počiatočné podmienky:

$$y(a) \cdot y''(a) - \frac{1}{2} y'^2(a) + A(a) \cdot y^2(a) \leqq 0. \qquad (2)$$

$$z''' + 2A_1(x)z' + A_1'(x)z = 0 \tag{1'}$$

je samoadjungovaná rovnica, v ktorej $A_1'(x)$ je spojitá funkcia pre $x \in (a, b)$, nech ďalej $A(x) \geqq A_1(x)$ pre $a \leqq x \leqq b$ a nech $z(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice samoadjungovanej (1'), ktorý má dvojnásobné nulové body nasledujúce za sebou v číslach α, β, kde $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$. Potom $y(x)$ má najmenej jeden nulový bod v intervale (α, β).

Veta 3: *Každý integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice* (a), *o ktorom platí*

$$y(a) = 0, \tag{3}$$

alebo

$$y'(a) = 0, \tag{4}$$

alebo

$$y''(a) = 0, \tag{5}$$

dá sa písať v tvare: $y(x) = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$, *kde* $\bar{y}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$ *sú v prípade* (3):

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

v prípade (4):

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

v prípade (5):

$$\bar{y}_1 = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}.$$

Dôkaz: Dokážme prvé tvrdenie.

Nech $y(x)$ je ľubovoľný integrál diferenciálnej rovnice (a), o ktorom platí $y(a) = 0, y'(a) = \alpha, y''(a) = \beta$, kde α, β sú pevné čísla, t. j. uvažujme prípad (3). Ukážeme, že v tvare $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$ možno c_1 a c_2 voliť tak, aby počiatočné podmienky boli splnené.

Prvá podmienka $y(a) = 0$ je splnená identicky pre každé c_1, c_2, pretože $\bar{y}_1(a) = \bar{y}_2(a) = 0$.

$y'(a) = c_2\bar{y}_2'(a) = \alpha$. Z toho vyplýva, že $c_2 = \dfrac{\alpha}{-W(a)}$, pretože $\bar{y}_2'(a)$ je wronskian fundamentálneho systému.

$y''(a) = c_1\bar{y}_1''(a) = \beta$. Z toho vyplýva, že $c_1 = \dfrac{\beta}{W(a)}$, pretože $\bar{y}_1''(a) = W(a)$, teda

$$y(x) = \frac{\beta}{W(a)} \cdot \bar{y}_1(x) - \frac{\alpha}{W(a)}\,\bar{y}_2(x).$$

Podobným spôsobom by sme dokázali tvrdenie (4) a (5).

Veta 4: *Každý integrál diferenciálnej rovnice* (a), *o ktorom platí* (3), (4), *alebo* (5) *z predchádzajúcej vety, vyhovuje určitej diferenciálnej rovnici druhého rádu.*

Dôkaz: Opäť dokážeme vetu pre prvý prípad. V ďalších dvoch prípadoch sú dôkazy úplne podobné.

Podľa vety 3 integrál diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti (3) má tvar

$$y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2,$$
$$y' = c_1\bar{y}_1' + c_2\bar{y}_2',$$
$$y'' = c_1\bar{y}_1'' + c_2\bar{y}_2''.$$

Vylúčme z posledných troch rovníc c_1, c_2. Po úprave dostávame:

$$y(\bar{y}_1'' \cdot \bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2'') + y'(\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2'' - \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1'') = \omega \cdot y'', \tag{6}$$

kde $\omega = \begin{vmatrix} \bar{y}_1, & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1', & \bar{y}_2' \end{vmatrix}$.

Pretože $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ sú riešenia diferenciálnej rovnice (a), je:

$$\bar{y}_1''' + 2A\bar{y}_1' + (A' + b)\bar{y}_1 = 0,$$
$$\bar{y}_2''' + 2A\bar{y}_2' + (A' + b) \cdot \bar{y}_2 = 0.$$

Násobme prvú rovnicu $\bar{y}_2$ a druhú $\bar{y}_1$ a odčítajme od prvej druhú, dostaneme:

$$\bar{y}_1''' \cdot \bar{y}_2 - \bar{y}_2'''\bar{y}_1 - 2A\omega = 0.$$

Vieme, že:

$$\omega' = \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2'' - \bar{y}_1'' \cdot \bar{y}_2,$$
$$\omega'' = \bar{y}_1'\bar{y}_2'' + \bar{y}_1\bar{y}_2''' - \bar{y}_1''' \cdot \bar{y}_2 - \bar{y}_1'' \cdot \bar{y}_2'.$$

Teda

$$\bar{y}_1'\bar{y}_2'' - \bar{y}_1'' \cdot \bar{y}_2' - \omega'' = \bar{y}_1''' \cdot \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2''',$$
$$\bar{y}_1' \cdot \bar{y}_2'' - \bar{y}_1'' \cdot \bar{y}_2' = \omega'' + 2A\omega.$$

Dosaďme posledný vzťah a vzťah pre ω' do rovnice (6). Po úprave dostávame:

$$\omega y'' - \omega' y' + [\omega'' + 2A\omega]\, y = 0, \tag{7}$$

Tým je veta dokázaná.

Veta 5: *V prípade* (3) *predchádzajúcej vety je* $\omega(a) = \omega'(a) = 0$ *a pre* $x > a$ *je* $\omega(x) \neq 0$. *V prípade* (4) *je* $\omega(a) = \omega''(a) = 0$ *a* $\omega(x)$ *nemá naľavo od* a *dvojnásobný nulový bod. V prípade* (5) *je* $\omega'(a) = 0$.

Dôkaz: Dokážme postupne všetky tri tvrdenia.

1. Podľa známej vety (G. Sansone: Equazioni differenciali I, 96) je $\omega(x)$ riešením adjungovanej rovnice k rovnici (a), t. j. rovnice

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)y = 0. \tag{a$_1$}$$

Je zrejmé, že

$$\omega(a) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1(a), & \bar{y}_2(a) \\ \bar{y}_1'(a), & \bar{y}_2'(a) \end{vmatrix} = 0, \qquad \omega'(a) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1(a), & \bar{y}_2(a) \\ \bar{y}_1''(a), & \bar{y}_2''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Integrálna identita pre rovnicu (a_1) je:

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 - \int_a^x b \cdot y^2\,dx = \text{konšt.}$$

Pre $\omega(x)$ je:

$$\omega \cdot \omega'' - \frac{1}{2}\omega'^2 + A\omega^2 - \int_a^{x_1} b\omega^2\,dx = 0.$$

Dajme tomu, že pre $x_1 > a$ je $\omega(x_1) = 0$. Potom z integrálnej identity vyplýva:

$$-\frac{1}{2}\omega'^2(x_1) = \int_a^{x_1} b\omega^2\,dx,$$

čo je spor.

2. Je zrejmé, že

$$\omega(a) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1(a), & \bar{y}_2(a) \\ \bar{y}_1'(a), & \bar{y}_2'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \omega'(x) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1, & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1'', & \bar{y}_2'' \end{vmatrix}, \quad \omega'(a) = -W^2(a),$$

$$\omega''(x) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1', & \bar{y}_2' \\ \bar{y}_1'', & \bar{y}_2'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{y}_1, & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1''', & \bar{y}_2''' \end{vmatrix}.$$

Keď do $\omega''(x)$ za x dosadíme číslo a, prvý člen je nula. Ukážme, že tiež

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_1(a), & \bar{y}_2(a) \\ \bar{y}_1'''(a), & \bar{y}_2'''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

$y_1''' = -2A\bar{y}_1' - (A' + b)\bar{y}_1$. $\bar{y}_1'''(a) = 0$, pretože $\bar{y}_1'(a) = \bar{y}_1(a) = 0$. To však znamená, že prvý stĺpec v determinante je nulový, teda

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_1(a), & \bar{y}_2(a) \\ \bar{y}_1'''(a), & \bar{y}_2'''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Integrálna identita pre $\omega(x)$ je:

$$\omega \cdot \omega'' - \frac{1}{2}\omega'^2 + A\omega^2 - \int_a^x b \cdot \omega^2\,dx = -\frac{1}{2}\omega'^2(a).$$

Dajme tomu, že pre $x = x_1 < a$ je $\omega(x_1) = \omega'(x_1) = 0$. Z integrálnej identity však vyplýva, že

$$\int_{x_1}^a b \cdot \omega^2\,dx = -\frac{1}{2}\omega'^2(a),$$

čo je spor.

3. Je zrejmé, že $\omega'(a) = 0$.

Poznámka 1: Pretože v prípade (3) vety 4 je $\omega(x) \neq 0$ pre $x > a$, rovnica (7) po prevedení na samoadjungovaný tvar pre $x > a$ prejde do tvaru:

$$\left[\frac{1}{\omega(x)} \cdot y'\right]' + \left[\frac{\omega''(x)}{\omega^2(x)} + \frac{2A(x)}{\omega(x)}\right] \cdot y = 0. \qquad \text{(b)}$$

Veta 6: *Všetky integrály diferenciálnej rovnice* (a) *ktoré spĺňajú podmienku* (3) *alebo* (4), *alebo* (5) *vo vete 3, sú oscilatorické pre* $x > a$.

Dôkaz: a) Nech $y(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a), o ktorom platí vlastnosť (3) vety 3. $y(x)$ tým však spĺňa v čísle a počiatočnú podmienku (2) porovnávacej vety:

$$y(a) \cdot y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a) \cdot y^2(a) \leq 0.$$

Porovnávajme rovnicu (a) so samoadjungovanou rovnicou:

$$z''' + 2Az' + A'z = 0.$$

Existuje integrál tejto rovnice, ktorý má samé dvojnásobné nulové body a ktorý osciluje v (a, ∞), pretože stačí vziať ľubovoľný integrál rovnice $u'' + \frac{1}{2}Au = 0$, ktorej integrály oscilujú a $z = u^2(x)$ je integrál rovnice samoadjungovanej a má samé dvojnásobné nulové body. Medzi každými dvoma nulovými bodmi riešenia $z = u^2(x)$ leží aspoň jeden nulový bod riešenia $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a), pritom $y(x)$ spĺňa v čísle a vlastnosť (3) vety 3.

b) Nech $y(x)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a), vlastnosti (4) alebo (5) vety 3. Potom v obidvoch prípadoch sa dá písať v tvare $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$. Všetky integrály tohto druhu vyhovujú príslušnej diferenciálnej rovnici druhého rádu (7). Preto stačí ukázať, že aspoň jeden integrál vlastnosti (4), resp. (5) osciluje.

Nech $b > a \in (-\infty, \infty)$. Voľme c_1 a c_2 tak, aby $c_1\bar{y}_1(b) + c_2\bar{y}_2(b) = 0$. Tým je však splnená počiatočná podmienka (2) porovnávacej vety v čísle b, teda riešenie podľa predchádzajúceho osciluje.

Veta 7: *Nech* $a < b \in (-\infty, \infty)$. *Nech* $y(x)$ *a* $z(x)$ *sú dva integrály diferenciálnej rovnice* (a), *o ktorých platí:*

$$y(a) = y(b) = 0, \quad z(a) = z(b) = 0, \qquad (8)$$

alebo

$$y'(a) = y(b) = 0, \quad z'(a) = z(b) = 0, \qquad (9)$$

alebo

$$y''(a) = y(b) = 0, \quad z''(a) = z(b) = 0. \qquad (10)$$

Potom $y(x)$ *a* $z(x)$ *sú dva integrály závislé.*

Dôkaz: Dôkaz prvého tvrdenia je známy [1].

Našou úlohou bude dokázať druhé a tretie tvrdenie.

Utvorme si integrál

$$y(x) = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(b), & y_2(b), & y_3(b) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix},$$

v ktorom aspoň jeden z determinantov matice

$$\begin{pmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(b), & y_2(b), & y_3(b) \end{pmatrix}$$

je rôzny od nuly.

Dajme tomu, že to neplatí. Potom však je:

$$\begin{aligned} &y_1'(a)y_2(b) - y_1(b)\cdot y_2'(a) = 0,\\ &y_1'(a)y_3(b) - y_1(b)\cdot y_3'(a) = 0,\\ &y_2'(a)\cdot y_3(b) - y_3'(a)\cdot y_2(b) = 0,\end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{aligned} &y_2'(a) = k_1 y_1'(a),\ y_3'(a) = k_2\cdot y_1'(a),\\ &y_2(b) = k_1 y_1(b),\ y_3(b) = k_2 y_1(b).\end{aligned}$$

Počítajme wronskian fundamentálneho systému v čísle a.

$$W(a) = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a), & y_3(a) \\ y_1'(a), & k_1 y_1'(a), & k_2 y_1'(a) \\ y_1''(a), & y_2''(a), & y_3''(a) \end{vmatrix}.$$

Voľme pritom y_1 tak, aby $y_1'(a) = 0$. Potom však $W(a) = 0$, čo je spor.

Je zrejmé, že platí $y'(a) = y(b) = 0$, t. j. v čísle a a b je splnená podmienka (8).

Ukážeme, že každý integrál $z(x)$ diferenciálnej rovnice (a), o ktorom platí $z'(a) = z(b) = 0$, dá sa písať v tvare $z(x) = cy(x)$.

Podľa predchádzajúcej vety

$$y(x) = \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_1(b), & y_2(b), & y_3(b) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}$$

má aj ďalšie nulové body. Nech teda $y(c) = 0$ a $z(c) = \beta \neq 0$, kde $c \in (b, \infty)$ a β pevné číslo. $z(x)$ je integrál tvaru

$$z = c_1 y_1 = c_2 y_2 + c_3 y_3,$$

kde c_1, c_2, c_3 treba voliť tak, aby

$$\begin{aligned} c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + c_3 y_3'(a) &= 0.\\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + c_3 y_3(b) &= 0.\end{aligned}$$

Vypočítajme c_1, c_2, c_3 z posledných dvoch rovníc, pritom pre jednoduchosť predpokladajme, že

$$\begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a) \\ y_1(b), & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$c_1 = \frac{c_3 \begin{vmatrix} y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_2(b), & y_3(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a) \\ y_1(b), & y_2(b) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{-c_3 \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_3'(a) \\ y_1(b), & y_3(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a) \\ y_1(b), & y_2(b) \end{vmatrix}}, \quad c_3 = c_3.$$

Dosaďme takto vypočítané c_1, c_2, c_3 do rovnice

$$z(c) = c_1 y_1(c) + c_2 y_2(c) + c_3 y_3(c) = \beta \neq 0.$$

Po úprave máme:

$$c_3 \left\{ y_1(c)\cdot \begin{vmatrix} y_2'(a), & y_3'(a) \\ y_2(b), & y_3(b) \end{vmatrix} - y_2(c)\cdot \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_3'(a) \\ y_1(b), & y_3(b) \end{vmatrix} + y_3(c) \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a) \\ y_1(b), & y_2(b) \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \beta \begin{vmatrix} y_1'(a), & y_2'(a) \\ y_1(b), & y_2(b) \end{vmatrix}.$$

Aby rovnosť bola splnená, musí byť $\beta = 0$, pretože na ľavej strane v zátvorke je $y(c)$, čo je podľa predpokladu rovné nule. To však je spor s predpokladom, že $\beta \neq 0$.

Podobne by sme dokázali aj tretie tvrdenie našej vety.

Veta 8: *Nulové body integrálov diferenciálnej rovnice* (a), *o ktorých platí* (3) *vety 3, oddeľujú sa v intervale* (a, ∞). *Ak* $y(x)$ *je integrál rovnice* (a), *o ktorom platí* (3) *vety 3 a ak* x_1 *je prvý nulový bod integrálu* $\bar{y}_1(x)$ *po* a, *potom medzi* a *a* x_1 *leží práve jeden nulový bod integrálu* $y(x)$.

Dôkaz: Prvé tvrdenie je zrejmé, pretože sa jedná o integrály rovnice druhého rádu. Stačí dokázať, že v (a, x_1) leží aspoň jeden nulový bod integrálu $y(x)$ a pretože nulové body $\bar{y}_1(x)$ a $y(x)$ sa oddeľujú, tak tam leží práve jeden. Dajme tomu, že to nie je pravda. Potom platí:

$$\left(\frac{\bar{y}_1}{y}\right)' = \frac{\bar{y}_1' y - \bar{y}_1 y'}{y^2}.$$

Integrujme túto rovnosť v intervale (a, x_1) a dostaneme:

$$\frac{\bar{y}_1(x_1)}{y(x_1)} - \lim_{x\to a+} \frac{\bar{y}_1(x)}{y(x)} = \lim_{x\to a+} \int_x^{x_1} \frac{\bar{y}_1' y - \bar{y}_1 y'}{y^2}\, dx.$$

Je zrejmé, že ľavá strana je rovná nule. Nevlastný integrál na pravej strane existuje, pretože funkcia pod integrálom je spojitá v (a, x_1).

V bode a má konečnú limitu, pretože:

$$\lim_{x\to a+} \frac{\bar{y}_1' y - \bar{y}_1 y'}{y^2} = \lim_{x\to a+} \frac{\bar{y}_1'' y - \bar{y}_1 y''}{2yy'} = \lim_{x\to a+} \frac{\bar{y}_1''' y + \bar{y}_1'' y' - \bar{y}_1' y'' - \bar{y}_1 y'''}{2y'^2 + 2yy''} = \\ = \frac{-c_2 W^2}{2W^2} = -\frac{c_2}{2}.$$

Pretože $\bar{y}_1' y - \bar{y}_1 y'$ je riešením rovnice (a_1) a má v a dvojnásobný nulový bod, nemá napravo od a nulové body, a preto nevlastný integrál na pravej strane od nuly je rôzny, čo je spor, pretože na ľavej strane je nula.

II.

G. Sansone [1] dokázal túto tzv. oscilačnú vetu (prvá oscilačná veta): Nech $A(x)$ je spojitá spolu s $A'(x)$ v intervale (a, b). Nech $A(x) > 0$ pre $x \in (a, b)$ a $b(x, \lambda) \geqq 0$ pre $a \leqq x \leqq b$ a $\lambda \geqq \lambda_0$. Potom každý integrál $y(x, \lambda)$ rovnice

$$y''' + 2\lambda A y' + (\lambda A' + b)\, y = 0,$$

ktorý spĺňa počiatočné podmienky:

$$y(a, \lambda) \,.\, y''(a, \lambda) - \frac{1}{2} y'^2(a, \lambda) + A(a) \,.\, y^2(a, \lambda) \leqq 0,$$

nadobúda v (a, b) nulové body, ktorých počet rastie do nekonečna s rastúcim λ do nekonečna, medzitým čo vzdialenosť medzi dvoma nulovými bodmi konverguje k nule.

Poznámka 2: Veta platí aj pre diferenciálnu rovnicu (a) pre ľubovoľný interval $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$, kde $A = A(x, \lambda)$ je spojitá spolu so svojou deriváciou $A'(x, \lambda)$ pre $x \in (-\infty, \infty)$ a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$ za predpokladu, že je $A(x, \lambda) > 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$ a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$ a $\lim_{\lambda\to\Delta_2} A(x, \lambda) = +\infty$, pritom pre $\lambda_1 < \lambda_2 \in (\Delta_1, \Delta_2)$ je $A(x, \lambda_1) < A(x, \lambda_2)$.

Veta 9: *(Krajový problém III. rádu.) Majme diferenciálnu rovnicu*

$$y''' + 2A(x, \lambda) y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0 \tag{a}$$

kde $A(x, \lambda) > 0$, $A'(x, \lambda)$, $b(x, \lambda)$ *sú spojité funkcie premennej* $x \in (-\infty, \infty)$ *a* $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. *Nech ďalej* $A(x, \lambda_1) < A(x, \lambda_2)$ *pre* $\lambda_1 < \lambda_2 \in (\Delta_1, \Delta_2)$ *a nech* $\lim_{\lambda\to\Delta_2}$ $A(x, \lambda) = +\infty$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$ *a* $b(x, \lambda) \geqq 0$ *pre* $x \in (-\infty, \infty)$ *a* $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$ *a nech* $b(x, \lambda)$ *nie je rovné nule v žiadnom čiastočnom intervale v* $(-\infty, \infty)$. *Nech ďalej* $a < b < c \in (-\infty, \infty)$. *Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra* $\lambda : \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots$, *konvergujúcich k* Δ_2, *ku ktorým patrí postupnosť funkcií:*

$$y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, \ldots$$

je taká, že platí $y(a, \lambda_{n+p}) = y(b, \lambda_{n+p}) = y(c, \lambda_{n+p}) = 0$ *a* $y(x, \lambda_{n+p}) = y_{n+p}$ *má v* (b, c) *práve* $n + p$ *nulových bodov.*

Dôkaz: Uvažujme integrál $y(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (a) taký, že platí $y(a, \lambda) = 0$ pre každé $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. $y(x, \lambda)$ vyhovuje pre $x > a$ diferenciálnej rovnici druhého rádu:

$$\left[\frac{1}{\omega(x, \lambda)} y'\right]' + \left[\frac{\omega''(x, \lambda)}{\omega^2(x, \lambda)} + \frac{2A(x, \lambda)}{\omega(x, \lambda)}\right] y = 0 \tag{b}$$

a dá sa písať v tvare $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$, kde $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ sú integrály diferenciálnej rovnice (a) ako vo vete 3, v prípade (3).

Voľme c_1, c_2 tak, aby $y(b, \lambda) = 0$ pre každé $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Tým je však v čísle b splnená podmienka:

$$y(b, \lambda) \,.\, y''(b, \lambda) - \frac{1}{2} y'^2(b, \lambda) + A(b, \lambda) \,.\, y^2(b, \lambda) \leqq 0,$$

teda podľa prvej oscilačnej vety s rastúcim λ rastie počet nulových bodov v (b, c) do nekonečna.

K dokončeniu dôkazu použijeme disperzie[1], pojmu zavedeného v práci [4] pre integrály diferenciálnej rovnice II. rádu tvaru $[\Theta(x, \lambda)y']' - Q(x, \lambda)y = 0$.

Definícia disperzie pre integrály diferenciálnej rovnice (b) znie:

Nech $x \in (a, \infty)$ také, že $y(x, \lambda) = 0$. Ďalší nulový bod integrálu y, nasledujúci po x, označme $\varphi_1 = \varphi_1(x, \lambda)$ a nazvime prvou centrálnou disperziou prvého druhu. Všeobecne ν-ty nulový bod integrálu y rovnice (b) označme $\varphi_\nu = \varphi_\nu(x, \lambda)$ a nazvime ν-ta centrálnou disperziou prvého druhu.

Rovnica (b) je tvaru $[\Theta y']' - Qy = 0$, teda na základe [4] disperzia $\varphi_\nu(x, \lambda)$ je spojitou a rastúcou funkciou x a spojitou funkciou parametra λ.

Označme si $\varphi_\nu(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$. $\varphi(x, \lambda)$ má prvú deriváciu podľa x danú vzorcom:

$$\varphi_\nu' = \frac{\omega(x, \lambda)\, \varrho^2(\varphi, \lambda)}{\omega(\varphi, \lambda) \,.\, \varrho^2(x, \lambda)},$$

t. j. vyhovuje diferenciálnej rovnici prvého rádu, [4] . $\varrho = \sqrt{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2}$.

Nech pre $\lambda = \lambda^*$ je v (b, c) práve n koreňov. Potom platí:

$$\varphi_n(b, \lambda^*) \leqq c < \varphi_{n+1}(b, \lambda^*).$$

Pretože počet nulových bodov v (b, c) rastie s rastúcim λ, existuje také $\lambda^{**} \in (\lambda^*, \Delta_2)$, že $\varphi_{n+1}(b, \lambda^{**}) < c$. Zo spojitosti $\varphi_{n+1}(b, \lambda)$ vyplýva, že existuje také $\lambda_n \in (\lambda^*, \lambda^{**})$, kde $\varphi_{n+1}(b, \lambda_n) = c$. Teda platí $y(a, \lambda_n) = y(b, \lambda_n) = y(c, \lambda_n) = 0$ a $y(x, \lambda_n) = y_n$ má v (b, c) práve n nulových bodov.

Pre $\lambda = \lambda_n$ je $\varphi_{n+2}(b, \lambda_n) > c$. Pretože počet nulových bodov v (b, c) rastie s rastúcim λ, existuje také $\lambda \in (\lambda_n, \Delta_2)$, kde $\varphi_{n+2}(b, \lambda) < c$. Zo spojitosti $\varphi_{n+2}(b, \lambda)$ vyplýva, že existuje také $\lambda_{n+1} \in (\lambda_n, \lambda)$, že $\varphi_{n+2}(b, \lambda_{n+1}) = c$ a $y(x, \lambda_{n+1}) = y_{n+1}$ má v (b, c) práve $n + 1$ nulových bodov.

[1] Pojem disperzie zaviedol O. Borůvka [3] pre integrály diferenciálnej rovnice druhého rádu tvaru $y'' + Q(x)y = 0$.

Postupujúc takto by sme našli postupnosť hodnôt parametra λ:

$$\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p} \ldots,$$

ku ktorej patrí postupnosť funkcií:

$$y_n, y_{n+1}, \ldots; y_{n+p}, \ldots$$

o žiadaných vlastnostiach.

Poznámka 3: G. Sansone riešil podobný krajový problém v troch bodoch[2], avšak uvažoval diferenciálnu rovnicu tvaru:

$$y''' + A(x)y'' + \lambda(B(x)y' + c(x)y) = 0$$

a jeho metóda dôkazu bola úplne iná.

Došlo 28. VI. 1954.

LITERATÚRA

1. G. Sansone: Studi sulle differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. (Revista, 1948, 6, 195—253.) 2. M. Švec: Über einige neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung. (Čechoslovackij matematičeskij žurnal, 4 (79), 1954, 199—225.) 3. O. Borůvka: O kolebľuščichsa integralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo porjadka. (Čechoslovackij matematičeskij žurnal, 3 (78), 1953, 75—94.) 4. M. Greguš: Aplikácia disperzií na krajový problém druhého rádu. (Matematicko-fyzikálny časopis SAV 4, 1954, 27—37.)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ

Выводы

В этой работе занимаемся некоторыми специальными свойствами решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка вида:

$$y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0. \tag{a}$$

В первой части показывается, что существуют три множества интегралов уравнения (a), из которых первое составляют интегралы $y(x)$ удовлетворяющие $y(a) = 0$, вторым являются все интегралы $y(x)$ удовлетворяющие $y'(a) = 0$, а третьим интегралы $y(x)$ удовлетворяющие $y''(a) = 0$, $a \in (-\infty, \infty)$. При том каждое множество представляет все интегралы определенного дифференциального уравнения второго порядка. Специально исследуются свойства интегралов первого множества.

В другой части решается помощью дисперсий определенный краевый проблем третьего порядка. Доказана следующая теорема:

Пусть в уравнении (a) $A = A(x, \lambda) > 0$, $A'(x, \lambda)$, $b = b(x, \lambda)$ являются непрерывными функциями от $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Пусть $A(x, \lambda_1) < A(x, \lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и пусть $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ для каждого $x \in (-\infty, \infty)$ и $b(x,\lambda) \geqq 0$ для $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Пусть $b(x, \lambda)$ не равное нулю ни в одном частичном интервале из $(-\infty, \infty)$. Пусть $a < b < c \in (-\infty, \infty)$. Тогда существует бесконечное множество значений параметра $\lambda : \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots \lambda_{n+p}, \ldots$, имеющих предел Λ_2, которым соответсвуют решения уравнения (a): $y_n, y_{n+1}, \ldots y_{n+p}, \ldots$ удовлетворяющие условиям:

$$y(a, \lambda_{n+p}) = y(b, \lambda_{n+p}) = y(c, \lambda_{n+p}) = 0$$

и интеграл $y(x, \lambda_{n+p}) = y_{n+p}$ имеет в (b, c) точно $n + p$ нулей.

---

[2] Il teorema d' oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Let. (2), 62 (1920), 683—692.