O POUŽÍVANÍ IMAGINÁRNYCH SÚRADNÍC V GEOMETRII MINKOWSKÉHO ŠTVORROZMERNÉHO ČASOPRIESTORU

JOZEF GARAJ

Úvod

V predchádzajúcej práci[1] boli zavedené niektoré pojmy a odvodené niektoré vzťahy vo vektorovej algebre Minkowského štvorrozmerného časopriestoru. Vzťahy tu vystupujúce postrádajú určitú symetriu, čo je spôsobené tým, že jednotkové vektory ortogonálneho vzťažného systému spĺňajú rovnice

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1, \qquad \mathbf{i}_4 \cdot \mathbf{i}_4 = -1.$$

Tieto rôzne vlastnosti jednotkových vektorov sa prejavujú tiež, často veľmi nemilo, pri vedení dôkazov rôznych viet. Cieľom tejto práce je vylúčiť nesymetriu zavedením imaginárnych súradníc vektorov. Napriek tomu, že Minkowského štvorrozmerný časopriestor je reálny, využívajú sa tu objektívne fyzikálne požiadavky kladené na pojem vektora a zavedením imaginárnych súradníc vektora v Minkowského štvorrozmernom časopriestore získajú dôkazy a dosiahnuté vzťahy na prehľadnosti.

I.

§ 1.

V citovanej práci polohový vektor bodovej udalosti bol v Minkowského časopriestore písaný v tvare:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 + ct\mathbf{i}_4,$$

kde vektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ sú jednotkové vektory, ktoré tvoria ortogonálny systém, x, y, z, ct sú reálne súradnice vektora $\mathbf{r}$ (vo pseudoeuklídovskom reálnom priestore indexu 1). Odlišná vlastnosť jednotkového vektora $\mathbf{i}_4$ voči ostatným, t. j. $\mathbf{i}_4 \cdot \mathbf{i}_4 = -1$, vnáša do výpočtov určitú nesymetriu. Pre konkrétnosť uvedieme niekoľko príkladov.

[1] Jozef Garaj, Príspevok ku výstavbe vektorovej algebry v Minkowského štvorrozmernom časopriestore, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, V, 22, 1955.

1. Ak $\|A_l^k\|$ je matica ortogonálnych transformácií

$$\mathbf{i}'_l = A_l^k \mathbf{i}_k,$$

ku nej inverzná matica $\|A_k'^l\|$ súvisí s pôvodnou podľa rovnice:

$$\begin{Vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1'^1 & A_1'^2 & A_1'^3 & -A_1'^4 \\ A_2'^1 & A_2'^2 & A_2'^3 & -A_2'^4 \\ A_3'^1 & A_3'^2 & A_3'^3 & -A_3'^4 \\ -A_4'^1 & -A_4'^2 & -A_4'^3 & A_4'^4 \end{Vmatrix}. \tag{1.1}$$

Nesymetria teda vystupuje v poslednom riadku a stĺpci.

2. Komplementárny súčin $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ dvoch vektorov v štvorrozmernom priestore, definovaný pomocou súčinu antisymetrického $\mathbf{a} \veebar \mathbf{b}$ tých istých vektorov dvojnásobným skalárnym násobením antisymetrickou tenzorovou jednotkou $\mathbf{K}$, t. j. rovnicou

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -1/2\,(\mathbf{a} \veebar \mathbf{b}) : e^{pqrs}\,\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s \tag{1.2}$$

je určený determinantom

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Nesymetria vystupuje v znamienku štvrtých súradníc vektorov.

3. Nepríjemný vplyv nesymetrie sa objaví najmä pri hľadaní duálneho tenzora k tenzoru $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Podľa vymedzenia pojmu duálnosti v predošlom odseku nájde sa duálna veličina ku danej toľkonásobným skalárnym násobením danej veličiny antisymetrickou tenzorovou jednotkou (stupňa podľa rozmernosti priestoru), ktorého stupňa je daná veličina. Konkrétne, rovnica (1.2) definuje duálnu veličinu k antisymetrickému súčinu $\mathbf{a} \veebar \mathbf{b}$ v štvorrozmernom priestore.

Ukázalo sa, že súradnice tenzora $\mathbf{a} \veebar \mathbf{b}$ súvisia so súradnicami tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ podľa pravidla:

Súradnica pri diáde $\mathbf{i}_k\,\mathbf{i}_l$ tenzora $\mathbf{a} \veebar \mathbf{b}$ je súradnicou pri diáde $\mathbf{i}_m\,\mathbf{i}_n$ tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pričom k, l, m, n je párnou permutáciou čísel 1, 2, 3, 4. V tom prípade však, ak jedno z čísel k, l sa rovná číslu 4, mení sa znamienko pri príslušnej súradnici tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Schematicky bolo toto pravidlo výmien zapísané v tvare:

$$\mathbf{i}_k\,\mathbf{i}_l \xrightarrow[-]{+} \mathbf{i}_m\,\mathbf{i}_n, \tag{1.4}$$

pričom teda znamienko — platí v prípade, ak k alebo l je rovné číslu 4.

Nesymetria znamienková je dôsledkom odlišnej vlastnosti vektora $\mathbf{i}_4$ od jednotkových vektorov $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Silnejšie však táto nesymetričnosť vynikne vtedy, ak pomocou antisymetrickej tenzorovej jednotky **K** chceme prejsť od tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ k tenzoru $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$, resp. inými slovami, pri hľadaní duálnej veličiny k veličine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Priamo z (1.4) ľahko nahliadneme, že výsledkom tejto operácie je tenzor $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ s opačným znamienkom. Kým totiž súradnica pri diáde $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$ tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ je po uvedenej operácii súradnicou tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pri diáde $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$ s príslušným znamienkom, pri tej istej operácii, vedenej v opačnom smere, súradnica tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pri diáde $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$ je opäť súradnicou tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ pri diáde $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$, avšak teraz s opačným znamienkom, pretože medzi číslami k, l, m, n sa nachádza číslo 4 buď vo dvojici k, l alebo m, n; keď sa nachádza v jednej, v druhej nie je a naopak. Teda platí:

$$\left.\begin{aligned} -1/2\,(\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}) : \mathbf{K} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ -1/2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) : \mathbf{K} &= -\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b} \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Nesymetria sa tu prejavuje opäť tým, že dvojnásobnou aplikáciou antisymetrickej tenzorovej jednotky na tenzor $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ nevraciame sa k pôvodnému tenzoru, ale k tenzoru so zmeneným znamienkom.

4. Komplementárny súčin jednotkových ortogonálnych vektorov podľa definície je:

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = -1/2\,(\mathbf{i}_k \divideontimes \mathbf{i}_l) : (e^{pqrs}\,\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s),$$

takže je:

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_m \divideontimes \mathbf{i}_n, \qquad (1.6)$$

pričom k, l, m, n je párna permutácia čísel *1, 2, 3, 4* a znamienko + platí v prípade, že ani jedno z čísel k, l nie je rovné číslu 4, znamienko — vtedy, ak jedno z nich je rovné číslu 4.

Analógia „štvorstenového pravidla,"[2] pre komplementárne násobenie jednotkových vektorov $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$ stráca teda v dôsledku znamienkových premien na svojej výraznosti s vektorovým násobením vektorov $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, v trojrozmernom priestore.

5. Uveďme konečne z citovanej práce tieto vzorce:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \end{vmatrix} \qquad (1.7)$$

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{d} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -d_4 \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

[2] Pozri citovanú prácu.

V obidvoch sa prejavuje nesymetričnosť tým, že v poslednom stĺpci príslušných determinantov sa pri súradniciach vektorov vyskytujú záporné znamienka, čo je opäť dôsledkom vlastnosti vektora $\mathbf{i}_4$.

§ 2.

Z uvedených príkladov vidieť, že má určitý význam, a to jednak pre vedenie dôkazov, jednak pre tvar konečných početných výsledkov, vyjadrovať vektory v štvorrozmernom časopriestore pomocou takých ortogonálnych jednotkových vektorov, ktoré by boli navzájom ekvivalentné, totiž, že by súčin každého z nich so samým sebou bol rovný *1*.

Pretože platí $\mathbf{i}_4 \,.\, \mathbf{i}_4 = -1$, tento výsledok formálne dosiahneme vtedy, ak miesto vektora $\mathbf{i}_4$ zavedieme vektor $\mathbf{i}_4^*$ taký, aby bolo:

$$\mathbf{i}_4 = i\,\mathbf{i}_4^*,$$

kde i je imaginárna jednotka. Potom bude $\mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \,.\, \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \,.\, \mathbf{i}_3 = 1$, avšak aj $\mathbf{i}_4^* \,.\, \mathbf{i}_4^* = (-i\,\mathbf{i}_4) \,.\, (-i\,\mathbf{i}_4) = -\mathbf{i}_4 \,.\, \mathbf{i}_4 = 1$.

Zavedením vektora $\mathbf{i}_4^*$ polohový vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 + ct\mathbf{i}_4$$

prejde do tvaru:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 + ict\mathbf{i}_4^*, \qquad (1.9)$$

takže vzhľadom na ortogonálny systém $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4^*$, ktorý je priradený systému $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$, polohový vektor má aj imaginárnu súradnicu.

V ďalšom vektory $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4^*$ budeme pre rozlíšenie písať pomocou symbolov $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_3$, $\mathbf{j}_4$. Tieto teda spĺňajú vzťahy $\mathbf{j}_k \,.\, \mathbf{j}_l = 1$, ak $k = l$, $\mathbf{j}_k \,.\, \mathbf{j}_l = 0$, ak $k \neq l$. Polohový vektor (1.9) bude:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{j}_1 + y\mathbf{j}_2 + z\mathbf{j}_3 + ict\mathbf{j}_4. \qquad (1.10)$$

Vektorom v Minkowského štvorrozmernom časopriestore budeme nazývať násobok polohového vektora:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 + ct\mathbf{i}_4$$

reálnou skalárnou veličinou a pre vykonávanie výpočtov polohový vektor vyjadríme formálne pomocou vektorov $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_3$, $\mathbf{j}_4$ v tvare (1.10).

Z významu koeficientov vo výraze (1.10) je zrejmé, že takáto štvorica vektorov $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_3$, $\mathbf{j}_4$ nie je jediná. Dokážeme teraz, že vo vyjadrení vektora pomocou ľubovoľnej inej ortogonálnej štvorice takýchto vektorov pri vhodnej voľbe ich poradia opäť len štvrtá súradnica vektora bude imaginárna. Predtým urobme ešte takúto poznámku:

Vektor

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{j}_1 \, [\text{resp. } \mathbf{r}_2 = y\mathbf{j}_2, \quad \mathbf{r}_3 = z\mathbf{j}_3, \quad \mathbf{r}_4 = iu\mathbf{j}_4]$$

budeme nazývať súhlasne rovnobežným s vektorom $\mathbf{j}_1$ (resp. s vektorom $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_3$, $\mathbf{j}_4$,) ak číslo x (resp. y, z, u) je kladné reálne číslo. Potom však je:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = x^2, \text{ t. j. } x = +\sqrt{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1},$$

takže je:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}. \tag{1.11}$$

Podobne môžeme vyjadriť aj ostatné jednotkové vektory:

$$\mathbf{j}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{\sqrt{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}, \quad \mathbf{j}_3 = \frac{\mathbf{r}_3}{\sqrt{\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3}}, \quad \mathbf{j}_4 = \frac{\mathbf{r}_4}{\sqrt{\mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{r}_4}}. \tag{1.12}$$

Zvoľme teraz v Minkowského štvorrozmernom časopriestore štyri navzájom kolmé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Symbolom $\mathbf{v}_4$ zapíšme pritom ten z týchto vektorov, ktorého skalárny súčin so samým sebou dáva záporné číslo, t. j. platí $\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_4 < 0$[3], a píšme ich v tvare (1.10),

$$\mathbf{v}_k = a_{k1}\mathbf{j}_1 + a_{k2}\mathbf{j}_2 + a_{k3}\mathbf{j}_3 + ia_{k4}\mathbf{j}_4, \qquad (\text{pre } k = 1, 2, 3, 4).$$

V smere týchto vektorov určíme teraz jednotkové vektory $\mathbf{j}'_1, \mathbf{j}'_2, \mathbf{j}'_3, \mathbf{j}'_4$, a to podľa vzorcov (1.11), resp. (1.12) takto:

$$\mathbf{j}'_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}}, \quad \mathbf{j}'_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}}, \quad \mathbf{j}'_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}}, \quad \mathbf{j}'_4 = \frac{\mathbf{v}_4}{\sqrt{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_4}} \tag{1.13}$$

Ak v týchto výrazoch zavedieme $\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = A_1$, $\sqrt{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = A_2$, $\sqrt{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} = A_3$, $\sqrt{v_4 \cdot v_4} = iA_4$, dostaneme takýto súvis jednotkových vektorov $\mathbf{j}'_1, \mathbf{j}'_2, \mathbf{j}'_3, \mathbf{j}'_4$ s pôvodnými $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}'_1 &= b_{11}\mathbf{j}_1 + b_{12}\mathbf{j}_2 + b_{13}\mathbf{j}_3 + ib_{14}\mathbf{j}_4 \\ \mathbf{j}'_2 &= b_{21}\mathbf{j}_1 + b_{22}\mathbf{j}_2 + b_{23}\mathbf{j}_3 + ib_{24}\mathbf{j}_4 \\ \mathbf{j}'_3 &= b_{31}\mathbf{j}_1 + b_{32}\mathbf{j}_2 + b_{33}\mathbf{j}_3 + ib_{34}\mathbf{j}_4 \\ \mathbf{j}'_4 &= -ib_{41}\mathbf{j}_1 - ib_{42}\mathbf{j}_2 - ib_{43}\mathbf{j}_3 + b_{44}\mathbf{j}_4 \end{aligned}\right\}, \tag{1.14}$$

kde

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{A_1}, \quad \ldots \; b_{44} = \frac{a_{44}}{A_4}.$$

---

[3] Podľa známej vety (pozri napr. P. K. Raševskij, *Rimannova geometria i tenzornyj analiz*, Moskva 1953, H. V. Craig, *Vector and Tenzor Analysis*, New York—London 1943) zo štyroch navzájom kolmých vektorov v Minkowského štvorrozmernom časopriestore je takýto vektor len jeden.

Pretože teraz $\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_3 \cdot \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_4 \cdot \mathbf{j}_4 = 1$, matica transformácií (1,14) je ortogonálna a jej inverznú maticu dostaneme jednoducho transponovaním pôvodnej. Determinant transformácií je $\pm\, 1$. Teda je:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= b_{11}\mathbf{j}'_1 + b_{21}\mathbf{j}'_2 + b_{31}\mathbf{j}'_3 - ib_{41}\mathbf{j}'_4 \\ \mathbf{j}_2 &= b_{12}\mathbf{j}'_1 + b_{22}\mathbf{j}'_2 + b_{32}\mathbf{j}'_3 - ib_{42}\mathbf{j}'_4 \\ \mathbf{j}_3 &= b_{13}\mathbf{j}'_1 + b_{23}\mathbf{j}'_2 + b_{33}\mathbf{j}'_3 - ib_{43}\mathbf{j}'_4 \\ \mathbf{j}_4 &= ib_{14}\mathbf{j}'_1 + ib_{24}\mathbf{j}'_2 + b_{34}\mathbf{j}'_3 + b_{44}\mathbf{j}'_4 \end{aligned}\right\}. \tag{1.15}$$

Ľubovoľný polohový vektor

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{j}_1 + y\,\mathbf{j}_2 + z\,\mathbf{j}_3 + ict\,\mathbf{j}_4$$

v novom systéme bude mať tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = {} & (xb_{11} + yb_{12} + zb_{13} - ctb_{14})\mathbf{j}'_1 + \\ & + (xb_{21} + yb_{22} + zb_{23} - ctb_{24})\mathbf{j}'_2 + \\ & + (xb_{31} + yb_{32} + zb_{33} - ctb_{34})\mathbf{j}'_3 - \\ & - i(xb_{41} + yb_{42} + zb_{43} - ctb_{44})\mathbf{j}'_4, \end{aligned}$$

t. j.

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{j}'_1 + y'\mathbf{j}'_2 + z'\mathbf{j}'_3 + iu'\mathbf{j}'_4,$$

pričom x', y', z', u' sú reálne čísla.

Príklad:

O vektoroch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 - i\mathbf{j}_4 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{j}_1 + 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{j}_2 - 4\mathbf{j}_3 + 2i\mathbf{j}_4 \\ \mathbf{v}_4 &= -\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3 + 3i\mathbf{j}_4 \end{aligned}$$

sa ľahko zistí, že tvoria ortogonálny systém, a že pre ne platí:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 6, \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 16, \quad \mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_4 = -6.$$

Majme okrem toho polohový vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 + i\mathbf{j}_4 \tag{1.16}$$

a hľadajme jeho vyjadrenie v novom systéme určenom vektormi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

Ak jednotkové vektory nového systému opäť označíme $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4$, potom podľa (1.14), resp. (1.15) platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}'_1 &= \mathbf{j}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{j}_2 + 0\,\mathbf{j}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{j}_4, \\ \mathbf{j}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_3 + 0\,\mathbf{j}_4, \\ \mathbf{j}'_3 &= 0\,\mathbf{j}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3 + \frac{i}{2}\mathbf{j}_4, \\ \mathbf{j}'_4 &= \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_1 - \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_2 + \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_3 + \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{j}_4. \end{aligned}$$

Determinant transformácie je -1 a ľahko sa zistí, že je práve taký ako determinant transformácie medzi systémami vektorov $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4; \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3, \mathbf{i}'_4$.

Inverzné transformačné vzťahy sú:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{j}_1 &= \quad \mathbf{j}'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_2 + 0\,\mathbf{j}'_3 + \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_4\\
\mathbf{j}_2 &= -\frac{1}{2}\mathbf{j}'_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_2 + \frac{1}{2}\mathbf{j}'_3 - \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_4\\
\mathbf{j}_3 &= \quad 0\,\mathbf{j}'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_2 - \mathbf{j}'_3 + \frac{i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_4\\
\mathbf{j}_4 &= -\frac{i}{2}\mathbf{j}'_1 + 0\quad i\mathbf{j}'_2 + \frac{i}{2}\mathbf{j}'_3 + \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_4
\end{aligned}
$$

Polohový vektor (1.16) v novom ortogonálnom systéme je vyjadrený rovnicou

$$\mathbf{r} = \mathbf{j}'_1 + \frac{4}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_2 - \mathbf{j}'_3 + \frac{4i}{\sqrt{6}}\mathbf{j}'_4 .$$

II.

§ 1.

Antisymetrický súčin dvoch vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ v štvorrozmernom časopriestore bol definovaný ako tenzor $\mathbf{b}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathbf{b}$ a označený znakom $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$. Z tejto definície je zrejmé, že na vyjadrenie tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ nové zapísanie vektorov nemá žiaden vplyv. Teda je: (2.1)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b} = \quad & 0 \quad + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3 + (a_4b_1 - a_1b_4)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_4\\
& (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_1 \qquad\qquad (a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_3 + (a_4b_2 - a_2b_4)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_4\\
& (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_2 \qquad\qquad (a_4b_3 - a_3b_4)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_4\\
& (a_1b_4 - a_4b_1)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_1 + (a_2b_4 - a_4b_2)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_2 + (a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_3 .
\end{aligned}
$$

Tiež zrejme bez zmeny zostávajú početné pravidlá pre antisymetrický súčin, a to: neplatnosť zákona komutatívneho, zákon distributívny a zákon asociatívny (pre násobenie skalárom).

§ 2.

Bez zmeny zostáva tiež definícia antisymetrickej tenzorovej jednotky

$$\mathbf{K} = \pm\, e^{ijkl}\mathbf{j}_i\mathbf{j}_j\mathbf{j}_k\mathbf{j}_l . \tag{2.2}$$

Tenzor $\mathbf{K}$ je invariantom, pretože po transformácii

$$\mathbf{j}'_i = a^n_i\mathbf{j}_n$$

je:

$$\mathbf{K}' = \pm\, e^{pqrs}\,|a^n_i|\,\mathbf{j}_p\mathbf{j}_q\mathbf{j}_r\mathbf{j}_s .$$

Hodnota determinantu $|a^n_i|$ nezávisí, ako sme ukázali, od nového vyjadrenia vektorov a rovná sa $+1$, ak orientácia nového systému (čiarkovaného) je zhodná s orientáciou systému za základ zvoleného a rovná sa -1 v opačnom prípade, takže skutočne je:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}.$$

§ 3.

Uvažujme teraz o komplementárnom súčine $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ dvoch vektorov $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ v štvorrozmernom časopriestore. Definíciou bolo zavedené

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\,1/2\,(\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2) : (\pm\, e^{pqrs}\mathbf{j}_p\mathbf{j}_q\mathbf{j}_r\mathbf{j}_s). \tag{2.3}$$

Pretože však

$$\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2 = e^{ij}a^l_j\,a^k_i\mathbf{j}_l\mathbf{j}_k ,$$

po dvojnásobnom skalárnom násobení (2.3), a to so zložkami

$$\mathbf{j}_k\mathbf{j}_l\mathbf{j}_m\mathbf{j}_n;\quad -\mathbf{j}_k\mathbf{j}_l\mathbf{j}_n\mathbf{j}_m;\quad \mathbf{j}_l\mathbf{j}_k\mathbf{j}_n\mathbf{j}_m;\quad -\mathbf{j}_l\mathbf{j}_k\mathbf{j}_m\mathbf{j}_n$$

tenzora $\mathbf{K}$, pričom k, l, m, n je párna permutácia indexov *1, 2, 3, 4*, dostaneme postupne výsledky:

$$
\begin{aligned}
-1/2\,\{\pm\, e^{ij}a^l_ja^k_i(\mathbf{j}_m\mathbf{j}_n - \mathbf{j}_n\mathbf{j}_m) \pm e^{ij}a^k_ja^l_i(\mathbf{j}_n\mathbf{j}_m - \mathbf{j}_m\mathbf{j}_n)\} &=\\
= \mp 1/2\, e^{ij}(a^k_ja^l_i - a^l_ja^k_i)\,(\mathbf{j}_n\mathbf{j}_m - \mathbf{j}_m\mathbf{j}_n). &
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Ak za k, l volíme postupne čísla *1,2*; *1,3*; *1,4*; *2,3*; *2,4*; *3,4* a indexy m, n volíme príslušne tak, aby permutácie k, l, m, n vo výsledku (2,4) boli vždy párne, dostaneme:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \pm \begin{vmatrix} a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 & a^4_2\\ a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 & a^4_1\\ \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{j}_4\\ \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{j}_4 \end{vmatrix} . \tag{2.5}$$

Komplementárny súčin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ sa teda teraz javí oproti výrazu (1.3) symetrickým. Pred determinantom vo výraze (2.5) platí znamienko $+$ alebo $-$, a to podľa toho, či súčin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ je vyjadrený v systéme zhodne orientovanom so základným alebo v systéme inom.

Tenzor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ možno teda rozpísať do tvaru:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \quad & 0 + (a_4b_3 - a_3b_4)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 + (a_2b_4 - a_4b_2)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3 + (a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{j}_1\mathbf{j}_4 +\\
+ (a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_1 + \quad & 0 \quad + (a_4b_1 - a_1b_4)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j}_2\mathbf{j}_4 +\\
+ (a_4b_2 - a_2b_4)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_1 + (a_1b_4 - & a_4b_1)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_2 + \quad 0 \quad + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathbf{j}_3\mathbf{j}_4 +\\
+ (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_1 + (a_3b_1 - & a_1b_3)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{j}_4\mathbf{j}_3 .
\end{aligned}
$$

§ 4.

Rovnicou (2.3) bol zavedený tenzor $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ duálny k tenzoru $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$. Hľadajme teraz tenzor duálny k tenzoru $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Porovnaním tenzora (2.1) s tenzorom (2.6) vidíme, že operácia

$$-\,1/2\,[\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}] : \mathbf{K} \tag{2.7}$$

má za následok určité výmeny súradníc tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$, a to podľa pravidla, ktoré, schematicky zapísané je:

$$\mathbf{j}_k\mathbf{j}_l \rightarrow \mathbf{j}_m\mathbf{j}_n ,$$

a ktoré vyjadruje, že súradnica pri diáde $\mathbf{j}_k\mathbf{j}_l$ tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ operáciou (2.7) stane sa súradnicou diády $\mathbf{j}_m\mathbf{j}_n$ tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pričom k, l, m, n je párnou permutáciou čísel 1, 2, 3, 4. Obrátene pri prechode od tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ operáciou (2.7) dostaneme sa teda zrejme opäť k tenzoru $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$, a to súhlasne aj čo do znamienka. Teda celkove platí:

$$\left.\begin{aligned} -1/2\,(\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}) : \mathbf{K} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ -1/2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) : \mathbf{K} &= \mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b} \end{aligned}\right\} . \tag{2.8}$$

Tieto výrazy sa oproti výrazom (1.5) vyznačujú plnou požadovanou symetriou.

§ 5.

Všimnime si komplementárny súčin jednotkových ortogonálnych vektorov. Podľa definície platí (v systéme za základ zvolenom alebo súhlasne orientovanom)

$$\mathbf{j}_k \times \mathbf{j}_l = -1/2\,(\mathbf{j}_k \divideontimes \mathbf{j}_l) : (e^{pqrs}\,\mathbf{j}_p\mathbf{j}_q\mathbf{j}_r\mathbf{j}_s).$$

V tomto násobení pre určité pevne zvolené k, l dostaneme od nuly rôzne výsledky len od tých členov tenzora $\mathbf{K}$, ktorých indexy tvoria permutácie k, l, m, n; k, l, n, m; l, k, n, m; l, k, m, n. Nech permutácia k, l, m, n je párna. Naznačeným násobením pre pevne zvolené k, l dostaneme výsledok:

$$(\mathbf{j}_n\mathbf{j}_m - \mathbf{j}_m\mathbf{j}_n) = \mathbf{j}_m \divideontimes \mathbf{j}_n .$$

Tým je dokázaný vzťah:

$$\mathbf{j}_k \times \mathbf{j}_l = \mathbf{j}_m \divideontimes \mathbf{j}_n. \tag{2.9}$$

Poslednú rovnicu treba v podstate považovať za predpis pre komplementárne násobenie jednotkových vektorov ortogonálneho základného systému alebo systému so základným súhlasne orientovaného a je zrejmé, že oproti rovnici (1.6) sa vyznačuje opäť úplnou symetriou.

§ 6.

Jednoducho sa tiež presvedčíme o platnosti týchto vzorcov:

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{j}_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \\ [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{d} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

K dôkazu stačí použiť vyjadrenie tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vo forme determinantu (2.5) a vykonať s ním príslušné skalárne násobenie. K tomu ešte poznamenajme, že pri skalárnom násobení determinantu (2.5) vektorom $\mathbf{c}$ treba skalárne násobiť jeho posledný riadok, pretože v tenzore $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ide o diadické násobenie jednotkových vektorov.

Podobne jednoducho zistíme správnosť týchto výmen medzi komplementárnym a skalárnym násobením vektorov:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = -\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \,.\, \mathbf{a}.$$

Predchádzajúce úvahy dostatočne presvedčujú, že zavedením nových jednotkových ortogonálnych vektorov $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4$ namiesto pôvodných $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ zjednodušuje sa vedenie dôkazov a dostávajú sa prehľadnejšie výsledky.

Došlo 15. I. 1955.

Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

ОБ ПРИМЕНЕНИИ МНИМЫХ КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИИ МИНКОВСКОГО ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ВРЕМЯ-ПРОСТРАНСТВА

ЙОЗЭФ ГАРАЙ

Выводы

В статье автора: „К построению векторной алгебры в четырёхмерном время-пространстве Минковского“ (Matematicko fysikálny časopis SAV, V, 22 1955), введены некоторые понятия и выведены некоторые соотношения с применением векторной алгебры четырёхмерного время-пространства Минковского. Эти соотношения лишены определенной симметрии. Это вызвано тем обстоятельством, что единичные попарно ортогональные вектора удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \,.\, \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \,.\, \mathbf{i}_3 = 1, \qquad \mathbf{i}_4 \,.\, \mathbf{i}_4 = -1.$$

Эти различные свойства единичных векторов оказываются часто весьма неблагоприятными при исполнении доказательств отдельных теорем. В настоящей статье показано, что с применением мнимой координаты времени исполнение доказательств отдельных теорем и полученные результаты являются более наглядными.