P 3a: Для любых различных элементов $b, b' \in B$ и для всякого x, y $(x \in A_b, y \in A_{b'}, xry)$ справедливо отношение $b <_B b'$.

P 3b: Для любых различных элементов $b, b' \in B$, $A_b \cap A_{b'} = 0$.

P 4a: Для $b, b' \in B$ и для x, y $(x \in A_b, y \in A_{b'}, y \notin A_b, xry)$ справедливо $b <_B b'$.

P 4b: Для $b, b' \in B$ и для x, y $(x \in A_b, x \notin A_{b'}, y \in A_{b'}, xry)$ справедливо $b <_B b'$.

В статье доказано, что из условий **P 1, P 2, P 3a, P 3b** следует, что множество S с отношением E_r (заданным по отношению эквивалентности $xE_ry \Leftrightarrow xry$ или $x = y$) изоморфно с произведением AxB. Далее показано, что из условий **P 1, P 2, P 3a** следует, что упомянутое отношение частично упорядочено на S; если $A(\leq)$, $B(\leq_B)$ структуры, то и $S(E_r)$ структура. Наконец показано, что также из условий **P 1, P 2, P 4a** следует, что E_r частично упорядочено на S; если кроме того имеет еще место **P 4b** и если $A(\leq)$, $B(\leq_B)$ структуры, то $S(E_r)$ также структура.

TOPOLOGICKÉ GRUPOIDY

ROBERT ŠULKA, Bratislava

Podobne ako definujeme topologickú grupu, môžeme definovať aj topologický grupoid a dokázať platnosť viet podobných vetám pre topologické grupy. Keďže však pri topologickom grupoide nemáme jednotku a nemáme ani jednotkovú grupu ako pri topologických grupách, dôkazy pri topologických grupoidoch v niektorých prípadoch sa musia robiť iným spôsobom. V ďalšom uvádzam definíciu topologického grupoidu a dôkazy niektorých viet o topologických grupoidoch.

Množinu, ktorá neobsahuje žiaden prvok, budeme označovať $\emptyset$ a budeme jej hovoriť prázdna množina. Nech G znamená vždy neprázdnu množinu v celej tejto práci.

Majme množinu G. Každej usporiadanej dvojici prvkov $a, b \in G$ nech je priradený nejaký prvok $c \in G$, ktorý označujeme $c = ab$ a nazývame ho súčinom prvkov a a b. Takúto množinu G spolu s uvedeným násobením nazývame grupoidom.

Nech je daná množina G. Σ nech je systém jej podmnožín, ktoré spĺňajú tieto podmienky:

a) Pre každé dva rôzne prvky a a b z G existuje množina U zo systému Σ taká, že $a \in U$, $b \notin U$.

b) Pre každé dve množiny U a V systému Σ, ktoré obsahujú prvok $a \in G$, existuje množina W zo systému Σ, ktorá je taká, že $a \in W \subset U \cap V$.

Potom množinu G nazývame topologickým priestorom a systém Σ úplným systémom okolí priestoru G.

Dohodnime sa, že úplný systém okolí v G budeme stále označovať Σ.

Otvorené množiny topologického priestoru G sú prázdna množina a všetky množiny, ktoré sú súčtom množín zo Σ.

Keď $a \in U \in \Sigma$, potom U nazývame okolím prvku a.

Definícia 1: *Množinu G nazývame topologickým grupoidom, ak platí:*

1. *G je grupoidom,*
2. *G je topologickým priestorom,*
3. *keď a a b sú dva prvky množiny G, potom pre každé okolie W prvku ab existuje okolie U prvku a a okolie V prvku b také, že $UV \subset W$.*

V ďalšom, keď budeme hovoriť o topológii na nejakom podpriestore G' topologického priestoru G, pod touto topológiou budeme rozumieť relatívnu topológiu. Pritom úplný systém okolí Σ' podpriestoru G' tvoria všetky neprázdne preniky všetkých okolí $U \in \Sigma$ s množinou G'.

Veta 1: *Nech G je topologický grupoid a G' jeho podgrupoid. Potom G' je tiež topologickým grupoidom.*

Dôkaz: Množina G' je grupoidom (pozri [1]) a tiež topologickým podpriestorom topologického priestoru G (pozri [2]). Úplný systém okolí Σ' priestoru G' sa skladá zo všetkých neprázdnych prenikov všetkých okolí U z úplného systému okolí priestoru G s množinou G'. Teda body 1. a 2. našej definície sú splnené. Ukážeme ďalej, že aj bod 3. je splnený. Majme okolie W^* prvku $ab \in G'$. Potom toto je prenikom nejakého okolia W prvku ab s G', teda $W^* = W \cap G'$. Keď zoberieme okolie W prvku ab, existuje okolie U prvku a a okolie V prvku b také, že $UV \subset W$, ale z toho vyplýva, že $UV \cap G' \subset W \cap G' = W^*$, avšak $UV \cap G' \supset (U \cap G')(V \cap G') = U^*V^*$ a teda existuje okolie U^* prvku a a V^* prvku b také, že $U^*V^* \subset W^*$.

Veta 2: *Nech G je topologický grupoid, G' a G'' dva jeho také podgrupoidy, že $G' \cap G'' \neq \emptyset$. Potom $G' \cap G''$ je tiež topologickým grupoidom.*

Dôkaz: Vyplýva z toho, že $G' \cap G''$ je tiež grupoidom a z predošlej vety.

Neprázdny systém $[G]$ neprázdnych podmnožín v G, z ktorých každé dve sú disjunktné, voláme rozkladom v G. Prvky rozkladu $[G]$ nazývame triedami.

Keď rozklad $[G]$ je taký, že každý prvok množiny G je obsažený v niektorej triede rozkladu $[G]$, potom hovoríme, že rozklad $[G]$ je na množine G.

Dohodnime sa, že triedy $X \in [G]$ (t. j. prvky z $[G]$) budeme označovať tým istým písmenom ako množinu $X \subset G$ tých prvkov $x \in G$, ktoré sú prvkami triedy X. V ďalšom nemôže z toho vzniknúť nedorozumenie.

Definícia 2: *Majme topologický priestor G a v ňom rozklad $[G]$. Tento nech má takéto vlastnosti:*

1. *Množina $X \subset G$, keď trieda $X \in [G]$ je uzavretá.*
2. *Nech U je ľubovoľné okolie zo Σ. Potom súčet všetkých množín X, keď trieda $X \in [G]$, ktorých prenik s množinou U je neprázdny, je otvorená množina.*

Potom rozklad $[G]$ nazývame topologickým rozkladom.

Poznámka: Obidve požadované vlastnosti sú splnené pri topologických faktorových grupách (pozri [2]).

Príklad 1: Nech G je množina všetkých reálnych čísel väčších ako 0. Nech násobením v G je obyčajné sčítanie kladných reálnych čísel a systém okolí Σ v G nech tvoria všetky otvorené intervaly z G.

Zrejme je G pri tomto násobení grupoidom a systém Σ zrejme spĺňa podmienky požadované od úplného systému okolí Σ v G, teda G je topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí Σ.

Ďalej ku každému okoliu W prvku $ab \in G$ existuje také okolie U prvku a a také okolie V prvku b, že $UV \subset W$ a teda G je dokonca topologickým grupoidom.

Definujme si rozklad $[G]$ na G takto: Nech $\alpha \in (0, 1\rangle$. Nech potom množina A čísel $\alpha + k$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$ je triedou rozkladu $[G]$. Rozklad $[G]$ je topologickým rozkladom na G, pretože každá trieda $X \in [G]$ je zrejme uzavrenou množinou a $\underset{X \in [G]}{UX}$, kde $X \cap U \neq \emptyset$ a U je ľubovoľné okolie zo Σ je otvorenou množinou.

Príklad 2: Nech G je topologický grupoid z predchádzajúceho príkladu. Definujme si rozklad $[G]$ na G takto: Nech α je racionálne číslo a $\alpha \in (0, \infty)$. Nech potom $[X = \{\alpha\}]$ je triedou rozkladu $[G]$. Nech ďalej α je iracionálne číslo a $\alpha \in (0, 1)$. Nech potom $X = \{\alpha, \alpha + 1, \ldots\}$ je triedou rozkladu $[G]$.

Ukážeme, že rozklad $[G]$ nie je topologickým rozkladom. Rozklad $[G]$ spĺňa síce prvú podmienku topologického rozkladu (všetky triedy sú uzavreté množiny), ale nespĺňa druhú podmienku topologického rozkladu. Nech $A = \{\alpha, \alpha + 1, \ldots\}$, α iracionálne, $\alpha \in (0, 1)$, nech U je ľubovoľné okolie zo Σ, rôzne od $(0, \infty)$. Potom $\underset{X \in [G]}{UX}$, pre ktoré $U \cap X \neq \emptyset$ nie je otvorená množina; obsahuje totiž množinu $U = (a, b)$ a iracionálne čísla z intervalov $(a + k, b + k)$, kde k sú celé čísla.

Definícia 3: *Nech $U \in \Sigma$. Nech $[G]$ je topologický rozklad v G. Pod znakom U^* budeme rozumieť množinu všetkých tried $X \in [G]$, pre ktoré je v množinovom zmysle $X \cap U \neq \emptyset$. Systém všetkých takto získaných množín budeme značiť Σ^*.*

Veta 3: *Nech G je topologický priestor a $[G]$ topologický rozklad v G. Potom je $[G]$ topologickým priestorom, pričom je Σ^* úplným systémom okolí v $[G]$.*

Dôkaz: Nech A a B sú ľubovoľné triedy rozkladu $[G]$. Treba dokázať, že existuje taká množina $U^* \in \Sigma^*$, ktorá obsahuje triedu A a neobsahuje triedu B. (Inými slovami: existuje okolie U^* triedy A, ktoré neobsahuje triedu B). Množina B je uzavretá. Jej komplement $G - B$ je teda množina otvorená a obsahuje všetky prvky množiny A. Vyberme si ľubovoľný prvok $a \in A$. Pretože $a \in A \subset G - B$, kde $G - B$ je otvorená množina, z vlastností úplného systému okolí Σ vyplýva, že existuje také okolie $U \in \Sigma$, pre ktoré $a \in U \subset G - B$, teda $U \cap B = \emptyset$. Zoberme teraz $U^* \in \Sigma^*$. Pretože $a \in A$ a $a \in U$ je $A \cap U \neq \emptyset$, teda $A \in U^*$. Pretože $U \cap B = \emptyset$, je $B \notin U^*$.

Majme ľubovoľnú triedu $A \in [G]$ a dve jej okolia U^* a V^*. Potom existujú také okolia U a V zo Σ, že U^* je množinou všetkých tried X rozkladu $[G]$, ktorých množiny X majú s U neprázdny prenik a V^* je množina všetkých tých tried Y rozkladu $[G]$, ktorých množiny Y majú neprázdny prenik s V. Súčet $\underset{X \in U^*}{UX}$ a tiež súčet $\underset{Y \in V^*}{UY}$ sú na základe predpokladu otvorené množiny v G. Ich prenik $\underset{X \in U^*}{UX} \cap \underset{Y \in V^*}{UY} \neq \emptyset$ je tiež otvorenou množinou v G a obsahuje celú množinu A. Keď si teraz vyberieme ľubovoľný prvok $a \in A \subset \underset{X \in U^*}{UX} \cap \underset{Y \in V^*}{UY}$, kde $\underset{X \in U^*}{UX} \cap \underset{Y \in V^*}{UY}$ je otvorená množina v G, z vlastností úplného systému okolí Σ priestoru G vyplýva, že existuje také okolie $W \in \Sigma$, že $a \in W \subset \underset{X \in U^*}{UX} \cap \underset{Y \in V^*}{UY}$. Zoberme teraz okolie $W^* \in \Sigma^*$. Pretože $a \in A$ a $a \in W$ je $A \cap W \neq \emptyset$ a $A \in W^*$. W^* je teda okolím triedy A. Nech Z je ľubovoľná taká trieda rozkladu $[G]$, že $Z \cap W \neq \emptyset$. Potom platí $\emptyset \neq Z \cap W \subset Z \cap (\underset{X \in U^*}{UX} \cap \underset{Y \in V^*}{UY})$. Z toho vyplýva, že $Z \cap \underset{X \in U^*}{UX} \neq \emptyset$ a tiež $Z \cap \underset{Y \in V^*}{UY} \neq \emptyset$. No z definície rozkladu vyplýva, že Z je totožné s nejakou triedou $X \in U^*$ a s nejakou triedou $Y \in V^*$, čiže pre každé $Z \in W^*$ platí $Z \in U^*$ a $Z \in V^*$. Preto $W^* \subset U^* \cap V^*$ a veta je dokázaná.

Príklad 3: Nech G je topologický grupoid a [G] topologický rozklad z príkladu 1. Z vety 3 vyplýva, že $[G]$ je potom topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí Σ^*.

Príklad 4: Nech G je topologický grupoid a $[G]$ rozklad z príkladu 2 (tento rozklad nie je topologickým rozkladom). Ukážeme, že ak Σ^* považujeme za úplný systém okolí v $[G]$, nie je splnená druhá podmienka, ktorú sme kládli na úplný systém okolí Σ^*. Teda Σ^* nie je úplným systémom okolí v [G] a $[G]$ nie je pri tomto systéme okolí topologickým priestorom.

Nech $A = \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots\}$, α iracionálne, $\alpha \in (0, 1)$. Nech $A \in U^*$ a $A \in V^*$, pričom nech $U \cap V = \emptyset$. Potom medzi triedami $X \in U^*$ sú tiež triedy $X = \{\alpha\}$, α racionálne, $\alpha \in U$ a medzi triedami $Y \in V^*$ sú triedy $Y = \{\beta\}$, β racionálne, $\beta \in V$. Avšak pretože $U \cap V = \emptyset$, pre každé okolie $W \in \Sigma$ platí, že W^* obsahuje triedy $Z = \{\gamma\}$ rôzne buď od tried X alebo od tried Y. Teda pre žiadne W^* neplatí $W^* \subset U^* \cap V^*$, čo sme mali dokázať.

Nech zobrazenie f topologického priestoru G do topologického priestoru G^* je také, že pre každý prvok $a \in G$ a každé okolie U^* prvku $a^* = f(a)$ z G^* existuje okolie U prvku a také, že $f(U) \subset U^*$. Potom takému zobrazeniu hovoríme, že je spojité.

Nech zobrazenie f topologického priestoru G do topologického priestoru G^* je také, že pre každý prvok $a \in G$ a každé okolie V prvku a existuje také okolie V^* prvku $f(a) = a^*$, že $V^* \subset f(V)$. Potom hovoríme, že zobrazenie f je otvorené.

Veta 4: *Nech G je topologický priestor a $[G]$ topologický rozklad na G, ktorý je teda tiež topologickým priestorom. Priraďme každému prvku $x \in G$ triedu $X = f(x)$ z topologického priestoru $[G]$, ktorá obsahuje prvok x. Zobrazenie f topologického priestoru G do topologického priestoru $[G]$ je potom spojité, otvorené zobrazenie.*

Dôkaz: Dokážeme najprv, že zobrazenie f je spojité. Majme ľubovoľný prvok $a \in G$ a ľubovoľné okolie U^* triedy $A = f(a) \in [G]$. Potom $a \in A$. K U^* existuje také okolie $U \in \Sigma$, že prvkami okolia U^* sú všetky tie triedy X z $[G]$, pre ktoré $X \cap U \neq \emptyset$. Súčet týchto množín X sa dá písať $\bigcup_{X \in U^*} X$. Pretože $a \in A \in U^*$ je $a \in \bigcup_{X \in U^*} X$, a pretože podľa predpokladu množina $\bigcup_{X \in U^*} X$ je otvorená, existuje okolie V prvku a také, že $V \subset \bigcup_{X \in U^*} X$ a $V \in \Sigma$. Všetky prvky $x \in V$ sa zobrazia v zobrazení f do tých tried X rozkladu, ktorých množiny X majú s okolím V aspoň jeden prvok spoločný, teda ktorých množiny X majú s V neprázdny prenik. Pretože však $V \subset \bigcup_{X \in U^*} X$ môže mať V neprázdny prenik iba s množinami X, kde $X \in U^*$, a preto je $f(V) \subset U^*$.

Ďalej dokážeme, že zobrazenie f je otvorené. Zoberme si ľubovoľný prvok $a \in G$ a V nech je ľubovoľné jeho okolie. V zobrazení f prvok a sa zobrazí do triedy $A = f(a)$, o ktorej platí, že $a \in A$. Okolie V prvku a sa zobrazí do množiny $f(V)$ tých tried X z $[G]$, ktorých množiny X obsahujú aspoň jeden prvok $x \in V$, teda ktorých množiny X majú s V neprázdny prenik. Táto množina $f(V) = V^*$ je však okolím z úplného systému okolí Σ^* priestoru $[G]$. Pretože $a \in A$ a súčasne $a \in V$, je $A \cap V \neq \emptyset$. Teda $A \in V^*$ a V^* je okolím triedy A. Teda existuje okolie V^* triedy $A = f(a)$ také, že $V^* \subset f(V)$ a veta je dokázaná.

Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby zobrazenie f topologického priestoru G do topologického priestoru G^* bolo spojité, je splnenie jednej z nasledujúcich podmienok:

1. Keď F^* je uzavretá množina z G^*, potom množina F všetkých vzorov prvkov z F^* v zobrazení f je uzavretou množinou v G.
2. Keď H^* je otvorená množina z G^*, potom množina H všetkých vzorov prvkov z H^* v zobrazení f je otvorená množina v G (pozri [2]).

Veta 5: *Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby zobrazenie f (z vety 4) topologického priestoru G na rozklad $[G]$ na G bolo spojité, je, aby rozklad $[G]$ bol topologickým rozkladom.*

Dôkaz: $A \in [G]$ je uzavretá množina v $[G]$, teda $A \subset G$ ako množina všetkých vzorov triedy A v zobrazení f musí byť uzavretá.

U^* je otvorená množina v $[G]$, teda $\bigcup_{X \in U^*} X \subset G$ ako množina všetkých vzorov tried $X \in U^*$ v zobrazení f musí byť otvorená.

Že podmienka je postačujúca, vyplýva to z vety 4.

Nech A a B sú ľubovoľné triedy rozkladu $[G]$. Nech súčin AB množín A a B je taký, že $AB \subset C$, kde C je nejaká trieda z $[G]$. Potom hovoríme, že rozklad $[G]$ je v y t v á r a j ú c i. Každej usporiadanej dvojici tried A, B vytvárajúceho rozkladu $[G]$ možno priradiť jedinú triedu $C = A \odot B$, a to tú, o ktorej platí, že $AB \subset C$. Týmto je v množine $[G]$ definované násobenie a množina $[G]$ spolu s týmto násobením je grupoidom, ktorému hovoríme f a k t o r o i d.

V ďalšom súčin tried A a B budeme označovať stále znakom $A \odot B$ na rozdiel od symbolu AB, ktorý bude značiť množinu všetkých súčinov ab, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Príklad 5: Rozklad $[G]$ z príkladu 1 je vytvárajúcim rozkladom. Nech $A = \{\alpha, \alpha + 1, \ldots\}$ a $B = \{\beta, \beta + 1, \ldots\}$, kde $\alpha, \beta \in (0, 1\rangle$. Každý prvok z AB sa dá písať $(\alpha + k) + (\beta + l) = (\alpha + \beta) + (k + l) = \gamma + n$, kde $\gamma \in (0, 2\rangle$ a n je celé číslo, teda každý prvok z AB je prvkom tej istej triedy $C \in [G]$, t. j. $AB \subset C$.

Príklad 6: Rozklad $[G]$ z príkladu 2 je tiež vytvárajúcim rozkladom. Nech $A = \{\alpha\}$, $B = \{\beta\}$, α, β racionálne, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Potom $AB = \{\gamma\}$, $\gamma = \alpha + \beta$, γ racionálne, $\gamma \in (0, \infty)$. Nech $A = \{\alpha, \alpha + 1, \ldots\}$, $B = \{\beta, \beta + 1, \ldots\}$, α, β iracionálne, $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Potom AB je množina prvkov $\gamma + n$, $\gamma = \alpha + \beta$, γ iracionálne, $\gamma \in (0, 2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Nech $A = \{\alpha\}$, $B = \{\beta, \beta + 1, \ldots\}$, α racionálne, $\alpha \in (0, \infty)$, β iracionálne, $\beta \in (0, 1)$. Potom AB je množina prvkov $\gamma + n$, $\gamma = \alpha + \beta$, γ iracionálne, $\gamma \in (0, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. V každom prípade teda AB je časťou ďalšej triedy C a $[G]$ je preto vytvárajúcim rozkladom.

Veta 6: *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ vytvárajúci topologický rozklad v G. Potom faktoroid $[G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ^* (pozri definíciu 3).*

Dôkaz: Že $[G]$ je grupoidom, to je zrejmé. Že je topologickým priestorom, to vyplýva z vety 3. Zostáva ešte ukázať, že keď W^* je ľubovoľné okolie triedy $A \odot B = C$, potom existuje také okolie U^* triedy A a také okolie V^* triedy B, že $U^* V^* \subset W^*$.

Nech W je to okolie zo Σ, že W^* tvoria všetky tie triedy Z, pre ktoré $Z \cap W \neq \emptyset$. $\bigcup_{Z \in W^*} Z$ je na základe predpokladu otvorená množina a $W \subset \bigcup_{Z \in W^*} Z$. Pretože $C \in W^*$ je tiež $C \subset \bigcup_{Z \in W^*} Z$. Nech ab je ľubovoľný prvok z C taký, že $a \in A$ a $b \in B$. (Taký určite existuje, pretože $AB \neq \emptyset$.) Pretože $\bigcup_{Z \in W^*} Z$ je otvorená a $ab \in \bigcup_{Z \in W^*} Z$, existuje také okolie $W' \in \Sigma$, že $ab \in W' \subset \bigcup_{Z \in W^*} Z$. Pretože G je topologický grupoid, existuje okolie U prvku $a \in A$ a okolie V prvku $b \in B$také, že $UV \subset W'$. Vezmime U^* a V^*. Potom $\emptyset \neq (X \cap U)(Y \cap V) \subset XY \cap UV \subset X \odot Y \cap UV \subset X \odot Y \cap W'$ pre každé $X \in U^*$ a $Y \in V^*$. Teda pre každé $X \in U^*$ a $Y \in V^*$ je $X \odot Y \cap W' \neq \emptyset$, a preto $X \odot Y \in W'^*$ čiže $U^* V^* \subset W'^*$. Pretože však

$W \subset \bigcup_{Z \in W^*} Z$, je $W'^* \subset W^*$. Z toho ďalej vyplýva, že $U^* V^* \subset W^*$, čo sme mali dokázať.

Definícia 5: *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ vytvárajúci topologický rozklad v G. Potom topologický grupoid $[G]$ pri úplnom systéme okolí Σ^* nazývame topologickým faktoroidom v G.*

Príklad 7: Rozklad $[G]$ z príkladu 5 je na základe vety 6 a definície 5 topologickým faktoroidom pri úplnom systéme okolí Σ^*.

Príklad 8: Rozklad $[G]$ z príkladu 6 je síce vytvárajúcim rozkladom topologického grupoidu G a je teda faktoroidom v zmysle algebraickom, ale keďže $[G]$ nie je topologickým rozkladom, nie je $[G]$ topologickým faktoroidom v našom slova zmysle.

Zobrazenie f grupoidu G do grupoidu G^*, ktoré zachováva násobenie (t. j. pre ktoré platí, že ak a a b sú ľubovoľné prvky z G, potom $f(a) \odot f(b) = f(ab)$) nazývame homomorfným zobrazením. Ak f je zobrazenie G na G^*, potom hovoríme, že G^* je homomorfný s grupoidom G.

Homomorfné zobrazenie f grupoidu G na grupoid G^*, ktoré je prosté (t. j. jedno-jednoznačné zobrazenie) voláme izomorfným zobrazením. O grupoide G^* potom hovoríme, že je izomorfný s grupoidom G.

Zobrazenie f topologického priestoru G na topologický priestor G^* je homeomorfné alebo topologické, keď je prosté a obojstranne spojité (t. j. ak f aj f^{-1} je spojité).

Nech f je zobrazenie množiny G do množiny G^*. Potom toto zobrazenie definuje určitý rozklad $[G]$ na množine G, pričom každú triedu rozkladu $[G]$ tvoria všetky vzory v zobrazení f určitého prvku z G^*. Keď G a G^* sú grupoidy a f je homomorfné zobrazenie G do G^*, potom rozklad $[G]$ je faktoroidom na G (po ri [1]).

Keď grupoid G^* je homomorfný s grupoidom G, potom je izomorfný s istým faktoroidom na G (pozri [1]), a to s tým, ktorý vytvára na G rozklad $[G]$ definovaný homomorfným zobrazením G na G^*.

Definícia 6: *Nech zobrazenie f je zobrazenie topologického grupoidu G do topologického grupoidu G^*, o ktorom platí:*

1. *Zobrazenie f je homomorfné zobrazenie grupoidu G do grupoidu G^*.*
2. *Zobrazenie f je spojité zobrazenie topologického priestoru G do topologického priestoru G^*.*

Potom zobrazenie f nazývame homomorfným zobrazením topologického grupoidu G do topologického grupoidu G^*. Ak zobrazenie f je ešte naviac zobrazením G na G^*, hovoríme, že G^* je homomorfné s G.

Definícia 7: *Nech f je zobrazenie topologického grupoidu G na topologický grupoid G^*, o ktorom platí:*

1. *Zobrazenie f je izomorfné zobrazenie grupoidu G na grupoid G^*.*

2. *Zobrazenie f je homeomorfné zobrazenie topologického priestoru G na topologický priestor G^*.*

Potom zobrazenie f nazývame izomorfným zobrazením topologického grupoidu G na topologický grupoid G^* a hovoríme, že topologický grupoid G^* je izomorfný s topologickým grupoidom G.

Veta 7: *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ topologický faktoroid na G. Priraďme každému prvku $x \in G$ triedu $X = f(x) \in [G]$, ktorá obsahuje prvok x. Potom zobrazenie f topologického grupoidu G na topologický faktoroid $[G]$ je homomorfné a otvorené zobrazenie.*

Dôkaz: Že zobrazenie f je spojité a otvorené zobrazenie topologického priestoru G do topologického priestoru $[G]$, vyplýva z vety 4. Stačí ešte dokázať, že je homomorfným zobrazením grupoidu G do grupoidu $[G]$, t. j., že zachováva násobenie. Nech a a b sú ľubovoľné dva prvky z G. Potom $f(a) = A$, $f(b) = B$, kde A a B sú tie triedy z $[G]$, pre ktoré $a \in A$ a $b \in B$. Označme C tú triedu z $[G]$, ktorá je súčinom usporiadanej dvojice tried A a B z $[G]$, takže $C = A \odot B$ a medzi množinami A, B, C platí vzťah $AB \subset C$. Potom $ab \in AB \subset C$, teda $ab \in C$ a ďalej $f(ab) = C = A \odot B = f(a) \odot f(b)$. Z toho vyplýva, že $f(a) \odot f(b) = f(ab)$ a veta je dokázaná.

Otvorené zobrazenie topologického priestoru G do topologického priestoru G^* má tú vlastnosť, že každá otvorená množina $U \subset G$ sa zobrazí do otvorenej množiny v G^* (pozri [2]).

Poznámka: Vo vete 8 budeme výnimočne pod znakom U^*, V^* a Σ^* rozumieť niečo iného, ako čo sme zaviedli v definícii 3. Σ^* nech má obidve vlastnosti, ktoré sme vyžadovali od systému Σ.

Veta 8: *Nech G a G^* sú dva topologické grupoidy. Nech Σ a Σ^* sú ich úplné systémy okolí Σ v G a Σ^* v G^*. Nech f je otvorené homomorfné zobrazenie grupoidu G na grupoid G^* a $[G]$ rozklad grupoidu G príslušný k zobrazeniu f. Potom topologický grupoid G^* je izomorfný s topologickým faktoroidom $[G]$.*

Dôkaz: Máme dokázať, že sú splnené body 1. a 2. definície 7. Bod 1. je splnený. $[G]$ je totiž faktoroidom na G a grupoid G^* je s ním izomorfný. Poznamenajme pritom ešte, že každá trieda faktoroidu $[G]$ sa skladá zo všetkých vzorov jedného prvku z G^* v zobrazení f a izomorfné zobrazenie g grupoidu $[G]$ na grupoid G^* je také, že pre každé $A \in [G]$ a každé $a \in A$ je $g(A) = f(a) = a^* \in G^*$. Aby sme dokázali bod 2., zostáva nám dokázať, že $[G]$ je topologickým grupoidom a že zobrazenie g je obojstranne spojité. Jedno-jednoznačnosť zobrazenia g totiž vyplýva z dôkazu bodu 1.

Dokážeme najprv, že $[G]$ je topologickým grupoidom. Zoberme si ľubovoľnú triedu X rozkladu $[G]$. X je množinou všetkých vzorov v zobrazení f nejakého prvku $x^* \in G^*$. Pretože f je spojité zobrazenie priestoru G na G^*, je $f^{-1}(x^*) = X$ uzavretou množinou v G.

Nech U je ďalej ľubovoľné okolie zo Σ, U_0 nech je množina všetkých tried

$X \in [G]$, pre ktoré $X \cap U \neq \emptyset$. Pretože U je otvorená množina v G a f je otvorené zobrazenie, $f(U)$ je otvorenou množinou v G^*. Pretože súčet množín X, kde X je taká trieda z $[G]$, že $X \in U_0$, je množinou všetkých vzorov v zobrazení f prvkov z $f(U) \in G^*$ a pritom f je spojité zobrazenie a $f(U)$ otvorenou množinou v G^* je $\bigcup_{X \in U_0} X$ otvorenou množinou v G. Teda je rozklad $[G]$ topologickým rozkladom. Z homomorfizmu grupoidu G^* s grupoidom G vyplýva, že rozklad $[G]$ je vytvárajúcim. Teda $[G]$ je vytvárajúcim topologickým rozkladom a na základe vety 6 z toho vyplýva, že $[G]$ je topologickým grupoidom.

Teraz dokážeme, že zobrazenie g je spojité. Nech A je ľubovoľná trieda z $[G]$. Táto sa zobrazí na prvok $g(A) = a^* \in G^*$, pričom pre každé $a \in A$ je $f(a) = g(A) = a^*$. Nech U^* je ľubovoľné okolie prvku a^*. Treba dokázať, že existuje okolie V_0 triedy A také, že pri zobrazení g je $g(V_0) \subset U^*$. Pretože pre $a \in A$ je $f(a) = a^*$ a zobrazenie f je spojité, existuje také okolie V prvku a, že $f(V) \subset U^*$. Keď V_0 je množina všetkých tých tried X z $[G]$, pre ktoré $X \cap V \neq \emptyset$ je $g(V_0) = f(V) \subset U^*$ a teda $g(V_0) \subset U^*$.

Nakoniec si dokážeme, že aj zobrazenie G^* na $[G]$; t. j. g^{-1} je spojité. Nech a^* je ľubovoľný prvok z G^*. Tento sa zobrazí v zobrazení g^{-1} do triedy $g^{-1}(a^*) = A \in [G]$, kde pre každé $a \in A$ platí $f(a) = a^*$. Nech U_0 je ľubovoľné okolie triedy A. Dokážeme, že existuje okolie V^* prvku a^* také, že $g^{-1}(V^*) \subset U_0$. K U_0 existuje také $U \in \Sigma$, že U_0 tvoria práve všetky tie triedy z $[G]$, pre ktoré $X \cap U \neq \emptyset$. Nech $a \in U \cap A$. Potom U je okolím prvku a. Pretože zobrazenie f je otvorené, existuje také okolie V^* prvku $a^* = f(a)$, že $V^* \subset f(U)$. Pretože U_0 je množinou tých tried $X \in [G]$, pre ktoré $X \cap U \neq \emptyset$, je $g^{-1}(f(U)) = U_0$ a teda $g^{-1}(V^*) \subset g^{-1}(f(U)) = U_0$ čiže $g^{-1}(V^*) \subset U_0$, čo sme mali dokázať.

Nech G je množina, $[G]$ rozklad v G a podmnožina $G' \subset G$ nech je taká, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Potom množinu všetkých tried $X \in [G]$, pre ktoré $X \cap G' \neq \emptyset$ nazývame obalom podmnožiny G' v rozklade $[G]$. Označujeme ho $G' \sqsubset [G]$. Keď množina G je grupoidom, jej podmnožina G' je podgrupoidom v G a $[G]$ vytvárajúcim rozkladom, potom $G' \sqsubset [G]$ je tiež grupoidom. $G' \sqsubset [G]$ je podgrupoidom grupoidu $[G]$ (pozri [1]).

Definícia 8: *Nech $[G]$ je topologický faktoroid v G a G' taký podgrupoid v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Nech $U^* \in \Sigma^*$ (pozri definíciu 3) je také, že $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Označme U' množinu tried $X \in U^*$, pre ktoré $X \cap G' \neq \emptyset$. Systém všetkých takýchto množín budeme značiť Σ'.*

Veta 9: *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ topologický faktoroid v G. G' nech je taký podgrupoid v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Potom $G' \sqsubset [G]$ je topologickým grupoidom a Σ' jeho úplným systémom okolí.*

Dôkaz: $[G]$ je topologickým grupoidom. Množina $G' \sqsubset [G]$ ako množina tých tried X z $[G]$, pre ktoré $X \cap G' \neq \emptyset$ je podmnožinou topologického grupoidu

$[G]$ a je podgrupoidom grupoidu $[G]$. Z vety 1 teda vyplýva, že $G' \sqsubset [G]$ je tiež topologickým grupoidom.

Nech G je množina, $[G]$ rozklad množiny G a podmnožina $G' \subset G$ nech je taká, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Potom systém všetkých neprázdnych prenikov množín $X \subset G$, pre ktoré $X \in [G]$ s množinou G' nazývame prenikom podmnožiny G' s rozkladom $[G]$. Je to zrejme rozklad v G'. Označujeme ho $G' \sqcap [G]$. Keď množina G je grupoidom, jej podmnožina G' je podgrupoidom v G a $[G]$ vytvárajúcim rozkladom, potom $G' \sqcap [G]$ je tiež grupoidom (pozri [1]).

Dohodnime sa, že triedy $X'' \in G' \sqcap [G]$ ako prvky z $G' \sqcap [G]$, kde množina $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $X \in [G]$, budeme značiť tým istým znakom ako množinu $X'' \subset G$, pre ktorú platí, že $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$.

Definícia 9: *Nech $[G]$ je topologický faktoroid v G a G' taký podgrupoid v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Nech $U^* \in \Sigma^*$ (pozri definíciu 3) také, že $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Označme U'' množinu všetkých tried $X'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré množina $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $X \in U^*$. Systém všetkých takýchto množín budeme značiť Σ''.*

Veta 10: *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ topologický faktoroid v G. G' nech je taký podgrupoid v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Potom $G' \sqcap [G]$ je topologickým grupoidom a Σ'' jeho úplným systémom okolí.*

Dôkaz:

1. Že $G' \sqcap [G]$ je grupoidom, to je jasné (pozri [1]). Pre každú triedu $X'' \in G' \sqcap [G]$ platí $X'' = X \cap G'$, kde X je taká množina z G, že trieda $X \in [G]$ a $X \cap G' \neq \emptyset$. Súčinom dvoch tried A'', B'', z $G' \sqcap [G]$ je taká trieda $C'' = A'' \circ B''$, že platí $A''B'' \subset C''$.

2. Dokážeme teraz, že $G' \sqcap [G]$ je topologickým priestorom. Nech A'' a B'' sú dve ľubovoľné triedy z $G' \sqcap [G]$. Potom existujú také triedy A a B z $[G]$, že $A \cap G' = A''$ a $B \cap G' = B''$. Pretože A a $B \in [G]$ a $[G]$ je topologickým priestorom, existuje také okolie U^* triedy A, že $A \in U^*$, avšak $B \notin U^*$. Označme teraz U'' množinu všetkých tried $X'' \in G \sqcap [G]$, pre ktoré $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $X \in U^*$. Pretože $A \in U^*$ a $A \cap G' = A'' \neq \emptyset$ je $A'' \in U''$ a $U'' \in \Sigma''$. Pretože však $B \notin U^*$, je $B'' \notin U''$.

Nech A'' je ľubovoľná trieda z $G' \sqcap [G]$ a U'' a V'' dve jej okolia. Dokážeme, že existuje také okolie W'' triedy A'', že $W'' \subset U'' \cap V''$. Nech A je tá trieda z $[G]$, že $A'' = A \cap G'$ a jej okolia U^* a V^* nech sú také, že U'' je množinou tried $X'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $X \in U^*$ a V'' je množinou tried $Y'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré $Y'' = Y \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $Y \in V^*$. Potom existuje také okolie W^* triedy A, že $A \in W^* \subset U^* \cap V^*$. Označme teraz W'' množinu všetkých tried $Z'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré $Z'' = Z \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $Z \in W^*$. Pretože $A \in W^*$ a $A'' = A \cap G' \neq \emptyset$, je $\bigcup_{Z \in W^*} Z \cap G' \neq \emptyset$, teda $W'' \in \Sigma''$.

Z toho, že $A \in W^*$ a $A'' = A \cap G' \neq \emptyset$, ďalej ešte vyplýva, že $A'' \in W''$ a teda W'' je okolím triedy A''. Pretože pre $Z \in W^* \subset U^* \cap V^*$ je $Z \in U^*$ a tiež $Z \in V^*$, pre každé $Z \in W^*$ platí, že $Z = X = Y$, kde $X \in U^*$ a $Y \in V^*$. Teda je pre každú triedu $Z'' \in W''$, $Z'' = Z \cap G' = X \cap G' = Y \cap G' = X'' = Y''$, kde trieda $X'' \in U''$ a trieda $Y'' \in V''$. Z toho ďalej pre každú triedu Z'' vyplýva, že $Z'' \in U'' \cap V''$, teda $W'' \subset U'' \cap V''$.

3. Nakoniec máme ešte dokázať, že ak $C'' = A'' \odot B'' \in G' \sqcap [G]$ a W'' je ľubovoľné okolie triedy C'', potom existuje také okolie U'' triedy A'' a okolie V'' triedy B'', že $U''V'' \subset W''$. Nech C je tá trieda z $[G]$, že platí $C'' = C \cap G'$ a W^* nech je to okolie zo Σ^*, že W'' je množinou tried $Z'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré $Z'' = Z \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $Z \in W^*$. Pretože $\emptyset \neq C'' = C \cap G'$ a $C'' \in W''$ je $C \in W^*$. Nech A a B sú ďalej tie triedy z $[G]$, že $A'' = A \cap G'$, $B'' = B \cap G'$. Pretože $C'' = C \cap G'$, $A'' = A \cap G'$ a $B'' = B \cap G'$, je $C'' \subset C$, $A'' \subset A$ a $B'' \subset B$. Ďalej platí $A \odot B \supset AB \supset A''B'' \neq \emptyset$ a tiež $A''B'' \subset C'' \subset C$. Na základe toho $A''B'' \subset A \odot B$ a $A''B'' \subset C$. Teda $C \cap A \odot B \neq \emptyset$ a z toho vyplýva, že $C = A \odot B$. Potom existuje v topologickom grupoide $[G]$ také okolie U^* triedy A a také okolie V^* triedy B, že $U^*V^* \subset W^*$. Vezmime U'' a V'' zo Σ''. Pretože $A'' = A \cap G'$ a $B'' = B \cap G'$, kde $A \in U^*$ a $B \in V^*$ je $A'' \in U''$ a $B'' \in V''$. Utvorme si teraz súčin $U''V''$. Pre množiny $X'' \odot Y''$, kde trieda $X'' \in U''$ a trieda $Y'' \in V''$ potom platí $X'' \odot Y'' \supset X''Y'' \neq \emptyset$ a $X''Y'' \subset XY \subset X \odot Y$, pre každé $X'' \in U''$ a $Y'' \in V''$, pričom $X \in U^*$ a $Y \in V^*$. Teda $X'' \odot Y'' \cap X \odot Y \neq \emptyset$, a preto $\emptyset \neq X'' \odot Y'' = (X \odot Y) \cap G'$ pre každé $X'' \in U''$ a $Y'' \in V''$. Pretože $X \in U^*$ a $Y \in V^*$ a $U^*V^* \subset W^*$, je $X \odot Y = Z \in W^*$ a ďalej platí $X'' \odot Y'' = (X \odot Y) \cap G' = Z \cap G' = Z''$, kde trieda $Z'' \in W''$ čiže pre každé $X'' \in U''$ a $Y'' \in V''$ je $X'' \odot Y'' \in W''$. To znamená, že $U''V'' \subset W''$, čo sme mali dokázať.

Obal podgrupoidu $G' \subset G$ vo faktoroide $[G]$ v G (keď $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$) a prenik faktoroidu $[G]$ s podgrupoidom G' sú izomorfné (ako grupoidy). Trieda $X' \in G' \sqsubset [G]$ sa pritom jedno-jednoznačne zobrazí na tú triedu $X'' \in G' \sqcap [G]$, pre ktorú $X'' = X' \cap G'$ (pozri [1]).

Veta 11: *Topologický grupoid $G' \sqsubset [G]$ (z vety 9) a topologický grupoid $G' \sqcap [G]$ (z vety 10) sú izomorfné.*

Dôkaz: $G' \sqsubset [G]$ a $G' \sqcap [G]$ sú izomorfné ako grupoidy. Z toho vyplýva aj jedno-jednoznačnosť zobrazenia $G' \sqsubset [G]$ na $G' \sqcap [G]$, ktoré označme f. Potom pre každé $X' \in G' \sqsubset [G]$ je $f(X') = X'' \in G' \sqcap [G]$, kde množina $X'' = X' \cap G'$. Zostáva nám teda ešte dokázať, že zobrazenie f je obojstranne spojité. Najprv dokážeme, že f je spojité. Nech A' je ľubovoľná trieda z $G' \sqsubset [G]$ a U'' nech je ľubovoľné okolie triedy $f(A') = A'' \in G' \sqcap [G]$, kde $A'' = A' \cap G'$. Treba ukázať, že existuje také okolie U' triedy A', že $f(U') \subset U''$. Predovšetkým si všimnime, že okolie U'' tvoria všetky triedy X'', pre ktoré $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a X je z určitého okolia U^* z úplného systému okolí Σ^* topologického priestoru $[G]$ ($\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$). Za okolie U' vezmime to okolie, ktoré tvoria triedy $X' = X \in U^*$, pre ktoré $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$. Pretože $A'' \in U''$, existuje taká trieda $A \in U^*$, že $A'' = A \cap G' \neq \emptyset$. Potom však trieda $A' = A$ je z U' a U' je okolím triedy A'. Nech X' je ľubovoľná trieda z U', potom $X' = X \in U^*$ a $X \cap G' \neq \emptyset$. Pretože však platí $f(X') = X''$, kde $X'' = X' \cap G' = X \cap G' \neq \emptyset$ a trieda $X \in U^*$ je $f(X') = X'' \in U''$. Z toho vyplýva, že $f(U') \subset U''$.

Teraz ešte dokážeme, že aj zobrazenie f^{-1} je spojité. Zoberme si teda nejakú triedu $A'' \in G' \sqcap [G]$. A' nech je trieda z $G' \sqsubset [G]$, pre ktorú platí $A'' = A' \cap G' \neq \emptyset$, teda $A' = f^{-1}(A)$. U' nech je ľubovoľné okolie triedy A'. Prvkami okolia U' sú triedy $X' = X$ z určitého okolia $U^* \in \Sigma^*$, pre ktoré platí $X \cap G' \neq \emptyset$. Ukážeme, že existuje okolie U'' triedy A'' také, že $f^{-1}(U'') \subset U'$. Za U'' zoberme okolie, ktorého prvkami sú všetky tie triedy X'', pre ktoré $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$ a $X \in U^*$. Pretože $A' \in U'$ je $A' = A \in U^*$ a pretože ďalej $A'' = A \cap G' \neq \emptyset$, je $A'' \in U''$ a teda U'' je okolím triedy A''. Zoberme teraz ľubovoľnú triedu $X'' \in U''$. Pre túto platí $X'' = X \cap G' \neq \emptyset$, kde $X \in U^*$. Z toho však vyplýva, že $X = X' \in U'$, a preto $f(X') = X''$, kde $X'' = X' \cap G' = X \cap G' \neq \emptyset$ a $X' \in U'$. To však znamená, že $f^{-1}(X'') = X' \in U'$, a to pre každé $X'' \in U''$. Teda platí $f^{-1}(U'') \subset U'$.

Došlo 1. VI. 1954.

LITERATÚRA

[1] Borůvka O.: Úvod do theorie grup, Praha, 1952.
[2] Pontrjagin L.: Topological Groups (preklad z ruštiny), Princeton, 1946.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУПОИДЫ

Р. ШУЛКА

Выводы

В статьи дефинован топологический групоид G, как обобщение понятия топологической группы. В дальшем дефиновано топологическое разбиение и топологический фактороид в G и на G и доказаны теоремы о изоморфизме групоидов.