O SÚČTOCH ISTÝCH KONVERGENTNÝCH RADOV

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Nech

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

je konvergentný rad a nech $a_n > 0$ pre všetky prirodzené n.

Definícia 1. *Znamienkovou schémou budeme nazývať postupnosť:*

$$[\alpha] \equiv \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots,$$

kde $\varepsilon_n = 1$ alebo -1. Rad (1) budeme nazývať základným radom.

Definícia 2. *Budeme hovoriť, že rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$

vznikol aplikovaním schémy

$$[\alpha] \equiv \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots$$

na rad (1).

Znakom X označíme množinu radov, vzniknutých aplikovaním všetkých možných znamienkových schém na rad (1). Množina X je zrejme nespočetná mohutnosti kontinua. Do množiny X patrí aj základný rad (1) pri schéme:

$$[\alpha] \equiv +1, +1, +1, \ldots +1, \ldots$$

Všetky rady množiny X sú zrejme konvergentné.

Predmetom tejto práce je vyšetrovanie vlastností množiny súčtov radov z X.

Nech je

$$x, y \in X, \; x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n .$$

Definujme na množine $X \times X$ reálnu funkciu $\varrho(x, y)$ takto:

1 Ak $x = y$, položme $\varrho(x, y) = 0$.

2. Ak $x \neq y$, nech $\varrho(x, y) = \frac{1}{\lambda}$, kde λ je prvý index taký, že $\varepsilon_\lambda \neq \varepsilon'_\lambda$.

Ukážeme, že takto definovaná funkcia je metrikou na X. K tomu stačí ukázať, že:

1. $\varrho(x, y) \geqq 0$ a $\varrho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. To je zrejmé.
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$. To je tiež zrejmé.
3. Nech $x, y, z \in X$.

$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$
$y = \varepsilon_1' a_1 + \varepsilon_2' a_2 + \ldots + \varepsilon_n' a_n + \ldots$
$z = \varepsilon_1'' a_1 + \varepsilon_2'' a_2 + \ldots + \varepsilon_n'' a_n + \ldots$

Treba ukázať, že: $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Ak aspoň dva zpomedzi radov x, y, z sú totožné, potom zrejme vlastnosť 3. platí. Nech sú teda všetky tri rady rôzne a nech $\varrho(x, y) = \frac{1}{l}$, $\varrho(y, z) = \frac{1}{n}$.

Sú tu tri možnosti:

a) $l = n$. Potom vidieť, že $\varrho(x, z) = \frac{1}{l}$ a vlastnosť 3. je splnená.

b) $l < n$. Potom je $\varepsilon_i' = \varepsilon_i''$ pre $1 \leqq i \leqq n - 1$, teda tiež pre $i = l \leqq n - 1$ a vlastnosť 3. je splnená.

c) $l > n$. Dôkaz platnosti vlastnosti 3. v tomto prípade sa dostane z b), ak rady berieme v poradí z, y, x.

V ďalšom sa budeme zaoberať vlastnosťami priestoru X opatreného metrikou ϱ.

Veta 1. *Priestor (X, ϱ) je úplný.*

Dôkaz. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská postupnosť bodov z X. Teda:

$$x_n = \varepsilon_1^{(n)} a_1 + \varepsilon_2^{(n)} a_2 + \varepsilon_3^{(n)} a_3 + \ldots + \varepsilon_k^{(n)} a_k + \ldots,$$

kde $\varepsilon_k^{(n)} = 1$ alebo -1. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon)$ tak, že pre $m, n \geqq N(\varepsilon)$ platí: $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Položme za ε postupne: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{k}, \ldots$ Ku každému $\varepsilon = \frac{1}{k}$ teda existuje $N\left(\frac{1}{k}\right)$ tak, že pre $m, n \geqq N\left(\frac{1}{k}\right)$ je $\varrho(x_m, x_n) < \frac{1}{k}$. Označme $N\left(\frac{1}{k}\right) = N_k$. Keďže pre $m, n \geqq N_{k+1} \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$, bude $N_{k+1} \geqq N_k$.

Takto dostávame postupnosť prirodzených čísel:

$$N_1 \leqq N_2 \leqq N_3 \leqq \ldots \leqq N_k \leqq \ldots \tag{2}$$

Ak množina členov tejto postupnosti je konečná a napr. N_k je najväčší jej prvok, potom pre $m, n \geqq N_k$ zrejme bude $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$, kde ε je ľubovoľné kladné číslo a potom N_k-ty rad je limitou danej postupnosti, t. j. $\lim_{n \to \infty} x_n = x_{N_k}$.

Ak však množina členov postupnosti (2) je nekonečná, zostrojme tento rad:

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots,$$

kde $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{N_k}$, pre $i = 1, 2, 3, \ldots k$. Ukážeme, že $\varrho(x_n, x) \to 0$. Skutočne, nech je dané $\varepsilon > 0$. Zvolíme si prirodzené k také veľké, aby $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Potom pre $n \geqq N_k$ bude $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Tým je dôkaz hotový.

Veta 2. *Priestor (X, ϱ) je relatívne kompaktný.*

Dôsledok: Vzhľadom na vetu 1 teda (X, ϱ) je kompaktný metrický priestor.

Dôkaz. Stačí ukázať, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-ová sieť priestoru X, t. j. konečná množina $A(\varepsilon) \subset X$ tak, že pre každé $x \in X$ je $\varrho[x, A(\varepsilon)] < \varepsilon$. Nech je teda dané ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Zvolíme si prirodzené N tak, aby $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Zostrojme všetky možné rady tvaru:

$$\varepsilon_1' a_1 + \varepsilon_2' a_2 + \ldots + \varepsilon_N' a_N + \varepsilon_{N+1}' a_{N+1} + \varepsilon_{N+2}' a_{N+2} + \ldots,$$

kde $\varepsilon_i' = 1$ alebo -1 pre $i = 1, 2, 3, \ldots N$ a $\varepsilon_i' = 1$ pre všetky $i = N + 1, N + 2, N + 3, \ldots N + k, \ldots$

Množina všetkých týchto radov je konečná a má 2^N prvkov. Označíme ju $A(\varepsilon)$. Nech $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$. V množine $A(\varepsilon)$ existuje prvok $y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n' a_n$ taký, že $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots N$. Teda $\varrho(x, y) < \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \varrho[x, A(\varepsilon)] < \varepsilon$.

Predošlé vety nám ukazujú najzákladnejšie vlastnosti priestoru (X, ϱ), ktoré v ďalšom použijeme.

Definícia 3. *Funkciou $S(x)$ definovanou na priestore (X, ϱ) budeme v ďalšom rozumieť súčet radu x.*

Označenie. Množinu všetkých funkčných hodnôt funkcie $S(x)$ označme znakom W. Množina W je teda akási množina reálnych čísel a naším cieľom je vyšetrovanie vlastností množiny W.

Veta 3. *Funkcia $S(x)$ je spojitá na celom priestore X.*

Dôkaz. Nech $x \in X$. Máme ukázať, že funkcia $S(x)$ je spojitá v bode x. Znakom R_n označíme zvyšok po n-tom člene v rade (1). Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Zvolíme prirodzené N tak, aby $R_N < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pre $\varrho(x, y) < \frac{1}{N}$ je $|S(x) - S(y)| \leqq 2R_N < \varepsilon$.

Dôsledok: Keďže priestor X je kompaktný, množina W je tiež kompaktná v E_1. Teda W je uzavretá a ohraničená. Zrejme je sup $W = S(\xi)$, kde $\xi = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ a $\inf W = S(\bar{\xi})$, kde $\bar{\xi} = -a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - \ldots$ Platí $\sup W = -\inf W$. V ďalšom označme $A = \sup W$. Množina W sa teda dostane, vzhľadom na známe vety o štruktúre lineárnych uzavrených množín, z intervalu $< -A, A >$ vynechaním spočetného systému otvorených dizjunktných intervalov (tzv. styčných intervalov).

Označenie. V ďalšom základný rad (1) budeme sústavne značiť znakom ξ. Rad

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots,$$

vzniknutý aplikovaním schémy:

$$[\alpha] \equiv \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots$$

na rad ξ budeme pre stručnosť značiť znakom $[\alpha]\,\xi$. Jeho súčet teda je $S([\alpha]\,\xi)$.

Veta 4. *Množina W je husto rozložená.*

Dôsledok. Keďže W je uzavretá (pozri dôsledok vety 3), W je perfektná množina.

Dôkaz. Máme ukázať, že každý prvok $S([\alpha]\,\xi) \in W$ je pre ňu hromadným bodom. Nech teda $S([\alpha]\xi) \in W$, nech $[\alpha]\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$. Keďže rad (1) konverguje, je $a_k \to 0$. Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Existuje prirodzené n tak, že $a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Nech $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$ pre $i \neq n$ a $\varepsilon_n' = -\varepsilon_n$. Utvorme schému:

$$[\alpha'] \equiv \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots \varepsilon_n', \ldots$$

a zostrojme rad $[\alpha']\,\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' a_i$. Potom:

$$|S([\alpha]\xi) - S([\alpha']\,\xi)| = |2\varepsilon_n a_n| < \varepsilon,$$

z čoho vyplýva tvrdenie vety.

Veta 5. *Množina W je symetrická podľa bodu O.*

Dôkaz. Nech $S([\alpha]\,\xi) \in W$. Potom ku schéme:

$$[\alpha] \equiv \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots$$

zostrojme schému:

$$[-\alpha] \equiv \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots \varepsilon_n', \ldots$$

tak, aby $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n$ pre každé prirodzené n. Vidieť, že

$$S([\alpha]\,\xi) = -S([-\alpha]\,\xi).$$

Poznámka. Ďalšie vety nám ukážu, že v špeciálnych prípadoch v ďalšom uvažovaných štruktúra systému styčných intervalov množiny W podstatne závisí od pomeru veľkosti členov základného radu (1) k zvyškom k nim príslušným.

Vyšetrenie štruktúry systému styčných intervalov vykonáme pre dva špeciálne prípady. V prvom prípade budeme predpokladať, že pre každé prirodzené k v základnom rade (1) platí: $a_k > R_k$; v druhom prípade zase, že pre každé prirodzené k platí: $a_k \leqq R_k$.

Príkladom pre prvý prípad môže slúžiť rad:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^{2k+1}} + \ldots,$$

alebo všeobecnejší g-adický rad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}}{g^{2n-1}}$, kde g celé $\geqq 2$, $0 < a_{2n-1} < g$.

Skutočne pre každé $k \geqq 1$ platí:

$$R_{2k-1} = \frac{a_{2k+1}}{g^{2k+1}} + \frac{a_{2k+3}}{g^{2k+3}} + \ldots \leqq \frac{g-1}{g^{2k+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{g^2}} = \frac{1}{g+1}\,\frac{1}{g^{2k-1}} < \frac{a_{2k-1}}{g^{2k-1}}.$$

Príkladom pre druhý prípad môže slúžiť geometrický rad:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

s kvocientom q, $\frac{1}{2} \leqq q < 1$. Skutočne pri tejto voľbe kvocienta je:

$$R_k = q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots = q^{k-1}\frac{q}{1-q} \geqq q^{k-1}.$$

Najprv sa budeme zaoberať prípadom prvým.

Označenie. Nech n je prirodzené číslo. Znakom $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ označíme otvorený interval so stredom v bode $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n$, s pravým koncovým bodom $S([\alpha_1]\,\xi)$, kde

$$[\alpha_1]\,\xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} - \ldots$$

a s ľavým koncovým bodom $S([\alpha_2]\,\xi)$, kde

$$[\alpha_2]\,\xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

Ak znamienka ε_i volíme ľubovoľne, dostávame takto celkom 2^n takýchto intervalov. Nech n prebieha všetky prirodzené čísla, t. j. nech $n = 1, 2, 3, \ldots$ Potom uvedené intervaly tvoria určitý spočetný systém otvorených intervalov, ktorý označíme znakom γ.

Veta 6. *Nech v základnom rade (1) pre všetky prirodzené k platí: $a_k > R_k$. Potom systém γ predstavuje systém styčných intervalov množiny W v intervale $< -A, A >$, kde A je súčet základného radu (1).*

Dôkaz. 1. Napred ukážeme, že intervaly systému γ sú dizjunktné s množinou W, t. j. pre každé $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \in \gamma$ platí:

$$I\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \cap W = \emptyset.$$

Nech nejaký prvok $S([\alpha']\xi) \in W$ patrí do $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$.
Nech $[\alpha']\xi = \varepsilon'_1a_1 + \varepsilon'_2a_2 + \varepsilon'_3a_3 + \dots + \varepsilon'_na_n + \dots$
Ukážeme, že potom musí byť $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pre $i = 1, 2, \dots n$.
Nech totiž existuje aspoň jedno $\varepsilon'_i \neq \varepsilon_i$ pre nejaké $i = 1, 2, \dots n$.
Nech ε'_i je prvé tohto druhu a nech $\varepsilon'_i = +1$, avšak $\varepsilon_i = -1$ (v opačnom prípade je úvaha rovnaká). Uvážme, že je:

$$2R_i = 2a_{i+1} + 2a_{i+2} + 2a_{i+3} + \dots \geqq (\varepsilon_{i+1}a_{i+1} - \varepsilon'_{i+1}a_{i+1}) + (\varepsilon_{i+2}a_{i+2} - \varepsilon'_{i+2}a_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_na_n - \varepsilon'_na_n) + (a_{n+1} - \varepsilon'_{n+1}a_{n+1}) + (-a_{n+2} - \varepsilon'_{n+2}a_{n+2}) + (-a_{n+3} - \varepsilon'_{n+3}a_{n+3}) + (-a_{n+4} - \varepsilon'_{n+4}a_{n+4}) + \dots$$

Keďže $2a_i > 2R_i$, z toho vyplýva:

$$2a_i > (\varepsilon_{i+1}a_{i+1} - \varepsilon'_{i+1}a_{i+1}) + (\varepsilon_{i+2}a_{i+2} - \varepsilon'_{i+2}a_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_na_n - \varepsilon'_na_n) + (a_{n+1} - \varepsilon'_{n+1}a_{n+1}) + (-a_{n+2} - \varepsilon'_{n+2}a_{n+2}) + (-a_{n+3} - \varepsilon'_{n+3}a_{n+3}) + (-a_{n+4} - \varepsilon'_{n+4}a_{n+4}) + \dots.$$

Z toho vyplýva $S([\alpha']\xi) > S([\alpha_1]\xi)$, t. j. $S([\alpha']\xi)$ leží napravo od pravého koncového bodu intervalu $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, **teda** $S([\alpha']\xi) \notin I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$. Musí teda byť $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pre $i = 1, 2, \dots n$. Potom však zpomedzi prvkov množiny W je k číslu $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_na_n$ sprava najbližší prvok $S([\alpha_1]\xi)$, kde

$$[\alpha_1]\xi = \varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n + a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} - \dots,$$

čo je pravý koncový bod intervalu a zľava najbližší je $S([\alpha_2]\xi)$, kde

$$[\alpha_2]\xi = \varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n - a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots,$$

čo je ľavý koncový bod intervalu.

2. Ďalej ukážeme, že intervaly systému γ sú po dvoch dizjunktné. Nech teda $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, $I\varepsilon'_1\varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_k \in \gamma$. Máme ukázať, že platí:

$$I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \cap I\varepsilon'_1\varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_k = \emptyset,$$

pričom však predpokladáme, že tieto intervaly nie sú totožné, t. j., že

$$\varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n \neq \varepsilon'_1a_1 + \varepsilon'_2a_2 + \dots + \varepsilon'_ka_k.$$

Najprv ukážeme, že rovnosť:

$$\varepsilon_1a_1 + \dots + \varepsilon_na_n = \varepsilon'_1a_1 + \dots + \varepsilon'_ka_k \tag{3}$$

môže nastať v tom a len v tom prípade, ak $k = n$ a $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ pre $i = 1, 2, \dots n$. Skutočne musí byť $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, pretože v opačnom prípade by vzhľadom na predpoklad $a_1 > R_1$ jedna strana rovnosti (3) bola kladná a druhá záporná. Je teda $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$ a rovnosť (3) prejde v rovnosť:

$$\varepsilon_2a_2 + \varepsilon_3a_3 + \dots + \varepsilon_na_n = \varepsilon'_2a_2 + \varepsilon'_3a_3 + \dots + \varepsilon'_ka_k.$$

Z toho analogicky vyplýva, že $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2$, atď. Týmto postupom po konečnom počte krokov sa presvedčíme, že $k = n$ a $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pre $1 \leqq i \leqq k$. Ak naopak $k = n$ a $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pre $i = 1, 2, 3, \dots n$, potom rovnosť (3) zrejme platí. Nech je teraz $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \cap I\varepsilon'_1\varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_k \neq \emptyset$. Potom tento prenik je nejaký otvorený interval. V dôsledku toho musí aspoň jeden koncový bod jedného z uvažovaných intervalov (napr. intervalu $I\varepsilon'_1\varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_k$) patriť do druhého intervalu (do $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$). Avšak tento koncový bod je prvkom množiny W, teda $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \cap W \neq \emptyset$, čo je vo spore s 1.

3. Ukážeme, že každý styčný interval množiny W splýva s nejakým intervalom systému γ. Nech teda $J = (i_2, i_1)$ je styčný interval množiny W v intervale $< -A, A >$. Teda: $i_1 = S([\alpha_1]\xi) \in W$, $i_2 = S([\alpha_2]\xi) \in W$. Nech:

$$[\alpha_1]\xi = \varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n + \varepsilon_{n+1}a_{n+1} + \varepsilon_{n+2}a_{n+2} + \dots \tag{4}$$

Ukážeme, že existuje index k tak, že pre $n > k$ je $\varepsilon_n = -1$. Nech by tomu tak nebolo, potom rad (4) by obsahoval nekonečne mnoho členov ε_na_n takých, že $\varepsilon_n = +1$. Označme $\varepsilon = i_1 - i_2 > 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ nájdeme také veľké n, aby $\varepsilon_n = +1$ a $a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ [to je možné, pretože rad (1) konverguje, teda $a_n \to 0$]. Keď v rade $[\alpha_1]\xi$ zmeníme znamienko pri člene a_n, t. j. keď utvoríme rad $[\alpha]\xi$, pre ktorý bude platiť:

$$[\alpha]\xi = \varepsilon'_1a_1 + \varepsilon'_2a_2 + \varepsilon'_3a_3 + \dots + \varepsilon'_na_n + \dots,$$

$\varepsilon'_k = \varepsilon_k$ pre $k \neq n$ a $\varepsilon'_n \neq \varepsilon_n$, potom zrejme

$$S([\alpha_1]\xi) - S([\alpha]\xi) > 0 \text{ a } S([\alpha_1]\xi) - S([\alpha]\xi) = 2a_n < \varepsilon,$$

t. j. $S([\alpha]\xi) \in J$, čo je spor. Teda musí byť:

$$[\alpha_1]\xi = \varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n + a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} - \dots$$

Ako sme už videli, číslo $S([\alpha_1]\xi)$ zpomedzi všetkých prvkov množiny W je najbližšie ležiace k číslu $\varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n$ sprava. Zľava najbližšie ležiace je číslo $S([\alpha'_2]\xi)$, kde

$$[\alpha'_2]\xi = \varepsilon_1a_1 + \varepsilon_2a_2 + \dots + \varepsilon_na_n - a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

Keby bolo $i_2 < S([\alpha'_2]\xi)$, potom vzhľadom na $S([\alpha'_2]\xi) < S([\alpha_1]\xi)$ by bolo $S([\alpha'_2]\xi) \in (i_2, i_1)$, čo nie je možné. Podobne nemôže byť ani $i_2 > S([\alpha'_2]\xi)$, pretože potom vzhľadom na to, že $i_2 < i_1$, by bolo $i_2 \in (S([\alpha'_2]\xi), S([\alpha_1]\xi))$, čo nie je možné (pozri 1.). Musí teda byť: $i_2 = S([\alpha'_2]\xi) = S([\alpha_2]\xi)$ a tým je dôkaz vety 6 hotový.

Veta 7. *Nech v základnom rade* (1) *pre každé prirodzené k platí: $a_k \leqq R_k$. Potom systém styčných intervalov množiny W v intervale $< -A, A >$ je prázdny, t. j. $W = < -A, A >$.*

Dôkaz. Vzhľadom na vetu 5 stačí ukázať, že pre každé $a \in < 0, A >$ existuje znamienková schéma $[\alpha]$ tak, že $S([\alpha]\ \xi) = a$. Pritom sa stačí obmedziť na interval $< 0, A)$, pretože $A = S(\xi)$ (schéma: $[\alpha] \equiv +1, +1, +1, \dots +1, \dots$).

Nech teda $a \in < 0, A)$. Existuje n_1 tak, že:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1-1} \leqq a, \text{ ale } a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1} > a.$$

Označíme $\sigma_{n_1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$, je zrejme: $|\sigma_{n_1} - a| \leqq a_{n_1}$. Keď je $a = \sigma_{n_1} - R_{n_1}$, kde R_{n_1} je zvyšok po n_1-tom člene v základnom rade (1), tvrdenie vety je dokázané. V opačnom prípade existuje n_2 také, že: $a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2-1} \geqq a$, avšak $a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} < a$. Označíme $\sigma_{n_2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2}$ zrejme $|\sigma_{n_2} - a| \leqq a_{n_2}$. Keď je $a = \sigma_{n_2} + R_{n_2}$, tvrdenie vety je dokázané. V opačnom prípade existuje n_3 také, že:

$$a_1 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} + a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3-1} \leqq a,$$

avšak $a_1 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} + a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3} > a$. Označíme $\sigma_{n_3} = a_1 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} + a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}$ potom zrejme: $|\sigma_{n_3} - a| \leqq a_{n_3}$ atď.

Z celého postupu vidieť, že máme tieto možnosti:

a) Pre nejaké prirodzené k bude $a = \sigma_{n_k} + (-1)^k R_{n_k}$. Potom je dôkaz hotový.

b) Pre žiadne prirodzené k nenastane prípad a). Potom dostávame nekonečnú postupnosť prirodzených čísel:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

a rad: $[\alpha]\ \xi = a_1 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} + \dots + (-1)^{k+1} a_{n_k} + \dots$ Ukážeme, že $a = S([\alpha]\ \xi)$. Z konštrukcie radu $[\alpha]\ \xi$ je zrejmé toto: Ak označíme $\sigma_{n_k} = a_1 + \dots + a_{n_1} - a_{n_1+1} - \dots - a_{n_2} + \dots + (-1)^{k+1} a_{n_k}$, bude platiť: $|\sigma_{n_k} - a| \leqq a_{n_k}$ teda $\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{n_k} = a$. Postupnosť čiastočných súčtov $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $[\alpha]\ \xi$ je konvergentná (vzhľadom na konvergenciu radu) a keďže postupnosť $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je z nej vybraná, obe postupnosti budú mať ten istý limit, teda:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = a = S([\alpha]\ \xi).$$

Tým je dôkaz hotový.

Došlo dňa 21. IV. 1954.

О СУММЕ КОНВЕРГЕНТНЫХ РЯДОВ

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

Пусть $a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots$ (1) есть конвергентный ряд с положительными членами. Пусть A_1 обозначает сумму этого ряда. Надо образовать все возможные ряды: $\varepsilon_1 a_1 - \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n + \dots$ (2) где ε_n есть $+1$ или -1 для каждого натурального u.

Предметом настоящей работы является исследование свойств множеств W суммы всех возможных рядов (2).

В работе доказано, что множество W является контактное и плотное в себе, дальше является симметрическое по отношению к началу. В таком случае, когда каждой член ряда (1) является больше, чем остаток ряда к нему принадлежающий, получим множество W из интервала $< -A, +A >$, если выпустим счетную систему открытых интервалов, которых середина является соответствена с парциальными суммами рядов (2). В случае, когда никакой член ряда (1) не больше, как избыток ряда к нему принадлежащий, выполняет множество W весь интервал $< -A, A >$, т. е. $W = < -A, +A >$.