O SÚČTE VYPUKLÝCH ÚTVAROV

TATIANA TVRDÁ, Bratislava

Pod pojmom súčtu dvoch vlastných bodov ${}^1A$, ${}^2A$ (obr. 1) pre začiatok sčítania vo vlastnom bode O v euklidovskej rovine rozumieme bod A, pre ktorý platí:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\,{}^1A} + \overrightarrow{O\,{}^2A}, \tag{1}$$

kde šípky označujú vektory. Rovnicu (1) zapisujeme tiež v tvare

$$A = {}^1A + {}^2A, \tag{2}$$

ak bod O je napred pevne určený.

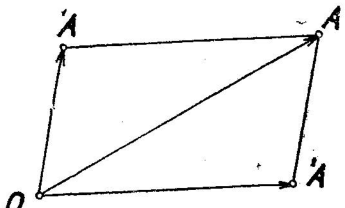
Pre takto zavedený pojem súčtu bodov platí komutatívny aj asociatívny zákon:

$${}^1A + {}^2A = {}^2A + {}^1A,\ ({}^1A + {}^2A) + {}^3A = {}^1A + ({}^2A + {}^3A). \tag{3}$$

Súčet ľubovoľného bodu so začiatkom sčítania je opäť bod A

$$O + A = A.^1 \tag{4}$$

Ďalej zavediem zovšeobecnený pojem sčítania dvoch bodov a odvodím vetu pre súčet dvoch vypuklých útvarov. Všetky príslušné úvahy budem robiť pre body euklidovskej roviny, doplnenej nevlastnými bodmi.



Obr. 1

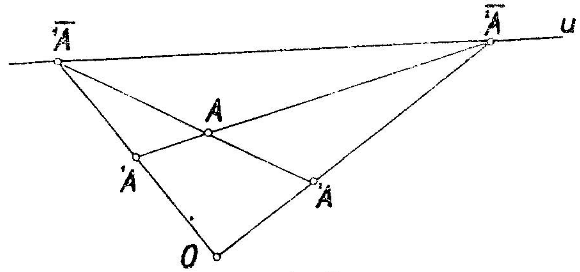
1. Množinu Φ bodov nazývame vypuklým útvarom, ak pre ľubovoľné dva body $A, B \in \Phi$ platí, že súčasne každý bod úsečky $\overline{AB}$ prislúcha množine Φ.

Vnútorné body množiny Φ nazývame vnútornými bodmi vypuklého útvaru; podobne dostávame hraničné a vonkajšie body vypuklého útvaru. Hraničné body vypuklého útvaru Φ vypĺňajú vypuklú krivku k, príslušnú k útvaru Φ.

Uvažujme o ľubovoľných dvoch ohraničených vypuklých útvaroch ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ (t. j. takých, ktoré neobsahujú nevlastné body) a zvoľme ľubovoľne začiatok sčítania O. Potom pod súčtom Φ útvarov ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ rozumieme množinu všetkých možných súčtov bodov ${}^1A \in {}^1\Phi$ a ${}^2A \in {}^2\Phi$. O množine Φ sa dá dokázať, že je opäť vypuklým útvarom.[2]

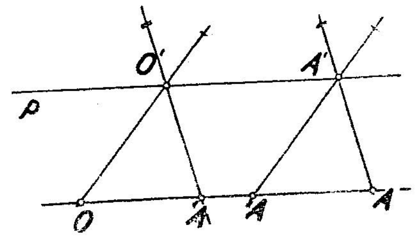
1 Pozri Jaglom—Boltjanskij: *Vypuklyje figury*, Moskva 1951.

2. Ak chceme zovšeobecniť pojem sčítania, môžeme uvažovať takto: Pri

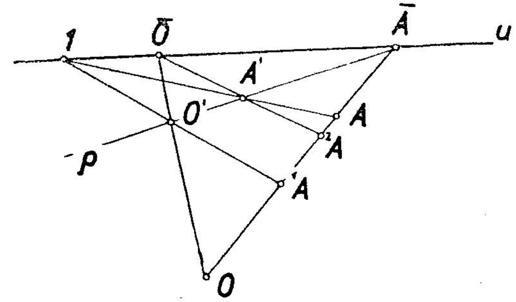


Obr. 2

súčte bodov ${}^1A$, ${}^2A$, ktorých spojnica neprechádza bodom O, zostrojujeme vlastne rovnobežník o vrcholoch O, ${}^1A$, ${}^2A$, A čiže spojnice $\overline{O\,{}^1A}$, $\overline{{}^2AA}$ a podobne aj spojnice $\overline{O\,{}^2A}$, $\overline{{}^1AA}$ sa pretínajú na nevlastnej priamke roviny. Ak teraz nevlastnú priamku nahradíme nejakou vlastnou priamkou u, ktorá neprechádza bodom O, dochádzame k takémuto zovšeobecnenému súčtu bodov ${}^1A$, ${}^2A$, ktoré neležia na priamke u (obr. 2): Nech spojnica $\overline{O\,{}^1A}$ pretína



Obr. 3



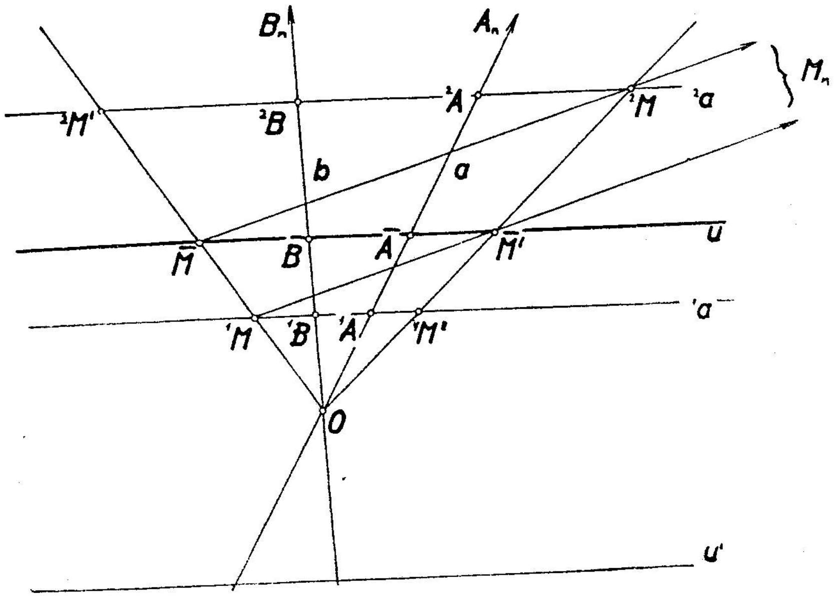
Obr. 4

priamku u v bode ${}^1\bar{A}$ a spojnica $\overline{O\,{}^2A}$ v bode ${}^2\bar{A}$; potom spojnice $\overline{{}^1A\,{}^2\bar{A}}$ a $\overline{{}^2A\,{}^1\bar{A}}$ sa pretínajú v bode A, ktorý bude zovšeobecneným súčtom bodov ${}^1A$, ${}^2A$.

Ak spojnica $\overline{{}^1A\,{}^2A}$ prechádza bodom O (obr. 3), potom ich súčet môžeme dostať tiež takto: zostrojme ľubovoľnú vlastnú priamku p, rovnobežnú so spojnicou $\overline{O\,{}^1A}$ (t. j. takú, ktorá ju pretína v nevlastnom bode) a zvoľme na nej ľubovoľný vlastný bod O'. Zostrojme bodom ${}^2A$ rovnobežku so spojnicou OO' a nech táto rovnobežka pretína priamku p v bode A'. Potom zrejme

2 Pozri Jaglom—Boltjanskij: *Vypuklyje figury*, Moskva 1951. 199.

rovnobežka bodom A' so spojnicou $\overline{O'{}^1A}$ určuje už na spojnici $\overline{O\,{}^1A}$ bod A. Pre zovšeobecnený súčet potom dostávame túto konštrukciu (obr. 4.): Nech spojnica $\overline{O\,{}^1A\,{}^2A}$ pretína priamku u v bode $\bar{A}$, ktorý je rôzny od bodov ${}^1A$, ${}^2A$; zostrojme bodom $\bar{A}$ ľubovoľnú priamku p rôznu od priamky u a od spojnice $\overline{O^2\,\bar{A}}$ a zvoľme na nej ľubovoľný bod O' rôzny od bodu $\bar{A}$. Nech spojnica OO' pretína priamku u v bode $\bar{O}$ a spojnica $\overline{O'\,{}^1A}$ nech pretína priamku u v bode 1; spojnica $\overline{O\,{}^1A}$ pretína potom priamku p v bode A', ktorého spojnica s bodom 1 dáva už na spojnici $\overline{O\,{}^1A}$ bod A ako zovšeobecnený súčet bodov ${}^1A$, ${}^2A$.



Obr. 5

V ďalšom pod pojmom súčet budeme rozumieť zovšeobecnený súčet. Pod súčtom bodu ${}^1A$, ktorý neleží na priamke u, s bodom O budeme rozumieť vždy bod ${}^1A$.

Poznámka 1. Pri tejto konštrukcii treba dokázať, že bod A nezávisí od voľby priamky p. To však zrejme na podklade vlastnosti štvorrohu $O'\,A'\,\bar{O}\,1$ platí. Bod $A = {}^1A + {}^2A$ je totiž bodom, ktorý zodpovedá bodu O v involúcii, určenej samodružným bodom $\bar{A}$ a párom ${}^1A$, ${}^2A$; taký bod existuje práve jeden. Pre takto zavedený súčet bodov platí zrejme komutatívny aj asociatívny zákon.

Vzhľadom na ďalšie úvahy bude pre nás dôležité zistiť, akú polohu musia mať dva body, aby ich súčtom bol nevlastný bod.

Veta 1. *Nech a je ľubovoľná priamka, ktorá prechádza bodom O, ktorá nie je rovnobežná s priamkou u; nech o vlastných bodoch ${}^1A$, ${}^2A$ priamky a, ktoré neležia ani na priamke u, ani nesplývajú s bodom O, platí vzťah:*

$$\overline{O\,{}^1A}\,.\,\overline{O\,{}^2A} = \overline{O\,\bar{A}}^2, \tag{5}$$

kde $\bar{A}$ je priesečník priamky a a u; nech ${}^1a$, ${}^2a$ sú priamky zostrojené bodmi ${}^1A$, ${}^2A$ rovnobežne s priamkou u; potom súčet ľubovoľného vlastného bodu priamky ${}^1a$ a ľubovoľného vlastného bodu priamky ${}^2a$ je nevlastný bod.

Dôkaz. Nech bod A (obr. 5) je súčtom bodov ${}^1A$, ${}^2A$ na priamke a. Potom podľa poznámky 1 páry bodov O, A a ${}^1A$, ${}^2A$ musia určovať involúciu, ktorej samodružným bodom je bod $\bar{A}$. Ak bod A má byť nevlastný, potom bod O musí byť stredom tejto involúcie a musí platiť vzťah (5). Ak naopak platí vzťah (5), príslušný bod A je nevlastný.

Zostrojme teraz bodmi ${}^1A$, ${}^2A$ priamky ${}^1a$, ${}^2a$ rovnobežné s priamkou u a nech b je ľubovoľná priamka, ktorá prechádza bodom O, ktorá nie je rovnobežná s priamkou u. Nech priamka b pretína priamky ${}^1a$, ${}^2a$, u v bodoch ${}^1B$, ${}^2B$, $\bar{B}$. Potom z viet o úmernosti úsečiek priamo vyplýva vzťah:

$$\overline{O\,{}^1B}\,.\,\overline{O\,{}^2B} = \overline{O\bar{B}}^2,$$

čiže súčtom bodov ${}^1B$, ${}^2B$ je opäť nevlastný bod B.

Zvoľme si teraz na priamke ${}^1a$ ľubovoľný vlastný bod ${}^1M$ a na priamke ${}^2a$ ľubovoľný vlastný bod ${}^2M$, pričom spojnica ${}^1M\,{}^2M$ neprechádza bodom O. Nech spojnica $\overline{O\,{}^1M}$ pretína priamky u, ${}^2a$ v bodoch $\bar{M}$, ${}^2M'$ a spojnica $\overline{O\,{}^2M}$ nech pretína priamky ${}^1a$, u v bodoch ${}^1M'$, $\bar{M}'$. Potom podľa predchádzajúceho platia vzťahy:

$$\overline{O\,{}^1M'}\,.\,\overline{O\,{}^2M} = \overline{O\,\bar{M}'}^2, \overline{O\,{}^1M}\,.\,\overline{O\,{}^2M'} = \overline{O\,\bar{M}}^2, \tag{6}$$

čiže

$$\overline{O\,{}^1M'} : \overline{O\,\bar{M}'} = \overline{O\,\bar{M}'} : \overline{O\,{}^2M}, \overline{O\,{}^1M} : \overline{O\,\bar{M}} = \overline{O\,\bar{M}} : \overline{O\,{}^2M'}.$$

Z viet o úmernosti úsečiek priamo vyplýva, že:

$$\overline{O\,{}^1M'} : \overline{O\,\bar{M}'} = \overline{O\,{}^1M} : \overline{O\,\bar{M}};$$

potom všetky štyri pomery (6) sú rovnaké a platí tiež:

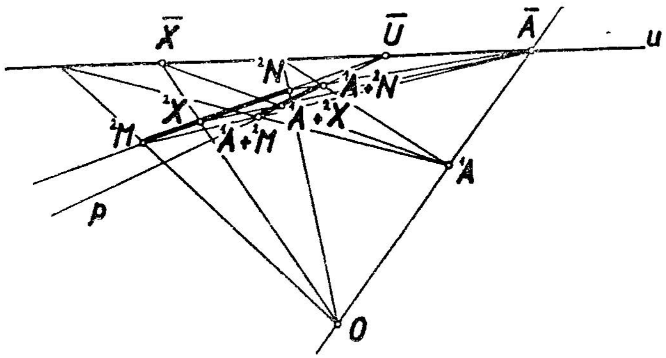
$$\overline{O\,{}^1M} : \overline{O\,\bar{M}} = \overline{O\,\bar{M}'} : \overline{O\,{}^2M},$$

teda spojnica $\overline{{}^1M\,\bar{M}'}$ a $\overline{\bar{M}\,{}^2M}$ sú navzájom rovnobežné. Ich priesečník však dáva súčet bodov ${}^1M$, ${}^2M$, ktorý je teda nevlastný.

Poznámka 2. Ľahko nahliadneme, že páry priamok ${}^1a$, ${}^2a$, ktoré prislúchajú jednej osnove priamok, tvoria involúciu, ktorej samodružné priamky sú priamka u a priamka u', symetrická k priamke u vzhľadom na bod O.

Z toho vyplýva, že súčtom ľubovoľných dvoch vlastných bodov priamky u' je nevlastný bod.

3. Najprv vyšetríme súčet dvoch špeciálnych vypuklých útvarov, a to bodu a úsečky. Pri dôkaze príslušnej vety využijeme túto **pomocnú vetu**: Nech body priamych bodových radov na vlastných priamkach ${}^1a$ ${}^2a$ sú vo vzťahu projektívnom; nech bodu ${}^1U$ priamky ${}^1a$ zodpovedá nevlastný bod priamky ${}^2a$; potom každej úsečke na priamke ${}^1a$, ktorá neobsahuje bod ${}^1U$ ako svoj vnútorný bod, zodpovedá opäť úsečka (prípadne s jedným hraničným bodom nevlastným) na priamke ${}^2a$.



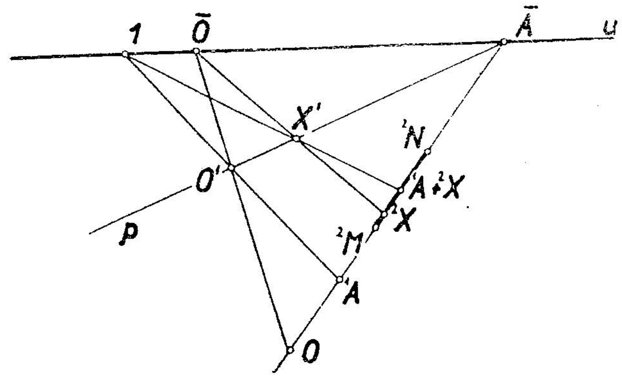
Obr. 6

Tvrdenie tejto vety je zrejmé.

Veta 2. *Nech ${}^1A$ je ľubovoľný bod, ktorý neleží na priamke u; nech priamka ${}^2a$ je tá priamka, ktorej body s bodom ${}^1A$ dávajú nevlastné súčty; nech body ${}^2M$, ${}^2N$ určujú úsečku, ktorá neobsahuje žiaden bod priamky u a s priamkou ${}^2a$ môže mať spoločný iba hraničný bod; potom súčtom bodu ${}^1A$ so všetkými bodmi úsečky $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ je opäť úsečka, ktorej hraničné body sú ${}^1A + {}^2M$, ${}^1A + {}^2N$.*

Dôkaz. a) Nech úsečka $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ (obr. 6) neleží na spojnici $\overline{O\,{}^1A}$ a nech spojnica $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ nepretína priamku u v bode $\bar{A} \equiv (O\,{}^1A \times u)$. Môžu nastať dva prípady: α) bod ${}^1A$ splýva s bodom O, β) bod ${}^1A$ nesplýva s bodom O. V prípade α) tvrdenie vety je zrejmé. V prípade β) priesečník priamky, na ktorej leží úsečka $\overline{{}^2M\,{}^2N}$, s priamkou u nech je bod $\bar{U}$. Nech bod ${}^2X$ prebieha úsečku $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ a nech spojnica $\overline{O\,{}^2X}$ pretína priamku u v bode $\bar{X}$. Potom zväzky priamok $O({}^2X,\ldots)$ a $\bar{A}({}^2X,\ldots)$ sú perspektívne. Tiež zväzky ${}^1A(\bar{X},\ldots)$ a $\bar{A}({}^2X,\ldots)$ sú perspektívne. Potom zväzky ${}^1A(\bar{X},\ldots)$ a $\bar{A}({}^2X,\ldots)$ sú projektívne, ale pretože ich spoločná priamka sama sebe zodpovedá, sú tiež perspektívne. Zodpovedajúce si priamky týchto zväzkov sa potom pretínajú v bodoch jednej priamky p, ktorá zrejme prechádza bodom $\bar{U}$. Súčet ${}^1A + {}^2X$ dostávame v priesečníku spojnice $\overline{\bar{A}\,{}^2X}$ s priamkou p. Pretože podľa predpokladu uvedeného vo vete, žiaden z týchto súčtov nemôže byť nevlastný (s prípustnou výnimkou jedného z bodov ${}^1A + {}^2M$, ${}^1A + {}^2N$), z pomocnej vety už priamo vyplýva tvrdenie našej vety.

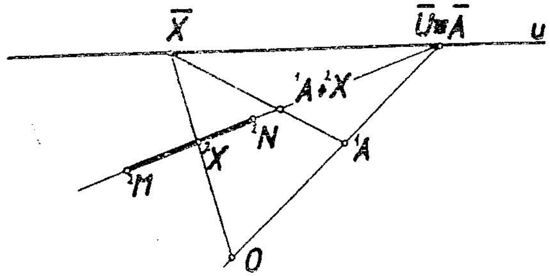
b) Nech úsečka $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ leží na spojnici $\overline{O\,{}^1A}$ (obr. 7). Zvoľme bodom $\bar{A}$ ľubovoľnú priamku p rôznu od spojnice $\overline{O\,{}^1A}$ a od priamky u. Podobne ako pri definícii súčtu dostávame na priamke u body $\bar{O}$, 1 a na priamke p body O', X'.



Obr. 7

Bodové rady $({}^2X,\ldots)$ a $({}^1A + {}^2X,\ldots)$ sú zrejme vo vzťahu projektívnom, pretože vznikajú ako priemety bodov X' na priamke p z bodov 1 a $\bar{O}$. Ďalšia časť dôkazu priamo vyplýva z pomocnej vety.

c) Nech spojnica $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ nesplýva so spojnicou $\overline{O\,{}^1A}$, ale nech bod $\bar{U}$ splýva s bodom $\bar{A}$ (obr. 8). Potom body ${}^1A + {}^2X$ dostávame na spojnici $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ a bodové rady $({}^2X,\ldots)$, $({}^1A + {}^2X,\ldots)$ sú opäť projektívne, pretože vznikajú ako priemety bodového radu X na priamke u z bodov O a ${}^1A$.

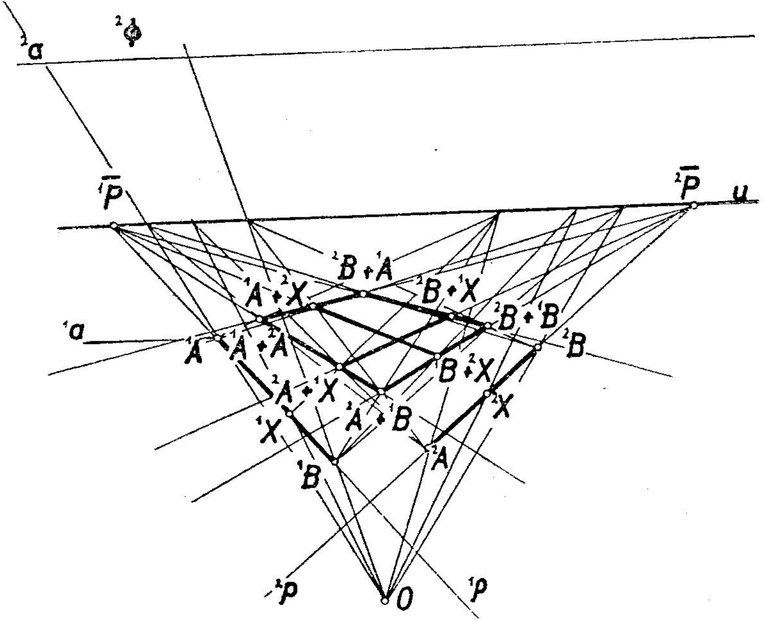


Obr. 8

Poznámka 3. Nech bod ${}^1A$ a všetky body úsečky $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ sú vlastné a neprislúchajú priamke u a nech všetky súčty bodu ${}^1A$ s bodmi úsečky $\overline{{}^2M\,{}^2N}$ sú body nevlastné, potom všetky tieto súčty vyplnia na nevlastnej priamke úsečku. Skutočne, ak $\bar{A}$ je priesečník spojnice $\overline{O\,{}^1A}$ s priamkou u (musí byť vlastný), potom všetky súčty dostaneme v nevlastných bodoch spojníc bodu $\bar{A}$ s bodmi úsečky $\overline{{}^2M\,{}^2N}$.

4. Majme nejaký vypuklý útvar ${}^1\Phi$ a zostrojme každým jeho bodom rovnobežku s priamkou u. Podľa vety 1 každej takejto rovnobežke ${}^1a$ zodpovedá iná rovnobežka ${}^2a$ s priamkou u o tej vlastnosti, že súčtom každého vlastného bodu priamky ${}^1a$ a každého vlastného bodu priamky ${}^2a$ je nevlastný bod. Množinu vlastných bodov všetkých takto vzniknutých priamok ${}^2a$ nazveme pridruženou množinou k množine ${}^1\Phi$.

Veta 3. *Nech úsečky $\overline{{}^1A\,{}^1B}$, $\overline{{}^2A\,{}^2B}$ nemajú spoločné body s priamkou u, nech ${}^2\Phi$ je pridružená množina k množine bodov úsečky $\overline{{}^1A\,{}^1B}$; nech úsečka $\overline{{}^2A\,{}^2B}$*



Obr. 9

má spoločné s množinou ${}^2\Phi$ nanajvýš body ${}^2A$, ${}^2B$; potom súčty všetkých bodov úsečky $\overline{{}^1A\,{}^1B}$ so všetkými bodmi úsečky $\overline{{}^2A\,{}^2B}$ tvoria vypuklý útvar Φ.

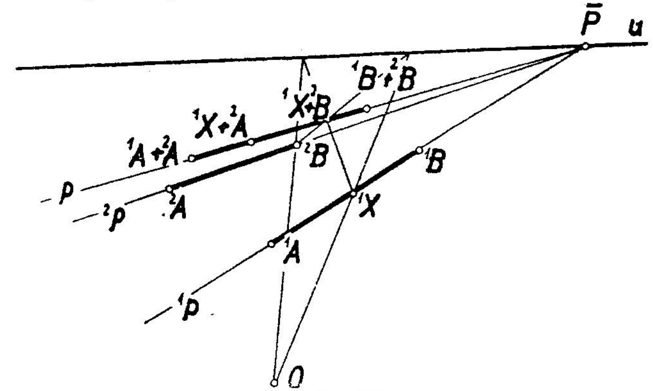
Dôkaz. a) Vylúčme najprv ten prípad, keď jedna z úsečiek $\overline{{}^1A\,{}^1B}$, $\overline{{}^2A\,{}^2B}$ leží na priamke ${}^1p$ a druhá leží na priamke ${}^2p$, pričom priesečník priamok ${}^1p$, ${}^2p$ leží na priamke u (obr. 9). Nech teraz priesečník priamky ${}^1p$ s priamkou u je bod ${}^1\overline{P}$ a priesečník priamky ${}^2p$ s priamkou u nech je bod ${}^2\overline{P}$.

Zostrojme najprv súčty ľubovoľného bodu ${}^1X$ úsečky $\overline{{}^1A\,{}^1B}$ s bodmi úsečky $\overline{{}^2A\,{}^2B}$. Podľa vety 2 dostaneme tak vždy úsečku $\overline{{}^2A+{}^1X\;{}^2B+{}^1X}$, ktorá leží na polpriamke prechádzajúcej bodom ${}^2\overline{P}$ [na polpriamke preto, lebo úsečka $\overline{{}^2A+{}^1X\;{}^2B+{}^1X}$ nemôže obsahovať bod ${}^2\overline{P}$; neexistujú totiž žiadne body na $\overline{{}^iA\,{}^iB}$ $(i = 1, 2)$, rôzne od bodov priamky u, ktorých súčtom by bol

bod priamky u]. Všetky takto vzniknuté polpriamky tvoria vypuklý útvar Φ', pretože tieto polpriamky sú určené vždy bodom ${}^2\overline{P}$ a bodmi úsečky napr. $\overline{{}^2B+{}^1A\;{}^2B+{}^1B}$.[3]

Podobne môžeme sčítavať vždy body ${}^2X$ úsečky $\overline{{}^2A\,{}^2B}$ s bodmi úsečky $\overline{{}^1A\,{}^1B}$ a dostaneme úsečky $\overline{{}^1A+{}^2X\;{}^1B+{}^2X}$, ktoré ležia na polpriamkach, ktoré prechádzajú bodom ${}^1\overline{P}$. Všetky tieto polpriamky tvoria tiež vypuklý útvar Φ''. Prienikom vypuklých útvarov Φ' a Φ'' je hľadaný útvar Φ a ten je potom tiež vypuklý.

b) Nech teraz priamky ${}^1p$ ${}^2p$ sa pretínajú v bode $\overline{P}$ na priamke u (obr. 10),



Obr. 10

potom súčtom ľubovoľného bodu ${}^1X$ s bodmi úsečky $\overline{{}^2A\,{}^2B}$ bude úsečka $\overline{{}^1X+{}^2A\;{}^1X+{}^2B}$, ktorá bude ležať na priamke p, prechádzajúcej bodom $\overline{P}$. Poloha priamky p nezávisí od voľby bodu ${}^1X$. Totiž body ${}^1X+{}^2A$ vyplnia úsečku $\overline{{}^1A+{}^2A\;{}^1B+{}^2A}$, ktorá leží zrejme na priamke p. Stačí ešte ukázať, že množinový súčet úsečiek typu $\overline{{}^1X+{}^2A\;{}^1X+{}^2B}$ na priamke p dáva opäť vypuklý útvar, teda úsečku. To však ľahko nahliadneme z toho, že počiatočné aj koncové body všetkých týchto úsečiek vyplnia úsečky $\overline{{}^2A+{}^1A\;{}^2A+{}^1B}$, prípadne $\overline{{}^2B+{}^1A\;{}^2B+{}^1B}$.

Na podklade tejto vety môžeme dokázať, že za istých podmienok súčtom dvoch ľubovoľných vypuklých útvarov je opäť vypuklý útvar. O tom hovorí:

Veta 4. *Nech ${}^1\Phi$ ${}^2\Phi$ sú dva vypuklé útvary, ktoré neobsahujú body priamky u; nech Φ' je pridružená množina k množine ${}^1\Phi$; nech útvar ${}^2\Phi$ má s množinou Φ' spoločné nanajvýš hraničné body, ktoré netvoria úsečku; potom súčet Φ útvarov ${}^1\Phi$ ${}^2\Phi$ je vypuklý.*

Dôkaz. Zvoľme si v súčte Φ ľubovoľné dva jeho body A, B. Máme ukázať, že všetky body tejto úsečky prislúchajú útvaru Φ. Nech bod A vznikol ako súčet bodov ${}^1A \in {}^1\Phi$ a ${}^2A \in {}^2\Phi$; podobne bod B ako súčet ${}^1B \in {}^1\Phi$ a ${}^2B \in {}^2\Phi$.

[3] Pozri Jaglom—Boltjanskij: *Vypuklyje figury*, Moskva 1951. 21.

Pretože útvary ${}^1\Phi$ ${}^2\Phi$ sú podľa predpokladu vypuklé, útvar ${}^1\Phi$ musí obsahovať celú úsečku $\overline{{}^1A\,{}^1B}$ a útvar ${}^2\Phi$ celú úsečku $\overline{{}^2A\,{}^2B}$. Útvar Φ musí potom obsahovať celý súčet úsečiek $\overline{{}^1A\,{}^1B}$, $\overline{{}^2A\,{}^2B}$. Tieto úsečky zrejme vyhovujú predpokladom vety 3 a ich súčtom je potom vypuklý útvar, ktorý obsahuje aj body A, B, teda obsahuje aj celú úsečku $\overline{A\,B}$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 4. Z vety 4 a z poznámky 2 priamo vyplýva, že ak útvary ${}^1\Phi$ ${}^2\Phi$ ležia vo vnútri pásu, ktorý je určený priamkami uu', ich súčet je vždy vypuklý.

Došlo dňa 22. V. 1953.