PRÍSPEVOK KU VÝSTAVBE VEKTOROVEJ ALGEBRY V MINKOWSKÉHO ŠTVORROZMERNOM ČASOPRIESTORE

JOZEF GARAJ

Úvod

Ako je známe, v n-rozmernom priestore existuje najviac n lineárne nezávislých vektorov $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Ľubovoľný vektor $\mathbf{v}$ tohto priestoru možno preto napísať v tvare

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i, \tag{1}$$

kde $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sú súradnice vektora $\mathbf{v}$ vzhľadom na zvolený systém základných vektorov $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. n-rozmerný priestor sa nazýva euklídovský, ak je v ňom definovaná aj metrika, a to pomocou skalárneho súčinu $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ dvoch ľubovoľných vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij}x^iy^j, \tag{2}$$

pričom v uvedenej bilineárnej forme vystupujúce koeficienty g_{ij} vo zvolenom súradnicovom systéme sú konštanty, dané vlastnosťami priestoru. Nazývajú sa fundamentálne metrické veličiny a spĺňajú podmienku, že ich determinant $|g_{ij}| \neq 0$. Veličiny x^i, resp. y^j nazývajú sa súradnicami vektora $\mathbf{x}$, resp. vektora $\mathbf{y}$. Euklídovské priestory sa delia do dvoch veľkých tried, na *reálne a komplexné* euklídovské priestory. Reálnym euklídovským priestorom sa pritom nazýva priestor, v ktorom súradnice x^i, resp. y^j, ako aj veličiny g_{ij} z výrazov (1), (2) sú reálne a teda aj hodnota kvadratickej funkcie

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x^2 = g_{ij}x^ix^j \tag{3}$$

je reálna. Nazýva sa komplexným, ak tieto čísla sú komplexné. Euklídovské reálne priestory delia sa ďalej na *vlastné euklídovské*, pri ktorých pre ľubovoľný vektor $\mathbf{x} \neq 0$ je:

$$x^2 > 0$$

a *pseudoeuklídovské priestory*, v ktorých x^2 môže nadobudnúť kladné, záporné aj nulové hodnoty.

Vzhľadom na cieľ tejto práce v ďalšom sa budeme zaoberať len reálnymi euklídovskými priestormi. Pre každý nenulový vektor $\mathbf{x}$ takýchto priestorov možno zaviesť jednotkový vektor $\mathbf{i}$, tzv. normovaním daného vektora. Normovanie vektora $\mathbf{x}$ sa vykoná delením tohto vektora výrazom $\sqrt{\pm x^2}$, pričom znamienko $+$ pod odmocninou sa použije v prípade, ak vektorom $\mathbf{x}$ určená kvadratická forma je kladná a znamienko $-$ v prípade, že táto forma je záporná.

Keď teda vektor $\mathbf{x}$ spĺňa nerovnosť $x^2 < 0$, jemu príslušný jednotkový vektor je:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{-x^2}}$$

a platí

$$i^2 = -1.$$

Ak však $y^2 > 0$, vtedy

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{y^2}},$$

takže

$$j^2 = 1.$$

Dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sa nazývajú navzájom kolmé, tiež ortogonálne, ak ich bilineárna forma (2) je rovná nule. Dá sa dokázať táto dôležitá veta:

V každom reálnom n-rozmernom euklídovskom priestore existujú množiny n-lineárne nezávislých vektorov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, z ktorých každé dva sú navzájom ortogonálne.

Dôsledkom tejto vety je, že v každom reálnom n-rozmernom euklídovskom priestore existujú systémy n ortogonálnych jednotkových vektorov, ktoré v prípade obyčajného trojrozmerného priestoru zodpovedajú pravouhlým kartézskym systémom.

Vo vlastnom reálnom euklídovskom priestore kvadratická forma (3) vzťahovaná na ortogonálny systém jednotkových vektorov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ má tvar

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Ak reálny euklídovský n-rozmerný priestor je pseudoeuklídovský, potom z n vektorov ortogonálneho systému takéhoto priestoru je všeobecne k (kde $k \leq n$) vektorov, ktorých druhá mocnina je záporná.

Platí veta:

Počet vektorov ortogonálneho n-rozmerného pseudoeuklídovského priestoru, ktorých druhá mocnina je záporná, nezávisí od voľby ortogonálneho systému.

Nazýva sa indexom príslušného pseudoeuklídovského priestoru.

Podľa prv uvedeného možno teda v pseudoeuklídovskom n-rozmernom priestore indexu k utvoriť ortogonálny systém jednotkových vektorov $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots, \mathfrak{i}_n$, o ktorých platí:

$$i_1^2 = 1, i_2^2 = 1, \ldots, i_{n-k}^2 = 1,$$

$$i_{n-k+1}^2 = -1, \ldots, i_n^2 = -1.$$

Kvadratickú formu (3) možno v takomto priestore upraviť na tvar

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n-k})^2 - (x^{n-k+1})^2 - \ldots - (x_u)^2. \tag{4}$$

I.

Na uloženie bodovej udalosti v priestore a čase vzhľadom na ľubovoľný inerciálny systém S sú potrebné štyri údaje: x, y, z, t, z ktorých prvé tri určujú jej polohu v priestore a štvrtá polohu v čase. V inom inerciálnom systéme S' tieto údaje aj pre tú istú udalosť sú iné, x', y', z', t'. Zo základných postulátov špeciálnej teórie relativity vyplýva, že tieto štvorice čísel možno zaviesť tak, že prechod od jedných ku druhým je potom vyjadrený lineárnymi funkciami, pričom výraz

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \tag{1,1}$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu, je vzhľadom na túto transformáciu invariantný. Vzhľadom na tieto skutočnosti je štvorrozmerný priestor udalostí pseudoeuklídovským priestorom indexu 1. Skutočne, ak píšeme:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ct,$$

potom výraz (1,1) prejde do tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{1,2}$$

Celkove môžeme povedať:

Súradnice udalostí x, y, z, ct v ľubovoľnom inerciálnom systéme S sa vzťahujú na jednotkové, vzájomne kolmé základné vektory v pseudoeuklídovskom priestore indexu 1.

Polohový vektor udalostí vo štvorrozmernom časopriestore možno teda písať takto:

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i}_1 + y\mathfrak{i}_2 + z\mathfrak{i}_3 + ct\mathfrak{i}_4, \tag{1,3}$$

pričom je $\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i}_2 \cdot \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_3 \cdot \mathfrak{i}_3 = 1$, avšak $\mathfrak{i}_4 \cdot \mathfrak{i}_4 = -1$.

Nech $\mathfrak{i}_k$ sú ortogonálne jednotkové vektory inerciálneho systému S a $\mathfrak{i}'_l$, podobné vektory systému S'. Medzi nimi platia — ako už bolo uvedené — transformačné rovnice

$$\mathfrak{i}'_l = A^k_l \mathfrak{i}_k \tag{1,4}$$

($k, l = 1, 2, 3, 4$ a na pravej strane treba sčítať podľa k).

Ako je známe, matica týchto transformácií $\| A^k_l \|$ je pseudoortogonálna, t. j. ak prvky matice ku nej inverznej označíme $\| A'^l_k \|$, spĺňa rovnicu:

$$\left\| \begin{matrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & A^1_4 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & A^2_4 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 & A^3_4 \\ A^4_1 & A^4_2 & A^4_3 & A^4_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A'^1_1 & A'^2_1 & A'^3_1 & -A'^4_1 \\ A'^1_2 & A'^2_2 & A'^3_2 & -A'^4_2 \\ A'^1_3 & A'^2_3 & A'^3_3 & -A'^4_3 \\ -A'^1_4 & -A'^2_4 & -A'^3_4 & A'^4_4 \end{matrix} \right\|.$$

Slovami: Z matice $\| A^k_l \|$ dostaneme maticu k nej inverznú $\| A'^l_k \|$, keď jednu z nich transponujeme a násobíme jej posledný stĺpec a riadok číslom -1. Determinant transformácie je ± 1.

II.

§ 1.

Pri výstavbe vektorovej algebry vo štvorrozmernom euklídovskom priestore nie je možné priamo prenášať do štvorrozmerného priestoru pojmy z bežného trojrozmerného priestoru. Takéto snahy vedú často k veľmi neprirodzeným konštrukciám. Napr. A. Sommerfeld vo svojej práci „Vierdimensionale Algebra"[1] vektory vo štvorrozmernom priestore rozdeľuje na vektory určené štyrmi súradnicami (Vierverktoren) a na vektory určené šiestimi súradnicami (Sechsvektoren). Pojem šesťvektora vznikol pritom prenesením vektorového súčinu dvoch vektorov z trojrozmerného do štvorrozmerného priestoru.

Ako je známe, v trojrozmernom priestore je vektorový súčin dvoch vektorov $\mathfrak{a} = a^k\mathfrak{i}_k$, $\mathfrak{b} = b^k\mathfrak{i}_k$ určený determinantom

$$\pm \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

pričom znamienko $+$ alebo $-$ platí pre pravotočivý, resp. pre ľavotočivý systém ($\mathfrak{i}$ sú ortogonálne vektory). Súradnice tohto vektora sú determinanty druhého stupňa z matice

$$\left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{matrix} \right\| \tag{2,1}$$

s príslušnými znamienkami a geometricky značia veľkosti priemetov plochy rovinného rovnobežníka, ktorého dve strany sú vektory $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, do súradnico-

[1] A. Sommerfeld: Ann. d. Phys. 32, 749, 1910, 33, 649, 1910.

vých rovín. Ak teda budeme mať podobne dva vektory $\mathfrak{a} = a^k \mathfrak{i}_k$, $\mathfrak{b} = b^k \mathfrak{i}_k$ $(k = 1, \dots 4)$ vo štvorrozmernom priestore a priamo prenesieme pojem vektorového súčinu do štvorrozmerného priestoru, súradnice vektorového súčinu budú determinanty druhého stupňa z matice

$$\left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ b^1 & b^2 & b^3 & b^4 \end{matrix} \right\|. \tag{2,2}$$

Týchto je skutočne šesť a dostávame „vektor o šiestich zložkách". S pojmom šesťvektora sa stretávame napr. aj v učebnici fyziky, Cl. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik III/1, 868 a ďalšie. Ukážeme, že na tento pojem je potrebné pozrieť sa z iného hľadiska.

Prv ako by sme postupovali vo vývodoch v štvorrozmernom priestore, objasníme si, čo budeme rozumieť pod pojmom duálnosti tenzorových veličín.

Ako je známe, antisymetrickému tenzoru druhého stupňa v trojrozmernom priestore, ktorý vždy možno písať v tvare $\mathfrak{ba} - \mathfrak{ab}$, možno priradiť jednoznačne vektor, a to tým spôsobom, že diadické násobenia vo vyjadrení antisymetrického tenzora nahradíme vektorovým násobením. Dostávame:

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -2\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}. \tag{2,3}$$

Pritom súradnice tenzora

$$\begin{aligned} \mathfrak{ba} - \mathfrak{ab} = \quad & 0 && + (b_1a_2 - a_1b_2)\,\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2 + (b_1a_3 - a_1b_3)\,\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3 + \\ + & (b_2a_1 - a_2b_1)\,\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1 + && 0 \qquad + (b_2a_3 - a_2b_3)\,\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3 + \\ + & (b_3a_1 - a_3b_1)\,\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1 + && (b_3a_2 - a_3b_2)\,\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_2 + \qquad 0 \end{aligned} \tag{2,4}$$

sa rovnajú (príp. až na znamienko) jednotlivým súradniciam vektorového súčinu $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Tiež naopak; ak máme ľubovoľný vektor, ktorý vždy možno písať v tvare $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, môžeme od neho odvodiť antisymetrický tenzor takto: Ak $\mathbf{I}$ je tenzor identity v trojrozmernom priestore, potom platí:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathbf{I} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\,.\,\mathbf{I}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\,.\,\mathbf{I}) = \mathfrak{ba} - \mathfrak{ab}.$$

Z tohto dôvodu budeme v trojrozmernom priestore nazývať veličiny: antisymetrický tenzor druhého stupňa a vektor duálnymi.

Možnosť v trojrozmernom priestore priradiť jednoznačne vektor k antisymetrickému tenzoru a naopak, má svoju príčinu v tom, že v tomto priestore tenzor druhého stupňa a vektor majú rovnaký počet nezávislých súradníc.

V trojrozmernom priestore majme teraz na mysli antisymetrický tenzor tretieho stupňa;

$$\mathfrak{abc} - \mathfrak{acb} + \mathfrak{bca} - \mathfrak{bac} + \mathfrak{cab} - \mathfrak{cba} \tag{2,5}$$

a vyšetríme počet jeho nezávislých súradníc.

Pre jednoduchšie vedenie dôkazu označme na chvíľu vektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ symbolmi $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. Tenzor (2,5) potom prepíšme použitím vyjadrenia vektorov $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ v zložkách $\mathfrak{a}_1 = a_1^p \mathfrak{i}_p$, $\mathfrak{a}_2 = a_2^q \mathfrak{i}_q$, $\mathfrak{a}_3 = a_3^r \mathfrak{i}_r$ $(p, q, r = 1, 2, 3)$, a použitím symbolu e tretieho rádu e^{ijk}, ktorý značí nulu, ak aspoň dva z jeho indexov sú rovnaké a $+1$, resp. -1, ak permutácia i, j, k je párna, resp. nepárna. Potom (2,5) možno písať v tvare:

$$e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r \mathfrak{i}_p \mathfrak{i}_q \mathfrak{i}_r. \tag{2,6}$$

Príslušné sumačné znamienka, vzťahujúce sa na indexy i, j, k a na indexy p, q, r vynechávame.

Ľahko nahliadneme, že vo výraze (2,6) sú niektoré členy nulové. Predovšetkým vypadnú na základe vyslovených vlastností symbolu e^{ijk} tie, v ktorých sú aspoň dva z indexov i, j, k rovnaké a potom tiež tie, v ktorých aspoň dva z indexov p, q, r sú rovnaké. Posledné tvrdenie je zrejmé z tejto jednoduchej úvahy: nech napr. $p = q = t$, potom vo vyjadrení tenzora (2,6) je:

$$e^{ijk} a_i^t a_j^t a_k^r \mathfrak{i}_t \mathfrak{i}_t \mathfrak{i}_r = - e^{jik} a_j^t a_i^t a_k^r \mathfrak{i}_t \mathfrak{i}_t \mathfrak{i}_r$$

a tieto členy teda z celkového súčtu vypadnú.

Všeobecnú zložku A_{pqr}, tenzora (2,5) dostaneme, ak ho násobíme postupne skalárne sprava vektormi $\mathfrak{i}_r$, $\mathfrak{i}_q$, $\mathfrak{i}_p$ (prípadne zľava vektormi $\mathfrak{i}_p, \mathfrak{i}_q, \mathfrak{i}_r$), čím dostávame:

$$\{[(e^{ijk} a_i^l a_j^m a_k^n \mathfrak{i}_l \mathfrak{i}_m \mathfrak{i}_n)\,.\,\mathfrak{i}_r]\,.\,\mathfrak{i}_q\}\,.\,\mathfrak{i}_p = e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Znamienko pri poslednom determinante záleží na tom, či trojica čísel p, q, r, ktorá určuje súradnicu tenzora, je párnou alebo nepárnou permutáciou čísel 1, 2, 3. Teda vidíme skutočne, že tenzor (2,5) má len jedinú nezávislú súradnicu.

Ukážeme teraz, že analogicky ako v trojrozmernom priestore, aj vo štvorrozmernom priestore antisymetrický tenzor štvrtého stupňa určuje jednoznačne skalár, antisymetrický tenzor tretieho stupňa vektor, antisymetrický tenzor druhého stupňa opäť tenzor druhého stupňa a naopak.

Uvažujme antisymetrický tenzor (2,5) vo štvorrozmernom priestore. Uvedený tenzor možno aj v tomto prípade písať v tvare:

$$e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r \mathfrak{i}_p \mathfrak{i}_q \mathfrak{i}_r,$$

avšak indexy p, q, r môžu teraz nadobúdať hodnoty 1, 2, 3, 4. Z napísaného vyjadrenia tenzora (2,5) vo štvorrozmernom priestore okamžite vidieť, že jeho všeobecná súradnica pri pevne zvolených indexoch p, q, r je determinant $e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r$. Pretože však trojicu čísel p, q, r z čísel 1, 2, 3, 4 možno vybrať celkom štyrmi spôsobmi, uvažovaný tenzor má celkom štyri, od seba nezávislé zložky, ktoré sú tieto determinanty:

$$\pm\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad \pm\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \end{vmatrix}, \quad \pm\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3^4 \end{vmatrix}, \quad \pm\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \end{vmatrix}.$$

Vo štvorrozmernom priestore teda antisymetrický tenzor tretieho stupňa určuje jednoznačne vektor a naopak.

Podobne ľahko zistíme, že vo štvorrozmernom priestore antisymetrický tenzor štvrtého stupňa

$$\mathbf{abcd} - \mathbf{bacd} + \mathbf{bcad} - \mathbf{bcda} + \qquad (2,7)$$

určuje jednoznačne skalár.

Ak vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ opäť označíme symbolmi $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, tenzor (2,7) možno napísať v tvare:

$$e^{ijkl}a_i^p a_j^q a_k^r a_l^s \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s,$$

z ktorého vidieť, že jeho všeobecná súradnica A_{pqrs} je determinant

$$e^{ijkl}a_i^p a_j^q a_k^r a_l^s = \pm\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}.$$

Tenzor (2,7) má teda len jedinú nezávislú súradnicu, teda jednoznačne určuje skalár a naopak.

Ďalej zvlášť nás budú zaujímať vlastnosti antisymetrického tenzora druhého stupňa, t. j. veličiny $\mathbf{ba} - \mathbf{ab}$. Vo štvorrozmernom priestore má tento tenzor, rozpísaný do zložiek, tvar:

$$(2,8)\ldots\begin{array}{cccc} 0 & (a_2b_1 - a_1b_2)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + & (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + & (a_4b_1 - a_1b_4)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_4 + \\ +(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + & 0 & +(a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + & (a_4b_2 - a_2b_4)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_4 + \\ +(a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + & (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + & 0 & +(a_4b_3 - a_3b_4)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4 + \\ +(a_1b_4 - a_4b_1)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_1 + & (a_2b_4 - a_4b_2)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_2 + & (a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_3 + & 0 \end{array}$$

a jeho nezávislé súradnice sú determinanty matice (2,2). Ako vidieť, sú analogicky stavané ako súradnice vektorového súčinu v trojrozmernom priestore a tenzor $\mathbf{ba} - \mathbf{ab}$ predstavuje vlastne Sommerfeldom zavedený šesťvektor. Tenzor $\mathbf{ba} - \mathbf{ab}$ budeme ďalej nazývať antisymetrickým súčinom vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a budeme ho označovať znakom $\mathbf{a} \ast \mathbf{b}$. Teda zavádzame definíciu

$$\mathbf{a} \ast \mathbf{b} = \mathbf{ba} - \mathbf{ab} \qquad (2,9)$$

a toto označenie v rovnakom zmysle podržíme aj v trojrozmernom priestore. Ako z uvedenej definície antisymetrického súčinu ihneď vidieť, neplatí preň zákon komutatívny, ale platí:

$$\mathbf{a} \ast \mathbf{b} = -\mathbf{b} \ast \mathbf{a} \qquad (2,10)$$

a tiež

$$\mathbf{a} \ast \mathbf{a} = 0.$$

Ľahko sa však presvedčíme, že pre antisymetrické násobenie vektorov platí zákon distributívny

$$\mathbf{a} \ast (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \ast \mathbf{b} + \mathbf{a} \ast \mathbf{c} \qquad (2,11)$$

Položme totiž $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{u}$, potom je:

$$\mathbf{a} \ast (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \ast \mathbf{u} = \mathbf{ua} - \mathbf{au} = (\mathbf{b} + \mathbf{c})\,\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) =$$
$$= \mathbf{ba} - \mathbf{ab} + \mathbf{ca} - \mathbf{ac} = \mathbf{a} \ast \mathbf{b} + \mathbf{a} \ast \mathbf{c}.$$

Zrejme tiež platí:

$$\alpha(\mathbf{a} \ast \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \ast \mathbf{b} = \mathbf{a} \ast (\alpha\mathbf{b}),$$

kde α je skalárny faktor.

Pretože $\mathbf{a} \ast \mathbf{b}$ je antisymetrický tenzor, platí pre jeho skalárne násobenie ľubovoľným vektorom $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} \,.\, (\mathbf{a} \ast \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \ast \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = (\mathbf{b} \ast \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{c} \qquad (2,12)$$

Odtiaľ špeciálne pre skalárne násobenie antisymetrického súčinu $\mathbf{a} \ast \mathbf{b}$ zľava vektorom $\mathbf{b}$, resp. sprava vektorom $\mathbf{a}$, platí pravidlo „posunovania zátvorky“ t. j.

$$\mathbf{b} \,.\, (\mathbf{a} \ast \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \ast \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{b} \qquad (2,13)$$

a analogicky aj v druhom prípade.

Všetky uvedené vzorce [(2,11) — (2,13)], ako sa jednoducho možno presvedčiť, platia bez zmeny aj v trojrozmernom priestore. Poznamenajme však, že zavedením antisymetrického násobenia vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v trojrozmernom priestore napr. platí ešte tento vzťah:

$$\mathbf{c} \,.\, (\mathbf{a} \ast \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Totiž je:

$$\mathbf{c} \,.\, (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \,.\, \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{c} \,.\, \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

teda výraz $\mathbf{c} \,.\, (\mathbf{a} \ast \mathbf{b})$ má v trojrozmernom priestore význam dvojnásobného vektorového súčinu.

Zavedením antisymetrického súčinu dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ máme v trojrozmernom priestore celkom teda tieto súčiny:

1. diadický $\mathbf{ab}$,
2. skalárny $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$,
3. vektorový $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,
4. antisymetrický $\mathbf{a} \ast \mathbf{b}$.

Vektorový a antisymetrický súčin sú pritom duálne.

Uvažujme vo štvorrozmernom priestore antisymetrický tenzor štvrtého stupňa, vybudovaný z jednotkových vektorov $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3, \mathbf{i}'_4$ ľubovoľne zvoleného ortogonálneho systému S',

$$\mathbf{K}' = \pm\, e^{ijkl}\mathbf{i}'_i\mathbf{i}'_j\mathbf{i}'_k\mathbf{i}'_l, \tag{2,14}$$

pričom platné je znamienko $+$, ak systém jednotkových vektorov je zhodne orientovaný ako systém zvolený za základný a znamienko $-$ v prípade opačnom. Ukážeme, že tento tenzor je invariant vzhľadom na ľubovoľné ortogonálne transformácie jednotkových vektorov.

Aby sme toto tvrdenie dokázali, vyjadrime jednotkové vektory $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3, \mathbf{i}'_4$ pomocou jednotkových vektorov systému S pevne za základ zvoleného

$$\mathbf{i}'_i = a^n_i\mathbf{i}_n.$$

Potom je:

$$\mathbf{K}' = \pm\, e^{ijkl}a^p_i a^q_j a^r_k a^s_l\,\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s = \pm\, e^{pqrs}\,|a^n_i|\,\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s = \mathbf{K},$$

lebo ak je $|a^n_i| = +1$, pred symbolom e platí znamienko $+$, v prípade, ak $|a^n_i| = -1$, pred symbolom e platí znamienko $-$. Tenzor $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ je teda skutočne invariant. Netreba zvlášť zdôrazňovať, že podobne stavaný invariantný tenzor možno napísať aj v trojrozmernom priestore.

Tenzor $\mathbf{K}$ budeme v ďalšom nazývať antisymetrickou tenzorovou jednotkou

Pomocou tenzora $\mathbf{K}$ ľahko zovšeobecníme pojem duálnosti tenzorových veličín, ako sme sa o ňom už zmienili pri úvahách o antisymetrickom a vektorovom súčine dvoch vektorov v trojrozmernom priestore.

Nech sú tieto duálne veličiny $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, resp. $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$. Tenzor $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$, možno napísať v tvare:

$$e^{ij}a^l_j a^k_i\,\mathbf{i}_l\mathbf{i}_k, \tag{2,15}$$

pričom indexy l, k môžu nadobúdať hodnoty 1, 2, 3, pretože pracujeme v trojrozmernom priestore. Vypočítajme teraz dvojnásobný skalárny súčin tenzora (2,15) s tenzorom $\mathbf{K}$ (v trojrozmernom priestore). Ak predpokladáme, že vektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, ktoré prípadne budeme písať aj pomocou symbolov $\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3$. tvoria pravotočivý systém, dostávame:

$$(e^{ij}a^l_j a^k_i\,\mathbf{i}_l\mathbf{i}_k) : (e^{pqr}\,{}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r) = e^{ij}e^{pqr}a^q_j a^p_i\,{}_r = e^{ij}e_{pqr}\mathbf{i}^r a^q_j a^p_i = -\,e^{ij}e_{rqp}\mathbf{i}^r a^q_j a^p_i =$$
$$= -\,e^{ij}(\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i) = 2(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

Preto ak v trojrozmernom priestore k tenzoru $\mathbf{K}$ pripojíme multiplikatívny faktor 1/2, platí:

$$(\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2) : 1/2(e^{pqr}\mathbf{i}_p\,{}_p\mathbf{i}_r) = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2. \tag{2,16}$$

Tento výsledok by bolo možné dokonca považovať za definíciu vektorového súčinu v trojrozmernom priestore, rovnica (2,16) vyjadruje však súčasne duálnosť obidvoch veličín $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$.

Rovnicu (2,16) zovšeobecníme teraz — až na nepodstatnú zmenu, ktorej význam sa ďalej ukáže — pre štvorrozmerný priestor a použijeme ju k definícii nového súčinu vektorov vo štvorrozmernom priestore.

Ako je známe v štvorrozmernom priestore, nemožno analogickým spôsobom ako v trojrozmernom priestore zaviesť vektorový súčin. Ťažkosti v tomto smere sú napr. už v tom, že na rovinu dvoch vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ v štvorrozmernom priestore existuje nekonečne mnoho kolmých smerov. Práve tak výraz, ktorý by v štvorrozmernom priestore bol vybudovaný z analogických výrazov (pozri úvodné poznámky 1 §), ako sú súradnice vektorového súčinu v trojrozmernom priestore, už nie je vektor, ale tenzor. Aby sme však napriek tomu mohli zaviesť duálne veličiny aj v pseudoeuklídovskom časopriestore analogicky ako v trojrozmernom priestore, bude výhodné v štvorrozmernom priestore zaviesť definíciu nového súčinu vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, ktorý budeme nazývať komplementárnym a zapíšeme ho výrazom $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Komplementárny súčin vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, zapísaný znakom $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, v štvorrozmernom priestore definujeme rovnicou:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2) : (e^{pqrs}\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s). \tag{2,17}$$

Súčin takto definovaný je invariantom, pretože sú invariantné výrazy $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$, $\mathbf{K}$.

Vypočítajme priamo z definície (2,17) súčin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. Pretože je:

$$\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2 = e^{ij}a^l_j a^k_i\,\mathbf{i}_l\mathbf{i}_k,$$

je:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\frac{1}{2}(e^{ij}a^l_j a^k_i\,\mathbf{i}_l\mathbf{i}_k) : (e^{pqrs}\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s).$$

Nech permutácia k, l, m, n z indexov 1, 2, 3, 4 antisymetrickej tenzorovej jednotky $\mathbf{K}$ je párna. Potom ak vykonáme dvakrát za sebou skalárne násobenie zložkami tohto tenzora $\mathbf{K}$

$$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n;\quad -\,\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m;\quad \mathbf{i}_l\mathbf{i}_k\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m;\quad -\,\mathbf{i}_l\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n,$$

dostaneme postupne výsledky

$$-\frac{1}{2}\left\{e^{ij}\,[\pm\, a^l_j a^k_i(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n - \mathbf{i}_n\mathbf{i}_m)] + e^{ij}[\pm\, a^k_j a^l_i(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)]\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2}e^{ij}\,[\pm\,(a^k_j a^l_i - a^l_j a^k_i)(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)].$$

Pritom znamienko $+$ v horných výrazoch platí v prípade, že žiaden z indexov k, l sa nerovná číslu 4. V prípade, keď jeden z nich je rovný číslu 4, platí znamienko $-$. Tieto zmeny znamienka sú spôsobené tým, že v Minkowského časopriestore platí $\mathbf{i}_4 \cdot \mathbf{i}_4 = -1$.

Zátvorku s jednotkovými vektormi možno vyjadriť determinantom

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_n & \mathbf{i}_m \\ \mathbf{i}_n & \mathbf{i}_m \end{vmatrix},$$

v ktorom treba príslušné násobenie vykonávať diadickým spôsobom. Posledný výraz sa potom dá napísať v tvare:

$$-\frac{1}{2}\left(-2\begin{vmatrix} a_2^k & a_2^l \\ a_1^k & a_1^l \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_m & \mathbf{i}_n \\ \mathbf{i}_m & \mathbf{i}_n \end{vmatrix}\right), \qquad (2,18)$$

pričom v zmysle uvedenej poznámky treba brať prvky v determinante

$$\begin{vmatrix} a_2^k & a_2^l \\ a_1^k & a_1^l \end{vmatrix},$$

v ktorých k, resp. l sa rovná číslu 4, so záporným znamienkom.

Pre určitú dvojicu k, l absolvovali sme predchádzajúcim výpočtom z tenzora $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$ dve diády. Preto výpočet bude úplne vykonaný, ak za čísla k, l volíme postupne dvojice 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4. Indexy pri druhom determinante (s jednotkovými vektormi) treba potom voliť tak, aby príslušné permutácie k, l, m, n boli párne.

Keď to všetko uvážime, vidíme, že výrazy (2,18) sú prvky determinantu

$$\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & -a_2^4 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & -a_1^4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix},$$

rozvinutého podľa prvých dvoch riadkov. Preto celkove, ak sa vrátime ku pôvodnému značeniu našich dvoch vektorov pomocou symbolov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, je:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}) : (e^{pqrs}\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s) =$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix}. \qquad (2,19)$$

Posledný determinant vyčíslený podľa diád dáva výsledok

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \; & 0 && -(a_4b_3 - a_3b_4)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + (a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_4 - \\ & -(a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 - && 0 \qquad -(a_4b_1 - a_1b_4)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_4 - \\ & -(a_4b_2 - a_2b_4)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 - && (a_1b_4 - a_4b_1)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + \qquad 0 \qquad + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4 + \\ & +(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_1 + && (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_4\mathbf{i}_3 + \qquad 0. \end{aligned}$$

Poznamenajme ešte, že posledná rovnica (2,19) bola získaná za predpokladu, že jednotkové vektory $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$ pracovného systému tvoria systém zhodne orientovaný s tým, ktorý bol zvolený za základ a v ktorom tenzoru $\mathbf{K}$ podľa definície prislúcha znamienko +. V prípade, že to tak nie je, tenzor $\mathbf{K}$ podľa svojej definície má záporné znamienko, t. j. pred determinantom na pravej strane rovnice v takom prípade vystúpi znamienko —. V úplnej všeobecnosti treba teda písať:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix},$$

pričom znamienko + platí v systéme zhodne orientovanom so systémom za základ zvolený — v systéme inom.

Priamo z definície (2,17) vidieť duálnosť súčinov $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 \divideontimes \mathbf{a}_2$, pretože obidva sú určené tými istými nezávislými súradnicami. Ľahko sa tiež zistí, že súradnice obidvoch súčinov, ktoré sú tenzory druhého stupňa, nachádzajú sa na navzájom povymieňaných miestach podľa tohto pravidla:

Súradnica pri diáde $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ je súradnicou pri diáde $\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4$ tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Schematicky

$$\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3\mathbf{i}_4.$$

Naopak však súradnica pri diáde $\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4$ tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ je súradnicou pri diáde $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, avšak so záporným znamienkom. Schematicky:

$$\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4 \xrightarrow{-} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$$

Všeobecne súradnica pri diáde $\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ tenzora $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ je súradnicou pri diáde $\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n$ tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pričom k, l, m, n je párnou permutáciou čísel 1, 2, 3, 4 a platí:

$$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \xrightarrow[-]{+} \mathbf{i}_m\mathbf{i}_n,$$

pričom znamienko + platí v prípade, keď žiadne z čísel k, l sa nerovná číslu 4 a znamienko — platí vtedy, keď jedno z nich je rovné číslu 4.

Ľahko nahliadneme, že pri prechode od tenzora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ k tenzoru $\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}$ platí uvedené pravidlo výmien s opačnými znamienkami, t. j.

$$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \xrightarrow[+]{-} \mathbf{i}_m\mathbf{i}_n.$$

Táto nesymetričnosť výmien súradníc duálnych tenzorov druhého stupňa v Minkowského časopriestore je spôsobená tým, že v tomto priestore je

$$\mathbf{i}_4 \cdot \mathbf{i}_4 = -1.$$

Odvoďme teraz základné početné pravidlá pre komplementárny súčin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ vo štvorrozmernom časopriestore.

1. Pre komplementárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ neplatí zákon komutatívny, ale platí:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

čo je dôsledok definície tohto súčinu (2,17) vzhľadom na to, že je:

$$\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b} = - \mathbf{b} \divideontimes \mathbf{a}.$$

2. Pre násobenie súčinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ skalárom α platí:

$$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}).$$

Dôkaz je zrejmý tiež z rovnice (2,17).

3. Pre komplementárny súčin dvoch vektorov platí zákon distributívny, t. j.:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Dôkaz.

Označme $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{u}$. Z definície (2,17) vyplýva:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{u}) : \mathbf{K} = -\frac{1}{2} [\mathbf{a} \divideontimes (\mathbf{b} + \mathbf{c})] : \mathbf{K} =$$

$$= -\frac{1}{2} [(\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{c})] : \mathbf{K} = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{b}) : \mathbf{K} -$$

$$-\frac{1}{2} (\mathbf{a} \divideontimes \mathbf{c}) : \mathbf{K} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \text{ č. b. d.}$$

Odvodíme ďalej pravidlo pre komplementárne násobenie jednotkových ortogonálnych vektorov.

Nech $\mathbf{i}_k$, $\mathbf{i}_l$ sú ľubovoľné dva ortogonálne jednotkové vektory vzťažného systému. Počítajme podľa definície (2,17) komplementárny súčin týchto vektorov. Je:

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = -\frac{1}{2} (\mathbf{i}_k \divideontimes \mathbf{i}_l) : (e^{pqrs} \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s) = -\frac{1}{2} (\mathbf{i}_l \mathbf{i}_k - \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l) : (e^{pqrs} \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s).$$

Uvedeným násobením diády $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_k$ dostaneme od nuly rôzne členy len z násobenia od tých členov tenzora $\mathbf{K}$, ktorých indexy tvoria permutácie k, l, m, n; k, l, n, m. Z nich permutáciu k, l, m, n berme párnu. Analogicky pri násobení druhej diády $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$ budú od nuly rôzne len výsledky násobenia od tých členov tenzora $\mathbf{K}$, pri ktorých permutácie indexov sú l, k, n, m; l, k, m, n. (Prvá permutácia je opäť párna.) Výsledok uvedeného násobenia teda je:

$$-\frac{1}{2} \left\{ \pm [(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n - \mathbf{i}_n \mathbf{i}_m) - (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)] \right\} = \pm (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n) = \pm \mathbf{i}_m \divideontimes \mathbf{i}_n.$$

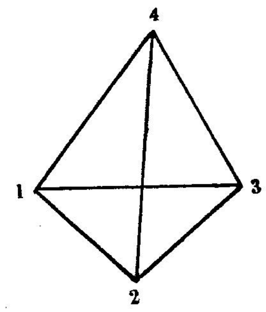
Tým je dokázaný vzťah

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_m \divideontimes \mathbf{i}_n, \tag{2,20}$$

pričom k, l, m, n je párna permutácia prvkov 1, 2, 3, 4. Znamienko + platí v prípade, že ani jedno číslo z k, l nie je rovné číslu 4, znamienko – vtedy, keď jedno z nich sa rovná číslu 4.

Rovnicu (2,20) treba považovať za predpis pre komplementárne násobenie jednotkových vektorov ortogonálneho systému vo štvorrozmernom časopriestore. Ako ukážeme ďalej, je možné určiť stú schému pre stanovenie poradia jednotkových vektorov v rovnici (2,20), ktorá by sa mohla považovať za istú analógiu schémy pre určenie vektorového súčinu jednotkových ortogonálnych vektorov v trojrozmernom priestore.

Pripíšme čísla 1, 2, 3, 4 k vrcholom štvorstena v takom poradku, že čísla 1, 2, 3 pri pozorovaní zo strany štvrtého vrcholu štvorstena nasledujú proti smeru hodinových ručičiek. Potom pre ľubovoľné dva vektory $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ z rovnice (2,20) určíme príslušné vektory $\mathbf{i}_m$, $\mathbf{i}_n$ o takých indexoch m, n, že s predchádzajúcimi indexmi k, l tvoria poradie k, l, m, n, v ktorom indexy k, l, m, pozorované zo strany vrcholu s indexom n, nasledujú v smere proti hodinovým ručičkám.



Príklad: Indexom 1,4 sú podľa opísanej schémy priradené indexy 2,3, pretože pri pozorovaní z vrcholu s indexom 3 nasledujú vrcholy s indexmi 1,4, 2 v smere proti hodinovým ručičkám. Skutočne jednotkové vektory v poradí 1, 4, 2, 3 tvoria párnu permutáciu vektorov $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$. Podobne dostávame tiež: 2, 3, 1, 4; 4, 1, 3, 2; 3, 1, 2, 4 ap.

Vidíme teda, že je tu skutočne určitá analógia s trojrozmerným priestorom.

Poznámka:

Pretože sme dokázali, že pre komplementárne násobenie vektorov vo štvorrozmernom časopriestore platí zákon distributívny, možno súčin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ vypočítať tiež priamo rozpísaním vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ do zložiek pri súčasnom použití vzťahu (2,20) pre komplementárne násobenie jednotkových ortogonálnych vektorov. Postupne dostávame:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = a_1^k \mathbf{i}_k \times a_2^l \mathbf{i}_l = a_1^k a_2^l \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l.$$

V tomto súčte sú rovné nule všetky členy, v ktorých $k = l$, pretože je $\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_k = 0$. Preto ďalej použitím rovnice (2,20) dostávame:

$$a_1^k a_2^l \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \sum_{k,\, l} \pm a_1^k a_2^l \, \mathbf{i}_m \divideontimes \mathbf{i}_n,$$

pričom súčet na pravej strane treba previesť tak, aby sa v jeho členoch vystriedali všetky párne permutácie indexov k, l, m, n.

Súradnica tenzora $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ s indexmi p, q teda je:

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) : \mathbf{i}_q \mathbf{i}_p = \pm \sum_{k,\, l} a_1^k a_2^l \, (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_m \pm \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n) : \mathbf{i}_q \mathbf{i}_p = \pm (a_1^k a_2^l - a_1^l a_2^k),$$

pričom permutácia čísel l, k, p, q je párna a o znamienku rozhodujú indexy prvé. Napr. pre $p = 3$, $q = 4$ máme:

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) : \mathbf{i}_4\mathbf{i}_3 = a_1^2 a_2^1 - a_1^1 a_2^2 .$$

V zmysle predošlých úvah teda v štvorrozmernom časopriestore máme zavedené celkom tieto súčiny vektorov:

1. diadický $\mathbf{a}\mathbf{b}$,
2. skalárny $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}$,
3. antisymetrický $\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}$,
4. komplementárny $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Súčiny $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}$ sú, ako sme ukázali, duálne.

§ 3.

Na niektorých príkladoch teraz ukážme, že na veličiny duálne možno získať určité jednotné hľadisko v trojrozmernom aj v štvorrozmernom priestore použitím antisymetrickej tenzorovej jednotky $\mathbf{K}$.

Hľadajme napr. v trojrozmernom priestore duálnu veličinu k veličine

$$e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r . \tag{2,6}$$

Trojnásobným skalárnym násobením tejto veličiny tenzorom $\mathbf{K}$ (v trojrozmernom priestore) dostávame:

$$(e^{ijk} a_i^p a_j^q a_k^r \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r) \vdots \pm (e^{lmn} \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n) =$$

$$= \mp 6 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} .$$

Správnosť multiplikatívneho faktora ∓ 6 sa ľahko nahliadne. V násobených tenzoroch je totiž len šesť rôznych triád tvaru $\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r$, pretože je šesť možných permutácií indexov 1, 2, 3. Konečne v uvedenom násobení sú od nuly rôzne len tie členy, pre ktoré je $l = r$, $m = q$, $n = p$ a platí $\mathbf{i}_r\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q = -\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r$. Výsledok je v súhlase s tým, ktorý sme získali pri vyšetrovaní nezávislých zložiek veličiny (2,5).

Analogicky by sme postupovali napr. aj v prípade antisymetrickej veličiny (2,7), bolo by ju však treba násobiť tenzorom $\mathbf{K}$ štyrikrát skalárne. Celkom možno povedať:

Duálnu veličinu k danej nájdeme toľkonásobným skalárnym násobením danej veličiny antisymetrickou tenzorovou jednotkou $\mathbf{K}$ *(tretieho alebo štvrtého stupňa, podľa rozmernosti priestoru), ktorého stupňa je daná veličina.*

Poukážme konečne na platnosť niektorých vzťahov. Pretože v štvorrozmernom priestore je súčin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ antisymetrickým tenzorom druhého stupňa, pre jeho skalárne násobenie ľubovoľným vektorom $\mathbf{c}$ platí:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c} = - \mathbf{c} \, . \, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

a priamym výpočtom v zložkách sa možno tiež presvedčiť o správnosti týchto vzorcov:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c} = - \mathbf{a} \, . \, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \, . \, \mathbf{a} , \tag{2,21}$$

t. j. v zmiešanom súčine, komplementárnom a skalárnom, troch vektorov je možné vymeniť komplementárne a skalárne násobenie vektorov, avšak pri nezmenenom poradí vektorov treba zmeniť znamienko súčinu.

Rovnako sa možno presvedčiť, že platí:

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c}] \, . \, \mathbf{d} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 - d_4 \end{vmatrix} , \tag{2,22}$$

pričom znamienko $+$ platí v prípade, že vzorec bol odvodený v systéme zhodne orientovanom so systémom za základ zvoleným, znamienko $-$ v opačnom prípade.

Uvedené vzorce možno však tiež jednoducho dokázať iným spôsobom. Pretože tenzor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je určený determinantom (2,19), platí:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \end{vmatrix} . \, (c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 + c_4\mathbf{i}_4)$$

Pretože v determinante na pravej strane treba príslušné násobenia medzi jednotkovými vektormi $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ vykonať diadicky a tenzor, ktorý tento determinant predstavuje, treba násobiť vektorom $\mathbf{c}$ skalárne sprava, treba pri uvedenom skalárnom násobení násobiť skalárne druhý riadok determinantu. Teda je:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix} . \tag{2,23}$$

Z toho teda ihneď vyplýva:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \,.\, \mathbf{a} = \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 - b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 - a_4 \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_4 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = - \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Tým je vzorec (2,21) dokázaný.

Správnosť vzorca (2,22) vyplýva okamžite z rovnice (2,23), ak v determinante v nej vystupujúcom posledný riadok násobíme skalárne vektorom **d**.

Záverom vyslovujem vďaku akademikovi D. Ilkovičovi za jeho hodnotné pripomienky, na základe ktorých vznikla táto práca.

Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

Došlo 20. VII. 1954.

LITERATÚRA

1. A. Sommerfeld: Ann. d. Phys. 32, 749, 1910, 33, 649, 1910.
2. Cl. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik III/1. 1932.
3. P. K. Raševskij: Rimanova geometria i tenzornij analiz, 1953.
4. H. V. Craig: Vector and Tensor Analysis, 1943.
5. I. M. Gelfand: Lineární algebra, 1950 (Lekcii po linejnoj algebre).
6. D. Ilkovič: Vektorový počet, 1950.

К ИЗУЧЕНИЮ ВЕКТОРНОЙ АЛЬГЕБРЫ МИНКОВСКОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Иозеф Гарай

Выводы

В первом разделе вводится радиусвектор в Минковского четырехмерном пространстве в виде:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 + a_4\mathbf{i}_4,$$

где векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$ образуют ортогональную систему и удовлетворяют уравнениям $\mathbf{i}_1 . \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 . \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 . \mathbf{i}_3 = 1$, $\mathbf{i}_4 . \mathbf{i}_4 = -1$. Во втором разделе исследуются дуальные величины и создаются понятия: антисиметрическое и коплементарное произведение двух векторов и ищутся некоторые соотношения между ними.