# PRÍSPEVOK K TEÓRII EULEROVSKÝCH POLYÉDROV

ANTON KOTZIG, Bratislava

## 1. Základné pojmy

Nech $\mathfrak{M}$ je konečná neprázdna množina prvkov. Priraďme každému prvku $a \in \mathfrak{M}$ práve jedno z čísel 0, 1, 2. Číslu takto priradenému prvku $a$ budeme hovoriť **rozmer prvku** $a$. Prvkom dvojrozmerným (prvkom rozmeru 2) budeme hovoriť **plochy**, jednorozmerným **hrany**, nulrozmerným **uzly**.

Nech každej (neorientovanej) dvojici prvkov množiny $\mathfrak{M}$, ktoré sú rôzneho rozmeru, je priradené práve jedno z čísel 0, 1 a nech o tomto zobrazení $\varphi$ platí:

(*) Ak $a$, $b$ sú ľubovoľné dva prvky rôzneho rozmeru z $\mathfrak{M}$, potom je buď

$$\varphi(a, b) = \varphi(b, a) = 1$$

alebo je:

$$\varphi(a, b) = \varphi(b, a) = 0.$$

(**) Ak $u$ je uzol, $h$ hrana, $p$ plocha z množiny $\mathfrak{M}$ a platí:

$$\varphi(u, h) = 1; \quad \varphi(h, p) = 1;$$

potom platí aj

$$\varphi(u, p) = 1.$$

O dvoch prvkoch $a, b \in \mathfrak{M}$ budeme hovoriť, že sú **incidentné** práve vtedy, ak sú rôzneho rozmeru a platí:

$$\varphi(a, b) = 1.$$

Množina $\mathfrak{M}$, pre ktorú je daný rozklad na triedy prvkov rozmeru 0, 1, 2 a dané zobrazenie $\varphi$ o vlastnostiach (*), (**), nazýva sa **usporiadaným komplexom**.

O postupnosti $n$ ($n \geq 2$) prvkov usporiadaného komplexu $\mathfrak{M}$ $a_1 a_2, \ldots, a_n$ hovoríme, že tvorí **cestu vedúcu** z $a_1$ do $a_n$, keď prvok $a_i$ je incidentný s prvkom $a_{i+1}$ (pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n - 1$). O dvoch prvkoch $a, b \in \mathfrak{M}$ hovoríme, že **súvisia**, ak existuje cesta, ktorá vedie z $a$ do $b$. Okrem toho platí, že každý prvok $\in \mathfrak{M}$ súvisí sám so sebou.

O usporiadanom komplexe $\mathfrak{M}$ hovoríme, že je **súvislý**, ak každá dvojica jeho prvkov súvisí. Usporiadaný komplex $\mathfrak{M}$ nazýva sa **dokonale súvislým**, ak má tieto vlastnosti:

($\alpha$) $\mathfrak{M}$ obsahuje najmenej jeden uzol, jednu hranu, jednu plochu.

($\beta$) $\mathfrak{M}$ je súvislý.

($\gamma$) Ak $a$ je uzol alebo plocha z $\mathfrak{M}$, potom množina prvkov z $\mathfrak{M}$ incidentných s $a$ je súvislý komplex.

Pod **polyedrickým uzavretým komplexom** rozumieme usporiadaný komplex, ktorý spĺňa tieto podmienky:

(a) Každá hrana je incidentná práve s dvoma uzlami a práve s dvoma plochami.

(b) Ku každej incidentnej dvojici, pozostávajúcej z uzla $u$ a plochy $p$, existujú práve dve také hrany $h_1$, $h_2$ komplexu, ktoré sú incidentné aj s $u$ aj s $p$.

(c) V komplexe sa nevyskytuje taký uzol, resp. taká plocha, ktorá by nebola incidentná so žiadnou hranou.

Nech $\mathfrak{M}$ je polyedrický, uzavretý, dokonale súvislý komplex (t. j. nech $\mathfrak{M}$ je tzv. normálny komplex — pozri Steinitz, „Vorlesungen über die Theorie der Polyeder“ Berlin 1934, str. 113). Ak o počte jeho uzlov $\mu(U)$, hrán $\mu(H)$, plôch $\mu(P)$ platí:

$$\mu(U) - \mu(H) + \mu(P) = 2,$$

potom hovoríme, že $\mathfrak{M}$ je **eulerovský komplex**.

Nech $\mathfrak{M}$ je ľubovoľný polyedrický, uzavretý, dokonale súvislý komplex, $h_{1,2}$ pevne zvolená jeho hrana, ktorá je incidentná s uzlami $u_1$, $u_2$ a s plochami $p$, $p'$ (teda tiež plocha $p$ je incidentná s uzlom $u_2$). Podľa definície polyedrického komplexu [vlastnosť (b)] existuje ešte práve jedna hrana (označme ju $h_{2,3}$), ktorá je incidentná aj s $u_2$ aj s $p$. Hrana $h_{2,3}$ je však okrem uzla $u_2$ incidentná ešte práve s jedným uzlom $u_3$. Ak túto úvahu opakujeme po konečnom počte krokov, bude $u_{n+1} = u_1$, t. j. dostaneme istú postupnosť:

$$u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, u_3, \ldots, u_n, h_{n,1},$$

kde $u_i$ sú uzly, $h_{i,i+1}$ (kde $h_{n,n+1} = h_{n,1}$) sú hrany komplexu $\mathfrak{M}$ všetky incidentné s plochou $p$, pričom hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná s uzlami $u_i$, $u_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; kladieme $u_{n+1} = u_1$). V eulerovskom komplexe prvky takejto postupnosti sú všetky rôzne a tvoria množinu $K$ všetkých prvkov z $\mathfrak{M}$ incidentných s $p$. Množina $K$ je v tomto prípade usporiadaným komplexom (súvislým) bez plôch, kde každý uzol je incidentný práve s dvoma hranami. Takémuto komplexu (pri pevne zvolenej ploche $p$ jednoznačne určenému) hovoríme **elementárny kruh incidentný s plochou** $p$.

Plocha $p$, ktorá je incidentná s elementárnym kruhom o $n$ hranách (resp. o $n$ uzloch), hovorí sa často **$n$-uholník**. Teda v eulerovskom komplexe každá plocha je $n$-uholník, kde $n > 1$.

Názov $n$-uholník súvisí s ďalším názvom, prevzatým z geometrie (pritom



opäť ide len o názov: pojmom plocha, hrana, uzol, kruh tiež neprisudzujeme bežný geometrický obsah).

Incidentná dvojica v polyedrickom komplexe, pozostávajúca z uzla $u$ a plochy $p$, nazýva sa **uhlom**, $u$ nazýva sa vrcholom uhla, $p$ plochou uhla. Dvojici hrán incidentnej s $u$ aj $p$ hovoríme ramená uhla.

Pod **cyklom $C$ incidentným s uzlom $u$** v polyedrickom uzavretom, dokonale súvislom komplexe rozumieme komplex pozostávajúci z hrán a plôch incidentných s uzlom $u$. Obdobná úvaha, akú sme použili pri odvodzovaní pojmu $n$-uholníka, ukazuje, že cyklus incidentný s uzlom $u$ v eulerovskom komplexe možno opísať istou postupnosťou:

$$p_1, h_{1,2}, p_2, h_{2,3}, \ldots, p_n, h_{n,1};$$

v ktorej sa vyskytujú všetky prvky incidentné s $u$, pričom každá hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná práve s plochami $p_i$, $p_{i+1}$ cyklu ($i = 1, 2, \ldots, n$; kladieme $h_{n,n+1} = h_{n,1}$; $p_{n+1} = p_1$).

Číslu $\sigma(u)$ (resp. $c(p)$) udávajúcemu počet hrán, s ktorými je incidentný uzol $u$ (resp. plocha $p$), hovoríme tiež **stupeň uzla** $u$ (resp. plochy $p$).

Pod **eulerovským polyédrom** budeme rozumieť eulerovský komplex, ktorý nemá plochu ani uzol druhého stupňa. Pretože eulerovský komplex zrejme nemôže mať plochu ani uzol prvého stupňa (pozri vlastnosť (*b*) polyedrického komplexu), to znamená, že každá plocha, resp. každý uzol eulerovského polyédra je najmenej tretieho stupňa.

## 2. Pomocné vety

Pre usnadnenie ďalšieho postupu odvoďme si niektoré pomocné vety.

**Lemma 1.** *Nech $\mathfrak{P}$ je ľubovoľný eulerovský polyéder, ktorý má aspoň jeden $n$-uholník, kde $n > 3$, potom existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}^*$, ktorý má tieto vlastnosti:*

(a) *$\mathfrak{P}^*$ obsahuje všetky uzly z $\mathfrak{P}$ a len tieto uzly.*

(b) *$\mathfrak{P}^*$ obsahuje všetky hrany z $\mathfrak{P}$.*

(c) *Uzol $u$ a hrana $h$ z $\mathfrak{P}$ sú incidentné v $\mathfrak{P}^*$ práve vtedy, ak sú incidentné v $\mathfrak{P}$.*

(d) *Všetky plochy v $\mathfrak{P}^*$ sú trojuholníky.*

Dôkaz: Označme znakom $\pi_i$ počet $i$-uholníkov polyédra $\mathfrak{P}$, ($i = 3, 4, 5, \ldots$) a označme znakom $\tau(\mathfrak{P})$ číslo takto definované:

$$\tau(\mathfrak{P}) = \pi_4 + 2\pi_5 + 3\pi_6 + \ldots$$

Nahraďme v ľubovoľnom eulerovskom polyédri $\mathfrak{P}$, ktorý obsahuje plochu $n$-tého stupňa ($n > 3$), incidentnú s elementárnym kruhom $K$, túto plochu plochami $p'$, $p''$ takto: 1. k $\mathfrak{P}$ pridáme ďalšiu hranu $h'$, incidentnú s takými dvoma uzlami $u$, $v$, v kruhu $K$, ktorých obe cesty v $K$, vedúce z $u$ do $v$, majú väčší počet hrán ako jednu; 2. plocha $p'$ nech je incidentná s hranou $h'$ a so všetkými prvkami jednej z ciest v $K$, vedúcej z $u$ do $v$; 3. plocha $p''$ nech je incidentná s hranou $h'$ a s prvkami druhej cesty v $K$, vedúcej z $u$ do $v$. Je známe, že takto konštruovaný komplex je opäť eulerovským polyédrom.[1]

Podľa predpokladu je $\tau(\mathfrak{P}) > 0$. Nech teda plocha $p \in \mathfrak{P}$ je $n$-uholník ($n > 3$) incidentný s elementárnym kruhom opísaným postupnosťou jeho uzlov a hrán:

$$u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_n, h_{n,1}$$

(kde hrana $h_{i,j}$ je incidentná s uzlami $u_i$, $u_j$). Utvorme polyéder $\mathfrak{P}'$ takto:

A. Pridajme k polyédru $\mathfrak{P}$ ďalšiu hranu $h_{1,n-1}$ incidentnú s uzlami $u_1$, $u_{n-1}$.

B. Plochu $p$ nahraďme plochami $p'$, $p''$, pričom plocha $p'$ nech je incidentná s hranou $h_{1,n-1}$, s hranami $h_{1,2}, h_{2,3}, \ldots, h_{n-2,n-1}$ a s uzlami $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; plocha $p''$ nech je incidentná s hranou $h_{1,n-1}$ a s hranami $h_{n-1,n}$, $h_{n,1}$, ďalej s uzlami $u_1 u_{n-1}$, $u_n$.

Polyéder $\mathfrak{P}'$ bude mať teda rovnaký počet uzlov ako $\mathfrak{P}$, o jednu hranu a o jednu plochu viac ako $\mathfrak{P}$, teda bude opäť platiť:

$$\mu(U) - [\mu(H) + 1] + [\mu(P) + 1] = 2.$$

Uvážme, že pri utváraní $\mathfrak{P}'$ sa stupeň žiadneho uzla z $\mathfrak{P}$ nezníži ($\mathfrak{P}'$ obsahuje všetky hrany z $\mathfrak{P}$ a má tie isté uzly ako $\mathfrak{P}$ — dokonca pri dvoch uzloch, $u_1$, $u_{n-1}$ sa stupeň zvýši o jednotku). Pokiaľ ide o stupeň plôch, pri utváraní $\mathfrak{P}'$ dochádza k týmto zmenám:

1. ubudne práve jeden $n$-uholník ($\pi'_n = \pi_n - 1$) a 2. pribudne práve $(n-1)$-uholník a pribudne ešte trojuholník.

Teda o čísle $\tau(\mathfrak{P}')$ bude platiť:

$$\tau(\mathfrak{P}') = \sum_{i=4}^{\infty} \pi'_i(i-3) = \sum_{i=4}^{\infty} \pi_i(i-3) + (n-1-3) - (n-3) = \tau(\mathfrak{P}) - 1.$$

Krok, ktorý sme urobili, aby sme prešli od $\mathfrak{P}$ k $\mathfrak{P}'$, možno opakovať (pokiaľ polyéder obsahuje plochu vyššieho stupňa ako tretieho); ukazuje sa teda, že je možné zostrojiť postupnosť eulerovských polyédrov:

$$\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m;$$

[kde $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$; $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1, \ldots, m = \tau(\mathfrak{P})$] takú, že:

1. platí: $\tau(\mathfrak{P}_i) = \tau(\mathfrak{P}_0) - i$,
2. $\mathfrak{P}_i$ obsahuje všetky uzly a len uzly z $\mathfrak{P}$,
3. $\mathfrak{P}_i$ obsahuje všetky hrany z $\mathfrak{P}$,
4. uzol $u$ a hrana $h \in \mathfrak{P}$ sú incidentné v $\mathfrak{P}_i$ práve vtedy, ak sú incidentné v $\mathfrak{P}$.

[1] Vec sa podáva často tak, že ide o rozdelenie $n$-uholníka novou hranou — „uhlopriečkou“ na $m$-uholník a $(n - m + 2)$-uholník ($n > m \geqq 3$) — vyhýbame sa tejto formulácii, pretože snaha po názornosti môže viesť k nedorozumeniu, pokiaľ ide o všeobecnosť pojmov, ktorým dávame názvy prevzaté z geometrie.



Pre $m$-tého člena postupnosti [$m = \tau(\mathfrak{P})$] musí nevyhnutne platiť: $\tau(\mathfrak{P}_m) = \tau(\mathfrak{P}_0) - \tau(\mathfrak{P}) = 0$. To však znamená, že $\mathfrak{P}_m$ nemá plochy vyššieho stupňa ako tretieho, čiže všetky jeho plochy sú trojuholníky, preto $\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}^*$ je polyéder, ktorý má všetky požadované vlastnosti.

**Lemma 2.** *Nech $\mathfrak{P}$ je ľubovoľný eulerovský polyéder, ktorý má aspoň jednu plochu vyššieho stupňa ako tretieho a má túto vlastnosť: ak sčítame stupne tých dvoch uzlov, ktoré sú incidentné s ľubovoľnou hranou $h \in \mathfrak{P}$, tento súčet je vždy väčší ako isté prirodzené číslo $r$. Potom existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}^*$, ktorý má tieto vlastnosti:*

1. *$\mathfrak{P}^*$ obsahuje všetky uzly z $\mathfrak{P}$ a len tieto uzly.*
2. *$\mathfrak{P}^*$ obsahuje všetky hrany z $\mathfrak{P}$.*
3. *Uzol $u$ a hrana $h \in \mathfrak{P}$ sú incidentné v $\mathfrak{P}^*$ práve vtedy, keď sú incidentné v $\mathfrak{P}$.*
4. *Všetky plochy v $\mathfrak{P}^*$ sú trojuholníky.*
5. *Ak sčítame stupne tých dvoch uzlov, ktoré sú incidentné s ľubovoľnou hranou $h \in \mathfrak{P}^*$, tento súčet je vždy väčší ako $r$.*

Dôkaz: V dôkaze lemmy 1 sme ukázali, že ak $\mathfrak{P}$ má aspoň jednu plochu vyššieho stupňa ako tretieho, potom možno zostrojiť postupnosť eulerovských polyédrov $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ [kde $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}$; $m = \tau(\mathfrak{P})$] takú, že ľubovoľný člen postupnosti má vlastnosti 1., 2., 3., pričom číslo $\tau$ sa od člena k členu znižuje, až $\mathfrak{P}_m$ má vlastnosť 4.

Stačí preto dokázať, že ak má člen $\mathfrak{P}_i$ vlastnosť 5., možno vždy člen $\mathfrak{P}_{i+1}$ konštruovať tak, že aj $\mathfrak{P}_{i+1}$ má vlastnosť 5. a ostatné vlastnosti zostanú zachované.

Preveďme dôkaz. Nech $\mathfrak{P}_i$ je $i$-tý člen postupnosti taký, ktorý má vlastnosti 1., 2., 3., 5. a pre ktorý platí:
$\tau(\mathfrak{P}_i) = \tau(\mathfrak{P}) - i$; $i < m$. Teda $\mathfrak{P}_i$ má aspoň jednu plochu $p$ stupňa $n > 3$.

Nech plocha $p$ je incidentná s elementárnym kruhom $K$ opísaným postupnosťou:

$$u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_n, h_{n,1}; \ (n > 3)$$

(kde hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná s uzlami $u_i$, $u_{i+1}$; kladieme $h_{n,n+1} = h_{n,1}$; $u_{n+1} = u_1$).

I. Tvrdím: existuje aspoň jedna dvojica uzlov kruhu $K$ $u_\alpha$, $u_{\alpha+2}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) (kladieme $u_{n+1} = u_1$, ${}_{n+2} = u_2$), o ktorej platí:

$$\sigma(u_\alpha) + \sigma(u_{\alpha+2}) > r.$$

Dôkaz tvrdenia rozdeľme na dve časti:

A. Nech $n = 4$. Podľa predpokladu (pretože uzly $u_i$, $u_{i+1}$ sú incidentné s tou istou hranou) je:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(u_1) + \sigma(u_2) > r \\ \sigma(u_2) + \sigma(u_3) > r \\ \sigma(u_3) + \sigma(u_4) > r \\ \sigma(u_4) + \sigma(u_1) > r \end{array}\right\} \qquad (1)$$

čiže:

$$2\sum_{i=1}^{4}\sigma(u_i) > 4r; \quad \sum_{i=1}^{4}\sigma(u_i) > 2r. \tag{2}$$

Pre nahradenie uvažovaného štvoruholníka dvoma trojuholníkmi pridaním novej hrany máme iba dve možnosti: buď bude nová hrana incidentná s uzlami $u_1, u_3$ alebo s uzlami $u_2, u_4$. Ak by tvrdenie nemalo všeobecnú platnosť, t. j. ak by súčet stupňov pri incidentných uzloch mal byť v $\mathfrak{P}_{i+1}$ v oboch prípadoch menší alebo rovný $r$, znamenalo by to (uvážme, že v uzloch incidentných s novou hranou sa stupeň zvýši), že platí súčasne: $\sigma(u_1) + \sigma(u_3) < r$; $\sigma(u_2) + \sigma(u_4) < r$, čiže: ak sčítame ľavé a pravé strany týchto nerovností, dostávame:

$$\sum_{i=1}^{4}\sigma(u_i) < 2r.$$

To je však spor s (2), preto aspoň jedna z možností pridania hrany (a príslušných plôch $p'$, $p''$) vytvára polyéder $\mathfrak{P}_{i+1}$, ktorý má vlastnosť 5.

B. Nech $n > 4$. Podľa predpokladu platí:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(u_1) + \sigma(u_2) &> r \\ \sigma(u_2) + \sigma(u_3) &> r \\ \sigma(u_3) + \sigma(u_4) &> r \\ \sigma(u_4) + \sigma(u_5) &> r \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

teda:

$$\sigma(u_1) + 2\sigma(u_2) + 2\sigma(u_3) + 2\sigma(u_4) + \sigma(u_5) > 4r. \tag{4}$$

Ak by platilo $2 + \sigma(u_2) + \sigma(u_4) > r$, potom stačí novú hranu voliť tak, aby bola incidentná s uzlami $u_2, u_4$; ak platí $\sigma(u_2) + \sigma(u_4) + 2 \leqq r$, t. j. ak je $2r \geqq 2\sigma(u_2) + 2\sigma(u_4) + 4$; potom nevyhnutne je [pozri (4)]:

$$\sigma(u_1) + 2\sigma(u_3) + \sigma(u_5) > 2r$$

a nemôžu preto súčasne platiť obe tieto nerovnosti: $\sigma(u_1) + \sigma(u_3) \leqq r$; $\sigma(u_3) + \sigma(u_5) \leqq r$; čiže platí aspoň jedna z týchto nerovností: $\sigma(u_1) + \sigma(u_3) > r$; $\sigma(u_3) + \sigma(u_5) > r$. Preto je možné novú hranu voliť tak, že súčet stupňov v incidentných uzloch s novou hranou ($u_1, u_3$ alebo $u_3, u_5$) bude väčší ako $r$. Teda existuje vždy aspoň jedna dvojica uzlov $u_\alpha$, $u_{\alpha+2}$ v $K$, pre ktorú platí:

$$\sigma(u_\alpha) + \sigma(u_{\alpha+2}) > r.$$

II. Ukázali sme, že ak eulerovský polyéder $\mathfrak{P}_i$ má vlastnosť 1., 2., 3., 5. a pritom $\tau(\mathfrak{P}_i) = \tau(\mathfrak{P}) - i$, že existuje potom aj eulerovský polyéder $\mathfrak{P}_{i+1}$, ktorý má vlastnosti 1., 2., 3., 5. a platí: $\tau(\mathfrak{P}_{i+1}) = \tau(\mathfrak{P}) - (i + 1)$. Pretože $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ má uvedené vlastnosti, existuje postupnosť $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$, v ktorej posledný člen $\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}^*$ [$m = \tau(\mathfrak{P})$] má okrem vlastností 1., 2., 3., 5. aj vlastnosť 4., čo bolo treba dokázať.



Pripomeňme si ešte definíciu recipročných polyédrov.

O dvoch eulerovských polyédroch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ hovoríme, že sú k sebe reciproké, keď existuje také prosté zobrazenie polyédra $\mathfrak{P}$ na polyéder $\mathfrak{P}'$, že:

(a) Obrazom uzla $\in \mathfrak{P}$ je plocha $\in \mathfrak{P}'$, obrazom hrany $\in \mathfrak{P}$ je hrana $\in \mathfrak{P}'$, obrazom plochy $\in \mathfrak{P}$ je uzol $\in \mathfrak{P}'$.

(b) Obrazom každej incidentnej dvojice prvkov a len takejto dvojice prvkov $\in \mathfrak{P}$ je incidentná dvojica $\in \mathfrak{P}'$.

Je známe, že ku každému eulerovskému polyédru existuje eulerovský polyéder reciproký.

Uveďme ešte niektoré známe vzťahy v eulerovskom polyédri: Nech $\mathfrak{P}$ je eulerovský polyéder. Ak označíme znakom $\pi_i$ (resp. $\varrho_i$) počet tých plôch (resp. uzlov), ktoré sú stupňa $i$ ($i = 3, 4, \ldots$) a znakmi $\mu(P)$, $\mu(H)$, $\mu(U)$ celkový počet plôch, hrán, uzlov polyédra $\mathfrak{P}$, t. j. ak je:

$$\mu(P) = \sum_{i=3}^{\infty}\pi_i; \quad \mu(U) = \sum_{i=3}^{\infty}\varrho_i, \tag{6}$$

potom platí:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu(H) &= \sum_{i=3}^{\infty} i\pi_i \\ 2\mu(H) &= \sum_{i=3}^{\infty} i\varrho_i \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ukážme teraz, že pomocou lemmy 1 možno ľahko odvodiť túto (známu) vetu:

**Lemma 3.** *Každý eulerovský polyéder má aspoň jednu plochu a aspoň jeden uzol nižšieho stupňa ako šiesteho.*

Dôkaz: I. Tvrdím, že neexistuje taký eulerovský polyéder, ktorého všetky plochy sú trojuholníky a všetky uzly vyššieho stupňa ako piateho. Predpokladajme naopak, že tvrdenie nie je správne a že existuje polyéder $\mathfrak{P}$, ktorého všetky plochy sú trojuholníky a všetky uzly vyššieho stupňa ako piateho. Je teda $\mu(P) = \pi_3$, $2\mu(H) = 3\pi_3$ a pretože ide o eulerovský polyéder, platí: $\mu(U) - \mu(H) + \mu(P) = 2$. Ak do tejto rovnice dosadíme podľa zisteného vzťahu $\mu(P) = \frac{2}{3}\mu(H)$, po úprave dostaneme:

$$6\mu(U) - 2\mu(H) = 12 \tag{8}$$

a po dosadení podľa (6), resp. (7) dostaneme:

$$3\varrho_3 + 2\varrho_4 + \varrho_5 = 12 + \varrho_7 + 2\varrho_8 + \ldots + (k-6)\,\varrho_k + \ldots \tag{9}$$

To je však spor, lebo sme predpokladali, že $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = 0$ a čísla $\varrho_i$ nemôžu byť záporné.

II. Predpokladajme, že existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorý má aspoň jednu plochu vyššieho stupňa ako tretieho a pre ktorý platí: $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = 0$.

Podľa lemmy 1 potom existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}^*$, ktorého všetky plochy sú trojuholníky, má tie isté uzly ako $\mathfrak{P}$ a stupeň uzla v $\mathfrak{P}^*$ nie je nižší ako stupeň toho istého uzla v $\mathfrak{P}$. Je teda opäť $\varrho_3^* = \varrho_4^* = \varrho_5^* = 0$. To je však spor, lebo podľa $I$ nemôže takýto eulerovský polyéder existovať.

III. Predpokladajme, že existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorý nemá plochy nižšieho stupňa ako šiesteho. Potom však existuje polyéder $\mathfrak{P}'$, reciproký k $\mathfrak{P}$, v ktorom všetky uzly sú vyššieho stupňa ako piateho, a to je v rozpore s tým, čo sme dokázali v I. a II. časti dôkazu. Tým je lemma dokázaná.

## 3. Hlavné vety

Nech $h$ je ľubovoľná hrana eulerovského polyédra $\mathfrak{P}$, $u_1, u_2$, uzly $\in \mathfrak{P}$ incidentné s $h$; $p_1, p_2$ plochy incidentné s $h$. Priraďme hrane $h$ číslo $\sigma_u(h)$ a číslo $\sigma_P(h)$ takto:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u(h) &= \sigma(u_1) + \sigma(u_2) \\ \sigma_P(h) &= \sigma(p_1) + \sigma(p_2) \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Teda každej hrane z $\mathfrak{P}$ sú priradené (jednoznačne) dve čísla: súčet stupňov s ňou incidentných uzlov a súčet stupňov s ňou incidentných plôch. Lemma 3 nám hovorí, že v žiadnom eulerovskom polyédri neprekročí stupeň uzla, ktorý má v polyédri najnižší stupeň, číslo 5. Naskytá sa otázka, či existuje obdobné obmedzenie pre minimálny súčet $\sigma_u(h)$, resp. $\sigma_P(h)$ pre hranu eulerovského polyédra. Na túto otázku zodpovedajú vety, ktoré si ďalej dokážeme.

**Veta 1:** *Každý eulerovský polyéder má aspoň jednu hranu $h$, pre ktorú platí $\sigma_u(h) \leqq 13$ a aspoň jednu hranu $h'$, pre ktorú platí $\sigma_P(h') \leqq 13$.*

Dôkaz: I. Tvrdím, že neexistuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorého všetky plochy sú trojuholníky, v ktorom by pre každú hranu $h$ platilo $\sigma_u(h) > 13$.

Predpokladajme, že tvrdenie nie je pravdivé, t. j. že existuje polyéder $\mathfrak{P}$, ktorého všetky plochy sú trojuholníky a pre všetky jeho hrany platí $\sigma_u(h) > 13$. Podržme označenie, ktoré sme zaviedli pri dôkaze lemmy 3. Podľa predpokladu platí:

$$2\mu(H) = 3\pi_3 = 3\mu(P) \tag{11}$$

a po dosadení do rovnice $\mu(U) - \mu(H) + \mu(P) = 2$ dostaneme (ak použijeme rovnice $\mu(U) = \sum_{i=3}^{\infty} \varrho_i$):

$$3\varrho_3 + 2\varrho_4 + \varrho_5 = 12 + \varrho_7 + 2\varrho_8 + \ldots + (k-6)\,\varrho_k + \ldots \tag{12}$$

Uvážme teraz, že ak s istou hranou je incidentný uzol tretieho (resp. štvrtého, resp. piateho) stupňa, potom druhý uzol, s ktorým je táto hrana incidentná, je podľa predpokladu najmenej jedenásteho (resp. desiateho, resp. deviateho) stupňa.



Nech $u_0$ je ľubovoľný uzol stupňa $2k (k > 5)$ a nech jeho cyklus opisuje postupnosť:

$$h_1, p_{1,2}, h_2, p_{2,3}, \ldots, h_{2k}, p_{2k,1}$$

($h_i$ sú hrany, $p_{i,i+1}$ — kladieme $p_{2k,2k+1} = p_{2k,1}$ — trojuholníky). Druhý uzol, s ktorým je incidentná hrana $h_i$ (jedným z uzlov, s ktorými je $h_i$ incidentná, je uzol $u_0$) označme znakom $u_i$. Pretože $\mathfrak{P}$ obsahuje len trojuholníky a teda existujú hrany, ktoré sú incidentné aj s uzlom $u_i$ aj s uzlom $u_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, 2k$, $u_{2k+1} = u_1$), nemôžu žiadne dva susedné členy postupnosti uzlov

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2k}, u_1$$

byť oba tretieho stupňa. Čiže v cykle uzla $u_0$ môže byť najviac $k$ takých hrán, ktoré sú incidentné s uzlom tretieho stupňa.

Z obdobnej úvahy pre ľubovoľný uzol $u_0$ stupňa $2l + 1 \geqq 11$ vyplýva, že v cykle uzla $u_0$ nemôže byť viac takých hrán, ktoré sú incidentné s uzlom tretieho stupňa, ako $l$.

Pre počet $\omega(4, 10)$ takých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom stupňa nižšieho ako štvrtého a s jedným uzlom stupňa vyššieho ako desiateho, vyplýva z našej úvahy nerovnosť:

$$\omega(4, 10) \leqq 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + 7\varrho_{14} + 7\varrho_{15} + \ldots \tag{13}$$

Každý uzol tretieho stupňa je však incidentný práve s tromi hranami, druhý uzol, s ktorým je ľubovoľná z týchto hrán incidentná, je podľa predpokladu najmenej jedenásteho stupňa. Pretože počet uzlov tretieho stupňa je $\varrho_3$, z toho vyplýva (vzhľadom na to, že žiadna hrana nie je incidentná s dvoma uzlami tretieho stupňa):

$$\omega(4, 10) = 3\varrho_3. \tag{14}$$

Obdobnou úvahou úvahe, ktorú sme vykonali, zistíme, že pre počet $\omega(5, 9)$ takých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom nižšieho stupňa ako piateho a s jedným uzlom vyššieho stupňa ako desiateho, platí:

$$\omega(5, 9) \leqq 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + 7\varrho_{14} + 7\varrho_{15} + \ldots, \tag{15}$$

pričom (uvážme, že hrana nemôže byť incidentná s dvoma uzlami nižšieho stupňa ako piateho) platí:

$$\omega(5, 9) = 3\varrho_3 + 4\varrho_4 \tag{16}$$

a napokon pre počet $\omega(6, 8)$ takých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom nižšieho stupňa ako šiesteho a s jedným uzlom stupňa vyššieho ako ôsmeho, vyplýva:

$$\omega(6, 8) \leqq 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + \ldots, \tag{17}$$

pričom

$$\omega(6, 8) = 3\varrho_3 + 4\varrho_4 + 5\varrho_5. \tag{18}$$

Po úprave dostávame:

$$3\varrho_3 \leqq \qquad 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + 7\varrho_{14} + 7\varrho_{15} + \ldots \tag{19}$$

$$3\varrho_3 + 4\varrho_4 \leqq \qquad 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + 7\varrho_{14} + 7\varrho_{15} + \ldots \tag{20}$$

$$3\varrho_3 + 4\varrho_4 + 5\varrho_5 \leqq 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + 7\varrho_{14} + 7\varrho_{15} + \ldots \tag{21}$$

Násobme teraz nerovnosť (19) piatimi, nerovnosť (20) tromi, nerovnosť (21) dvoma a porovnajme súčty ľavých a pravých strán nerovnosti. Dostaneme:

$$30\varrho_3 + 20\varrho_4 + 10\varrho_5 \leqq$$

$$\leqq 8\varrho_9 + 25\varrho_{10} + (50\varrho_{11} + 60\varrho_{12} + 60\varrho_{13} + 70\varrho_{14} + 70\varrho_{15} + \ldots) \tag{22}$$

Podľa (12) však je:

$$30\varrho_3 + 20\varrho_4 + 10\varrho_5 = 120 + 10\varrho_7 + 20\varrho_8 + 30\varrho_9 + 40\varrho_{10} + \ldots \tag{23}$$

čiže (porovnaj (22), (23)):

$$120 + 10\varrho_7 + 20\varrho_8 + 22\varrho_9 + 15\varrho_{10} + 10\varrho_{13} + \sum_{i=14}^{\infty} c_i\varrho_i \leqq 0, \tag{24}$$

kde $c_i$ sú čísla celé, nezáporné. To je však spor, lebo čísla $\varrho_i$ nemôžu byť záporné.

Neexistuje preto eulerovský polyéder, ktorého všetky plochy sú trojuholníkmi a taký, žeby o každej jeho hrane platilo $\sigma_u(h) > 13$.

II. Predpokladajme, že existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorého nie všetky plochy sú trojuholníkmi, pri ktorom o každej jeho hrane platí $\sigma_u(h) > 13$. Podľa lemmy 2 potom existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}^*$, ktorého všetky plochy sú trojuholníky, taký, že pre ľubovoľnú jeho hranu $h$ opäť platí $\sigma_u(h) > 13$. To je však spor s tým, čo sme už dokázali v prvej časti dôkazu.

Preto každý eulerovský polyéder má aspoň jednu hranu $h$ takú, že platí:

$$\sigma_u(h) \leqq 13.$$

III. Teraz už ľahko dokážeme, že každý eulerovský polyéder má aspoň jednu hranu $h$ takú, že platí:

$$\sigma_P(h) \leqq 13.$$

Keby tomu tak nebolo, t. j. keby existoval eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, pri ktorom o každej z jeho hrán $h$ by platilo $\sigma_P(h) > 13$, potom eulerovský polyéder $\mathfrak{P}'$ reciproký k $\mathfrak{P}$ by bol taký, že o ktorejkoľvek jeho hrane $h$ by platilo $\sigma_u(h) > 13$, a to sme dokázali, že nie je možné. Preto každý eulerovský polyéder má aspoň jednu hranu $h$ takú, že platí:

$$\sigma_P(h) \leqq 13.$$

Tým je dôkaz vety 1 vykonaný.

Veta 1 hovorí, že v každom eulerovskom polyédri existuje aspoň jedna hrana, pre ktorú platí $\sigma_u(h) \leqq 13$. Ukážme, že existujú eulerovské polyédre, pri ktorých pre každú hranu $h$ platí $\sigma_u(h) \geqq 13$. Príkladom môže byť tento eulerovský polyéder:



Pri takzvanom pravidelnom 20-stenu trojuholníkovom rozdeľme každý jeho trojuholník na tri steny tak, že v ťažisku každého pôvodného trojuholníka vytvoríme nový vrchol spojený s pôvodnými tromi vrcholmi ďalšími novými hranami.

Množinu vrcholov takto vzniknutého mnohostenu považujeme za množinu uzlov, množinu hrán mnohostenu za množinu hrán a množinu stien za množinu plôch istého komplexu $\mathfrak{P}$, pričom uzol bude incidentný s hranou $\in \mathfrak{P}$ práve vtedy, keď vrchol leží na hrane mnohostenu, hrana incidentná s plochou v $\mathfrak{P}$, ak hrana leží na stene mnohostenu. Potom $\mathfrak{P}$ je eulerovský polyéder. Každý trojuholník tohto eulerovského polyédra je incidentný s tromi uzlami, z ktorých dva sú desiateho stupňa, jeden tretieho stupňa, teda pre každú hranu $h \in \mathfrak{P}$ platí buď $\sigma_u(h) = 13$ alebo $\sigma_u(h) = 20$.

V eulerovskom polyédri, ktorý je reciproký k opísanému polyédru, bude zase o každej hrane platiť buď $\sigma_P(h) = 13$ alebo $\sigma_P(h) = 20$.

Uvedený príklad nás presvedčuje o tom, že hornú hranicu pre minimálny súčet stupňov uzlov (resp. plôch) incidentných s hranou eulerovského polyédra nie je možné už vo všeobecnosti znížiť.

Avšak situácia vyzerá ináč, keď sa pri svojich úvahách zameriame na isté špeciálne eulerovské polyédre. Doteraz sme sa zaoberali eulerovskými polyédrami, t. j. eulerovskými komplexmi, pri ktorých každý uzol, resp. každá plocha je najmenej tretieho stupňa. To znamená, ak dodržíme doteraz použité označenie $\varrho_i$, resp. $\pi_i$, pre počet tých uzlov (resp. plôch), ktoré sú v komplexe $i$-tého stupňa, že sme požadovali, aby platilo $\varrho_2 = \pi_2 = 0$.

Položme si teraz otázku, aká bude horná hranica pre minimálny súčet stupňov uzlov incidentných s hranou v eulerovskom polyédri, keď každý uzol polyédra bude vyššieho stupňa ako tretieho (t. j. ak $\varrho_3 = 0$). Je zaujímavé, že pri zvýšení hornej hranice pre minimálny stupeň uzla v polyédri zníži sa horná hranica pre minimálny súčet stupňov uzlov incidentných s hranou polyédra. Dokážeme si tieto vety:

**Veta 2:** *V každom eulerovskom polyédri, ktorého každý uzol je najmenej štvrtého stupňa, existuje aspoň jedna hrana $h$, pre ktorú platí:*

$$\sigma_u(h) \leqq 11.$$

**Veta 3:** *V každom eulerovskom polyédri, ktorého plochy sú najmenej štvrtého stupňa, existuje aspoň jedna hrana $h$, pre ktorú platí:*

$$\sigma_P(h) \leqq 11.$$

Poznámka. Podľa analógie s vetou 2 by sa dalo čakať: ak žiadame, aby polyéder mal len uzly stupňa vyššieho ako štvrtého (t. j. $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$), že číslo 11 z vety 2 možno opäť znížiť. Tomu však tak nie je. Existuje eulerovský polyéder taký, že $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$, ale číslo $\sigma_u(h) \geqq 11$ pre každú hranu (t. j. číslo 11 z vety 2 nemožno nahradiť číslom menším). Príkladom je polyéder, ktorý dostaneme takto: Každý trojuholník pravidelného dvadsatistenu trojuholníkového rozdeľme na 4 trojuholníky tak, že spojíme stredy hrán. Takto vzniknutý polyéder má 12 uzlov piateho stupňa a 30 uzlov šiesteho stupňa. Teda $\sigma_u(h)$ je buď 11 alebo 12, pretože každá hrana je incidentná aspoň s jedným uzlom šiesteho stupňa.

Dôkaz vety 2. I. Tvrdím, že neexistuje taký eulerovský polyéder, ktorý by mal tieto vlastnosti:

a) všetky uzly $\in \mathfrak{P}$ sú stupňa najmenej štvrtého (t. j. $\varrho_3 = 0$),

b) všetky plochy sú trojuholníky,

c) o každej jeho hrane platí $\sigma_u(h) \geqq 12$.

Predpokladajme, že naše tvrdenie nie je pravdivé, t. j. predpokladajme, že existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorý má vlastnosti a), b), c). Úvahou obdobnou úvahe, ktorú sme vykonali pri dôkaze vety 1, zistíme, že pre počet $\omega(5, 7)$ takých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom stupňa nižšieho ako piateho a s jedným uzlom stupňa vyššieho ako siedmeho, platí:

$$\omega(5, 7) \leqq 4\varrho_8 + 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 6\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + \dots, \tag{25}$$

pričom (vzhľadom na to, že žiadna hrana nemôže byť podľa predpokladu incidentná s dvoma uzlami stupňa nižšieho ako piateho, platí):

$$\omega(5, 7) = 4\varrho_4. \tag{26}$$

Ďalej pre počet $\omega(6, 6)$ takých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom stupňa nižšieho ako šiesteho a s jedným uzlom stupňa vyššieho ako šiesteho, platí:

$$\omega(6, 6) \leqq 3\varrho_7 + 4\varrho_8 + 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + \dots, \tag{27}$$

pričom (vzhľadom na to, že podľa predpokladu neexistuje hrana, ktorá by bola incidentná s dvoma uzlami nižšieho stupňa ako šiesteho) platí:

$$\omega(6,6) = 4\varrho_4 + 5\varrho_5 \tag{28}$$

čiže:

$$4\varrho_4 \leqq 4\varrho_8 + 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + \dots \tag{29}$$

$$4\varrho_4 + 5\varrho_5 \leqq 3\varrho_7 + 4\varrho_8 + 4\varrho_9 + 5\varrho_{10} + 5\varrho_{11} + 6\varrho_{12} + 6\varrho_{13} + \dots \tag{30}$$

Platí však (lebo je $\varrho_3 = 0$ a všetky plochy v $\mathfrak{P}$ sú podľa predpokladu trojuholníky):

$$2\varrho_4 + \varrho_5 = 12 + \varrho_7 + 2\varrho_8 + \dots + (k-6)\varrho_k + \dots \tag{31}$$

Ak vynásobíme nerovnosť (29) tromi a nerovnosť (30) dvoma a porovnáme súčet ľavých strán so súčtom pravých strán, dostaneme:

$$20\varrho_4 + 10\varrho_5 \leqq 6\varrho_7 + 20\varrho_8 + 20\varrho_9 + 25\varrho_{10} + 25\varrho_{11} + 30\varrho_{12} + 30\varrho_{13} + \dots \tag{32}$$



alebo po dosadení namiesto $20\varrho_4 + 10\varrho_5$ podľa (31) a po úprave:

$$120 + 4\varrho_7 + 10\varrho_9 + 15\varrho_{10} + 25\varrho_{11} + 40\varrho_{12} + \sum_{i=13}^{\infty} c_i\varrho_i \leqq 0,$$

kde $c_i$ sú čísla celé, kladné.

To je však spor, lebo čísla $\varrho_i$ nemôžu byť záporné.

Preto neexistuje eulerovský polyéder, ktorý by mal vlastnosti a), b), c).

II. Predpokladajme, že existuje eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, ktorý má vlastnosti a), c), pri ktorom nie všetky plochy sú trojuholníky. Podľa lemmy 2 existuje však potom eulerovský polyéder $\mathfrak{P}^*$, ktorý opäť má vlastnosti a), c) a okrem toho má aj vlastnosť b). To však, ako sme už dokázali, nie je možné. Preto v každom eulerovskom polyédri, kde $\varrho_3 = 0$, existuje aspoň jedna hrana $h$, o ktorej platí $\sigma_u(h) \leqq 11$.

Dôkaz vety 3. Ak by existoval eulerovský polyéder $\mathfrak{P}$, pri ktorom $\pi_3 = 0$ a pre každú jeho hranu by platilo $\sigma_P(h) \geqq 12$, potom eulerovský polyéder $\mathfrak{P}'$, reciproký k $\mathfrak{P}$, by mal tieto vlastnosti:

d) každý uzol $\in \mathfrak{P}'$ má vyšší stupeň ako 3,

e) pre všetky hrany $\in \mathfrak{P}'$ platí $\sigma_u(h) \geqq 12$.

To však je v rozpore s dokázanou vetou 2. Preto, ak pre polyéder $\mathfrak{P}$ platí $\pi_3 = 0$, potom existuje hrana $\in \mathfrak{P}$, o ktorej platí $\sigma_P(h) \leqq 11$. To bolo treba dokázať.

Došlo 10. X. 1954.

## К ТЕОРИИ ЭЙЛЕРОВЫХ ПОЛИЭДРОВ

АНТОН КОЦИГ

### Выводы

В статье доказываются следующие теоремы:

1. Во всяком полиэдре Эйлера существует по крайней мере одно ребро такое, что сумма степеней вершин, принадлежащих этому ребру $\leqq 13$.

2. Если полиэдр имеет только вершины степени $\geqq 4$, то число 13 в предыдущей теореме можно понизить на 11.