

TENZOR DEFORMÁCIE PRIESTORU A ČASU POHYBOM

JÚLIUS KREMPASKÝ

Všetky fyzikálne skutočnosti nasvedčujú tomu, že vo všetkých inerciálnych súradnicových sústavách sa svetlo vo vákuu šíri vo všetkých smeroch konštantnou rýchlosťou c . To je základný postulát Einsteinovej špeciálnej teórie relativity, z ktorej vyplýva, že diferenciálna kvadratická forma

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (1)$$

kde x, y, z sú pravouhlé priestorové súradnice bodovej udalosti a t obvyklým spôsobom určený čas, vo všetkých inerciálnych súradnicových sústavách má rovnakú hodnotu.

Priestorové súradnice x, y, z a čas t predstavujú súbor štyroch číselných údajov, ktoré jedno-jednoznačne vyjadrujú uloženie bodovej udalosti v štvorrozmernom priestorochase. Tento štvorrozmerný priestorochas do fyziky zaviedol Minkowski tým, že formu (1), invariantnú vzhľadom na transformáciu súradníc, zodpovedajúcu prechodu od jednej inerciálnej súradnicovej sústavy k druhej, prehlásil za vyjadrenie druhej mocniny diferenciálu oblúka čiar v priestorochase.

Z geometrie abstraktného štvorrozmerného lineárneho priestoru vieme, že druhá mocnina diferenciálu oblúka čiar v tomto priestore je daná výrazom:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (2)$$

kde $g_{ik} = e_i \cdot e_k$ sú fundamentálne metrické veličiny a x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sú radnice bodu, vzťahujúce sa na štyri od seba lineárne nezávislé základné vektory e_1, e_2, e_3, e_4 . Porovnaním výrazov (1) a (2) zistíme, že premenné vystupujúce vo výraze (1) sú súradnice vzťahujúce sa na základné vektory, ktoré spĺňajú rovnice

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 = g_{11} &= 1 \\ e_2 \cdot e_2 = g_{22} &= 1 \\ e_3 \cdot e_3 = g_{33} &= 1 \\ e_4 \cdot e_4 = g_{44} &= -c^2 \end{aligned} \quad e_i \cdot e_k = g_{ik} = 0, \quad i \neq k,$$

a polohový vektor svetobodu je:

$$r = xc_1 + yc_2 + zc_3 + tc_4.$$

Vektory e_1, e_2, e_3 a e_4 sú teda vzájomne na seba kolmé a vektory e_1, e_2 a e_3 , ktoré ďalej budeme písať pomocou obvyklých symbolov i, j a k , sú okrem toho jednotkové.

Zavedme vektor $l = \frac{e_4}{ic}$. Potom bude $e_4 = icl$ a $ll = 1$. Vektor l je teda tiež jednotkový a polohový vektor svetobodu, vyjadrený pomocou ortogonálneho systému jednotkových vektorov i, j, k a l , je:

$$r = xi + yj + zk + icl. \quad (3)$$

Z invariantnosti intervalu (1) možno odvodiť transformačné Lorentzové vzorce, podľa ktorých sa transformujú súradnice svetobodu x, y, z a t , vzťahujúce sa na inerciálnu sústavu S , na súradnice x', y', z', t' toho istého svetobodu, vzťahujúce sa na inerciálny systém S' , ktorý sa vzhľadom na systém S pohybuje konštantnou rýchlosťou v . Pri odvodzovaní týchto vzorcov môžeme postupovať buď zložkovou metódou, ako to nachádzame v bežných učebniaciach teoretickej fyziky alebo metódou vektorového a tenzorového počtu. Pri odvodzovaní Lorentzových vzorcov prvým spôsobom treba si zvoliť pevnú súradnicovú sústavu S a inú S' , pohybujúcu sa vzhľadom na prvú rýchlosťou v a stanoviť vzájomný vzťah oboch (napr. „stotožniť, osi X a X'). Nezávisle od týchto volieb je možné metódou vektorového a tenzorového počtu odvodiť všeobecne platné transformačné vzorce, z ktorých Lorentzové transformácie vyplývajú ako špeciálny prípad. Prítom aj hoci vzťahy odvodené použitím vektorového a tenzorového počtu sú všeobecnejšieho charakteru, príslušný matematický aparát je omnoho stručnejší a spôsob odvodzovania názornejší, ako je to pri používaní zložkového počítania.

1. Pomocné vzťahy

Podľa toho, či sa operame o súradnicovú sústavu S alebo S' , polohový štvorvektor tej istej bodovej udalosti je:

$$r^* = xi + yj + zk + icl$$

alebo

$$r^* = x'i' + y'j' + z'k' + ic'l'$$

Je však možné polohový štvorvektor rozložiť len na dve zložky, priestorovú a časovú, ak označíme:

$$r = xi + yj + zk, \quad t = icl$$

a analogicky pre čiarkovaný systém. Potom je:

$$r^* = r + t$$

alebo

$$r^* = r' + t'$$

Ak I je trojrozmerný tenzor identity, t. j. $I = ii + jj + kk$, ľahko sa môžeme presvedčiť o správnosti vzťahov

$$r^* \cdot I = r \quad r^* \cdot II = t \quad (4a, b)$$

$$r^* \cdot I' = r' \quad r^* \cdot I'V' = t' \quad (5a, b)$$

Štvorrozmerný tenzor

$$I^* = ii + jj + kk + ll$$

je zrejme tenzor identity v Minkovského priestorócase.

2. Tenzor deformácie priestoru a času

Majme na mysli už spomínané ľubovoľné inerciálne súradnicové sústavy S a S' , ktoré sa nachádzajú vo vzájomnom rovnomernom priamočiaram pohybe. Rýchlosť systému S' vzhľadom na S nech je v a v čase $t = t'$ nech počítanky obidvoch sústav splyývajú. Potom je:

$$r = vt', \text{ je } r' = 0. \quad (6)$$

Táto podmienka stačí k odvodeniu vzťahov medzi priestorovými a časovými súradnicami polohového vektora ľubovoľnej bodovej udalosti v obidvoch týchto sústavách.

Rovnice (4a) a (5a) možno písať v tvare:

$$\begin{aligned} r^* \cdot (I^* - II) &= r, \\ r^* \cdot (I^* - II) &= r'. \end{aligned}$$

Odčítaním rovnice prvej od rovnice druhej dostávame:

$$r' = r - r^* \cdot (II' - II) = r + r^* \cdot (II - II'). \quad (7a)$$

Podobne pre vektory t a t' z rovníc (4b) a (5b) dostávame:

$$t' = t + r^* \cdot (II' - II) = t - r^* \cdot (II - II'). \quad (7b)$$

Z podmienky (6) a z rovnice (7a) však vyplýva:

$$\begin{aligned} 0 &= vt' - (vt + ictl) \cdot (II' - II), \\ v + ictl &= (v + ictl) \cdot II'. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice bezprostredne vyplýva, že II' je vektor s vektorom $v + ictl$ rovnobežný. Možno preto písať:

$$II' = \lambda(v + ictl).$$

Keďže okrem toho vektor II' spĺňa rovnicu $II' \cdot I' = 1$, máme:

$$\lambda^2(v^2 - c^2) = 1,$$

t. j.

$$\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Teda je:

$$I' = \pm i \frac{v + ictl}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \pm \frac{\beta}{ic} (v + ictl), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8a)$$

Znamienka $+$ alebo $-$ závisia len od toho, či chceme počítať čas v obidvoch sústavách súhlasne alebo opačne.

Symetrický tenzor

$$D^* = II - II',$$

vystupujúci vo vzorcoch (7a) a (7b), môžeme písať:

$$D^* = II + \frac{\beta^2}{c^2} (vv + ictv + ictv - c^2II) = \frac{\beta^2}{c^2} [ic(vl + lv) + (vv - v^2II)], \quad (9a)$$

alebo vo vyjadrení pomocou súradnic

$$D^* = \frac{1}{c^2 - v^2} \begin{pmatrix} v_x^2 ii + v_x v_y ij + v_x v_z ik + icv_x ll + \\ + v_y v_x ji + v_y^2 jj + v_y v_z jk + icv_y ll + \\ + v_z v_x ki + v_z v_y kj + v_z^2 kk + icv_z kl + \\ + icv_z ll + icv_z ll + icv_z ll - v^2 ll \end{pmatrix}. \quad (9b)$$

Rovnice (7a) a (7b) tiež sú:

$$r' = r + r^* \cdot D^*, \quad (10a)$$

$$t' = t - r^* \cdot D^*. \quad (10b)$$

Symetrický tvar majú aj rovnice pre opačnú transformáciu

$$r = r' - r^* \cdot D^*, \quad (11a)$$

$$t = t' + r^* \cdot D^*. \quad (11b)$$

3. Analógia s deformáciou pevného telesa

Nech dr je polohový vektor bodu nedeformovaného telesa vzhľadom na bod jemu blízky a dr' polohový vektor toho istého bodu po homogénnej deformácii telesa. Potom, ako je známe, vzťah oboch je správne vyjadrený rovnicou

$$dr' = dr + dr \cdot D,$$

kde D je tenzor deformácie pevného telesa.

Diferencovaním rovnice (7a), v ktorej D^* je konštantný tenzor, dostávame (pre $dt = 0$):

$$dr' = dr + dr \cdot D^*.$$

Je zrejme úplná analógia týchto rovníc s rovnicou pre homogénnu deformáciu pevného telesa. Právom možno teda nazvať D^* tenzorom deformácie priestoru a vzhľadom na rovnicu (7b) aj časovú pohybov.

4. Dilatácia času a dĺžková kontrakcia

Uvažujme časovú odľahlosť dvoch svetobodov v tom istom bode priestoru S' . Pre pozorovateľa v S' bude ona $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, pre pozorovateľa v sústave $S \Delta t = t_2 - t_1$.

Podľa rovnice (11b) je:

$$ict'_1 I = ict'_1 I' + (r' + ict'_1 I') \cdot D^*,$$

$$ict'_2 I = ict'_2 I' + (r' + ict'_2 I') \cdot D^*,$$

teda

$$\Delta \mathbf{l} = \Delta t \mathbf{V}' + \Delta t' \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}^* = \Delta t \mathbf{V}' + \Delta t' \mathbf{V} \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{I} \mathbf{I}') = \Delta t' (\mathbf{I} \cdot \mathbf{V}') \mathbf{I} = \beta \Delta t' \mathbf{I}$$

alebo, ak túto rovnicu skalárne znásobíme vektorom \mathbf{l} ,

$$\Delta t = \beta \Delta t',$$

t. j.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\beta} < \Delta t. \quad (12a)$$

Je to známy vzťah, ktorý vyjadruje, že čas v pohybujúcej sa sústave plynie pomalšie ako v nehybnej.

Podobne môžeme postupovať aj pri odvodzovaní vzťahu pre zmenu dĺžok. Z rovnice (10a) pre priestorovú odľahlosť dvoch svetobodov o tej istej časovej súradnici v priestore S vyplýva:

$$\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{D}^* = \Delta \mathbf{r} + \frac{1}{c^2 - v^2} (\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + i c \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \mathbf{l}).$$

Vidíme, že zmena dĺžky nastáva len v prípade, ak ona nie je kolmá na vektor rýchlosti \mathbf{v} . V prípade, že celá spadá do smeru rýchlosti pohybujúcej sa sústavy, posledná rovnica prejde na tvar:

$$\Delta \mathbf{r}' = \beta^2 \left(\Delta \mathbf{r} + \frac{i}{c} \Delta r \mathbf{v} \right).$$

teda,

$$(\Delta r')^2 = \beta^4 \left[(\Delta r)^2 - \frac{v^2}{c^2} (\Delta r)^2 \right] = \beta^2 (\Delta r)^2,$$

t. j.

$$\Delta r' = \beta \Delta r$$

alebo

$$\Delta r' = \frac{1}{\beta} \Delta r' < \Delta r'. \quad (12b)$$

Posledná rovnica je vyjadrením známeho vzťahu o skracovaní dĺžok pohybom.

5. Odvodenie Lorentzových transformácií

Známe Lorentzové vzorce, spomínané v úvode článku, sú odvodené za týchto predpokladov:

1. Smer osi X súradnicovej sústavy S je totožný so smerom rýchlosti pohybujúcej sa sústavy S' .
2. Súradnicová sústava S' je volená tak, aby osi Y' , resp. Z' , boli rovnobežné a súhlasne orientované s osami Y , resp. Z , sústavy S .

Podľa prvého predpokladu možno pre rýchlosť v písať $v = v_i$. Keďže súradnice x, y, z, t , resp. x', y', z', t' predstavujú ortogonálne súradnice svetobodu, transformujú sa pri prechode zo súradnicovej sústavy S do S' podobne ako jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$. Vzorec pre transformovanie časovej súradnice

dostaneme preto jednoduchou tým, že vo vyjadrení jednotkového vektora \mathbf{l}' podľa rovnice (8)

$$\mathbf{l}' = \frac{\beta}{ic} (v\mathbf{i} + ic\mathbf{l}), \quad (13)$$

napíšeme $ic\mathbf{l}'$ namiesto \mathbf{l}' , $ic\mathbf{l}$ namiesto \mathbf{l} a x namiesto i . Tým dostaneme:

$$ic\mathbf{l}' = \frac{\beta}{ic} (vx + ic \cdot ic\mathbf{l}),$$

t. j.

$$l' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \quad (8b)$$

Osi Y a Z systému S predstavujú podľa svojej definície súbor všetkých udalostí, ktoré sa vyznačujú nulovými súradnicami x, z a t , resp. x, y a t . Z rovnice (10b) však bezprostredne vyplýva, že súbor týchto udalostí sa aj v súradnicovom systéme S' vyznačuje nulovou súradnicou t' . Osi Y' a Z' je zrejmé možno voliť tak, aby sa tieto udalosti vyznačovali aj nulovými súradnicami x' a z' , resp. x' a y' . Inými slovami, možno zvoliť súradnicovú sústavu S' tak, aby tie udalosti, ktoré sa v systéme S odohrali na osi Y alebo Z , v systéme S' boli uložené opäť na osi Y' alebo Z' . Takýto súradnicový systém má teda os Y' orientovanú súhlasne s osou Y systému S , os Z' súhlasne s osou Z . Na základe toho možno písať:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}, \\ \mathbf{k}' = \mathbf{k}.$$

Poloha časovej osi je jednoznačne určená vektorom \mathbf{l}' . Uloženie osi X nájdeme tak, že si určíme jednotkový vektor \mathbf{i}' . Tým automaticky nájdeme aj žiadaný vzťah pre transformáciu x -ovej súradnice svetobodu.

Z posledných rovníc vyplýva, že jednotkový vektor \mathbf{i}' nemá žiadnu zložku do osi Y a Z . Bude teda zrejmé \mathbf{i}' istou lineárnou kombináciou len vektorov \mathbf{i} a \mathbf{l} . Možno preto písať:

$$\mathbf{i}' = a\mathbf{i} + b\mathbf{l}.$$

Podmienka ortogonalitý vektorov \mathbf{i}' a \mathbf{l}' žiada, aby bolo:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{l}' = 0.$$

Ak v tejto rovnici vyjadrieme \mathbf{l}' podľa vzorca (8a) a \mathbf{i}' podľa predchádzajúceho vzorca, dostaneme rovnicu:

$$av = -icb.$$

Keďže vektor \mathbf{i}' je jednotkový, koeficienty a, b spĺňajú aj vzťah

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Последné две rovnice predstavujú dve podmienky pre koeficienty a , b . Ich riešením dostávame:

$$a = \pm \beta, \quad b = \pm \frac{\beta v}{c}.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že sú prípustné buď obe znamienka kladné alebo obe záporné. Pre jednotkový vektor i' takto dostávame:

$$i' = \pm \beta \left(i + i \frac{v}{c} \right). \quad (13)$$

Pri zmenšovaní rýchlosti v na nulu prechádza i' v i . Z toho je jasné, že znamienko vo vyjadrení rozhoduje len o orientácii osi X' vzhľadom na os X systému S . Ak sa rozhodneme kladné hodnoty x' počítať súhlasne ako pri osi X , potom musíme voliť znamienko kladné.

Podobným obratom, ako sme odvodili z vyjadrenia jednotkového vektora i' transformačný vzorec pre čas, môžeme z vyjadrenia jednotkového vektora i' odvodiť transformačný vzorec pre x -ovú súradnicu. Vychádza:

$$x = \beta \left(x + \frac{v}{c} ict \right) = \beta(x - vt). \quad (14b)$$

6. Теорема о складаніі рѣхлости

Nech je rýchlosť pohybu bodu v systave S' $w' = \frac{dr'}{dt'}$, v systave S $w = \frac{dr}{dt}$. Rýchlosť pohybu sústavu S' vzhľadom na sústavu S nech je v . Potom vzťah medzi rýchlosťami w a w' je podľa rovnice (11a)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{dr'}{dt'} \cdot \frac{D^*}{D} \quad (14)$$

Podľa rovnice (10b) však je:

$$ict' = ict - (r + ict) \cdot D^*.$$

Vynásobením tejto rovnice vektorom i' dostaneme:

$$i' = \beta t - \beta \frac{r \cdot V}{c^2}$$

a konečne derivovaním podľa nečiarokovaného času

$$\frac{di'}{dt} = \beta \left(1 - \frac{v \cdot w}{c^2} \right).$$

Dosađením tohto vzťahu do rovnice (14) pre rýchlosť w uyrľуva:

$$w = w' \beta \left(1 - \frac{v \cdot w}{c^2} \right) - w^* \cdot D^*, \quad (15a)$$

kde sme označili $w^* = w + ict$ alebo:

$$w^* = \frac{w + w^* \cdot D^*}{\beta \left(1 - \frac{v \cdot w}{c^2} \right)}. \quad (15b)$$

Postupným násobením posledného vzorca jednotkovými vektormi i' , j' , k' by sme dostali vzorec pre transformovanie zložiek rýchlosti.

Zároveň ďakujem s. akademikovi П. Ковічові, z ktorého podniknu práca vznikla, za radu a príromienku, ktoré mi pri písaní článku poskytol.

Došlo 12. VI. 1954.

*Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava*

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Раѣвскіі, Риманова геометрія і тензорній анализ, Gostechizdat 1953.
2. L. Landau a E. Lifšic, Теорія поля, Gostechizdat 1949. 3. Д. П. Ковіч, Векторову роѣт, SVŠT 1945.

ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЕМ

ЮЛИУС КРЕМПАСКИ

Выводы

В статье выводятся при помощи векторного и тензорного анализа основные трансформационные формулы специальной теории относительности, относящиеся к пространственному разлцу — вектору и времени. Введено понятие тензора деформации пространства и времени движением аналогично к тензору деформации при однородной деформации твердого тела. При помощи этого тензора деформации выводятся потом общие формулы для контракции длины и дилатации времени. В статье также показывается, что известные, методом компонентыв выведенные формулы для трансформации координат и скорости, вытекают из общих формул в качестве частного случая.