O GRAFOVOM IZOMORFIZME SEMIMODULÁRNYCH SVÄZOV

JÁN JAKUBÍK, Košice.

Pojem grafového izomorfizmu sväzov zaviedol G. Birkhoff (pozri [1], str. 23 a 42). V práci [2] boli vyšetrené niektoré otázky, ktoré sa týkajú grafového izomorfizmu modulárnych sväzov. Najdôležitejší výsledok znie takto:

Nech S, S' sú konečné modulárne sväzy, nech S, S' sú grafovo izomorfné. Potom existujú také sväzy A, B, že sväz S je izomorfný so sväzom $A \times B$ a súčasne sväz S' je izomorfný so sväzom $\tilde{A} \times B$ ([2], veta 1).[1]

Na konci práce [2] boli vyslovené tieto neriešené otázky (uvádzame ich, ako aj niektoré definície a lemmy z [2] v plnom znení, keďže číslo časopisu, obsahujúce prácu [2] je doteraz v tlači):

„a) Platí veta 1 pre semimodulárne sväzy? (Zdá sa pravdepodobným, že neplatí).

b) Nech S je konečný modulárny sväz, nech sväz S' je grafovo izomorfný so sväzom S. Vyplýva z toho, že aj sväz S' je modulárny? (Kladná odpoveď sa zdá veľmi pravdepodobnou).

c) Vyšetriť, do akej miery sa dajú predchádzajúce výsledky preniesť na nekonečné modulárne sväzy, ak miesto relácie g^2 medzi sväzmi S, S' predpokladáme, že tieto sväzy sú topologicky ekvivalentné (vzhľadom na niektorú z topológií, ktoré sa obvykle vo sväzoch zavádzajú)."

V tomto článku vyšetríme otázku a) a b). V odseku 1 zopakujeme známe definície a lemmy, ktoré sú ďalej potrebné. V odseku 2 na príklade dokážeme, že spomínaná veta 1 z práce [2] pre semimodulárne sväzy vo všeobecnosti neplatí. Ďalej dokážeme, že v istej zoslabenej forme táto veta ostáva v platnosti aj pre semimodulárne sväzy (t. j. ak sú splnené niektoré ďalšie predpoklady o uvažovanom grafovom izomorfizme).

V odseku 3 vyšetríme otázku b). Dokážeme, že odpoveď je kladná. Vyšetrenie otázky c) pre špeciálny prípad metrických sväzov bude predmetom ďalšej práce.

1.

O všetkých sväzoch, uvažovaných ďalej, budeme predpokladať, že sú konečné.

[1] Znakom $\tilde{A}$ označujeme sväz duálny k A.

[2] Takto označujeme grafový izomorfizmus.

Definícia 1. *Nech S je sväz, $a, b \in S$. Budeme hovoriť, že prvky a, b sú susedné (v označení $a\,s\,b$), ak alebo prvok a je pokrytý prvkom b, alebo prvok b je pokrytý prvkom a. Ak platí $a\,s\,b$, dvojicu prvkov (a, b) budeme nazývať elementárnou dvojicou (e dvojica). E dvojice (a, b), (b, a) budeme považovať za ekvivalentné.*

Definícia 2. *Nech existuje jedno-jednoznačné zobrazenie sväzu S na sväz S', ktoré zachováva reláciu susedstva. Podrobnejšie: ak $x, y \in S$, $x', y' \in S$, $x \longleftrightarrow x'$, $y \longleftrightarrow y'$, potom $x\,s\,y \Leftrightarrow x'\,s\,y'$. Budeme hovoriť, že sväzy S, S' sú grafovo izomorfné a budeme písať $S\,g\,S'$.*

Poznámka. Nech $S\,g\,S'$. Písmenami $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ budeme všade ďalej označovať prvky sväzu S; písmenami $a', b', c', \ldots, x', y', z', \ldots$ budeme označovať tie prvky sväzu S, ktoré sú v uvažovanom zobrazení, ktoré sprostredkuje grafový izomorfizmus, priradené prvkom $a, b, c, \ldots, x, y, z \ldots$

Definícia 3. *Nech S je modulárny sväz, nech $a\,s\,b\,s\,c\,s\,d\,s\,a$. Potom hovoríme, že e. dvojice (a, b), (c, d) sú navzájom jednoducho transponované. Budeme hovoriť, že prvointervaly $\langle x, y\rangle$, $\langle u, v\rangle$ sú jednoducho transponované, ak príslušné e. dvojice sú jednoducho transponované.*

Poznámka. Ľahko za zistí, že prvointervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ sú jednoducho transponované vtedy a len vtedy, keď platí:

$$b \cap c = a,\ b \cup c = d,\ a\,s\,c,\ b\,s\,d$$

alebo

$$d \cap a = c,\ d \cup a = b,\ c\,s\,a,\ d\,s\,b.$$

Lemma 1. ([2], *lemma* 3.) *Nech $S\,g\,S'$, nech e. dvojice (a, b), (c, d) sú jednoducho transponované; potom tiež e. dvojice (a', b'), (c', d') sú jednoducho transponované.*

Poznámka. Predošlá lemma bola v práci [2] vyslovená za predpokladu, že sväzy S, S' sú modulárne, v dôkaze však predpoklad o modulárnosti sväzov S, S' nebol použitý.

Definícia 4. *Ak pre prvky $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$ platí $x_i\,s\,x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, množinu $r = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ budeme nazývať reťazcom medzi prvkami x, y. Číslo n budeme volať dĺžkou reťazca r [a označovať $d(r)$].*[3]

Definícia 5. *Nech $S\,g\,S'$, nech $a\,s\,b$, $a < b$. Ak $a' < b'$ $(a' > b')$, hovoríme, že e. dvojica (a, b) sa pri uvažovanom grafovom izomorfizme zachová (prevráti). Hovoríme, že reťazec, resp. interval sa zachová, resp. prevráti, ak každá e. dvojica tohto reťazca, resp. intervalu sa zachová, resp. prevráti. Nech S_0 je podsväz sväzu S. Hovoríme, že S_0 sa zachová (prevráti), ak pre ľubovoľné prvky $a, b \in S$, $a < b$ platí, že interval $\langle a, b\rangle$ sa zachová (prevráti).*

Lemma 2. ([2], dôsledok lemmy 5). *Nech (a, b), (c, d) sú jednoducho transponované e. dvojice. Ak sa pri danom grafovom izomorfizme jedna z nich zachová (prevráti), potom sa aj druhá zachová (prevráti).*

[3] Podľa terminológie, používanej v [1], uvažujeme len maximálne reťazce medzi **x**, **y**.

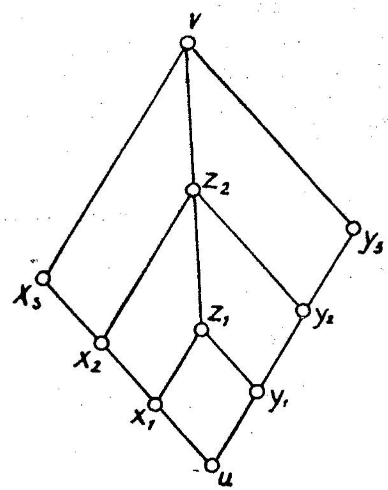
Lemma 3. *Nech S je semimodulárny sväz, nech r_1, r_2 sú reťazce medzi prvkami x, y. Potom $d(r_1) = d(r_2)$.*[4] ([1], str. 106 a 148).

Definícia 6. *Nech S je semimodulárny sväz, nech $x > 0$, nech r je reťazec medzi $0, x$. Číslo $d(r) - 1$ budeme nazývať dimenziou prvku x a označovať $d(x)$. Ak $x = 0$, položíme $d(0) = 0$.*

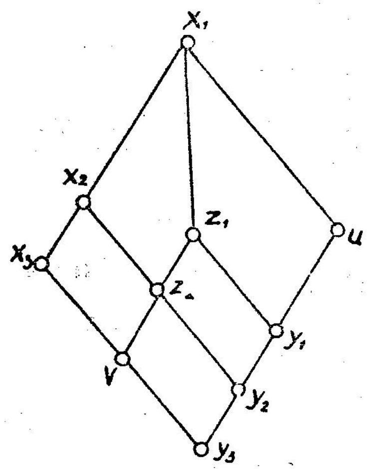
2.

V celom tomto odseku budeme predpokladať, že sväzy S, S' sú semimodulárne, a že platí $S \underset{=}{g} S'$.[5]

Veta 1, *Veta 1 z práce* [2] *pre semimodulárne sväzy neplatí.*



Obr. 1.



Obr. 2.

Dôkaz. Nech S je sväz na obrázku 1, S' sväz na obr. 2. Ľahko sa preverí, že platí $S \underset{=}{g} S'$. Sväzy S, S' sú nie izomorfné, keďže vo sväze S existuje dvojica navzájom komplementárnych prvkov x_3, y_3, ktoré sú pokryté najväčším prvkom sväzu S; vo sväze S' dvojica s takýmito vlastnosťami neexistuje. Podobne sväzy $\tilde{S}$, S' sú nie izomorfné, keďže dvojica prvkov x_3, y_3 vo sväze $\tilde{S}$ je komplementárna a obidva tieto prvky pokrývajú najmenší prvok sväzu $\tilde{S}$; takáto dvojica prvkov sa vo sväze S' nevyskytuje.

Ak by platilo $S \sim A \times B$, $S' \sim \tilde{A} \times B$, musel by teda každý zo sväzov A, B mať viac ako jeden prvok. (Ak by totiž sväz A (B) obsahoval jediný prvok, dostali by sme $A \sim \tilde{A}$, $S \sim S'$, ($\tilde{S} \sim S'$), čo je spor s už dokázaným). Keďže sväz S má 10 prvkov, jeden zo sväzov A, B by musel mať dva prvky a druhý

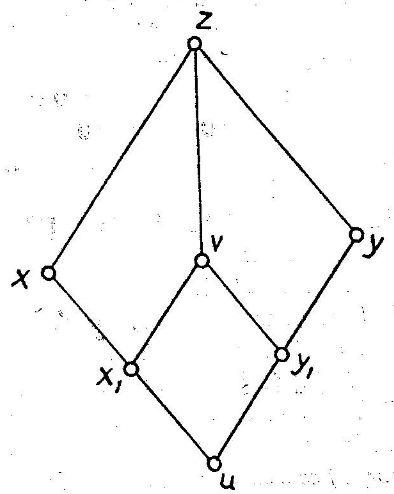
[4] T. j. platí tzv. Jordan-Dedekindova podmienka pre reťazce.

[5] V lemmách 5—16 stačí predpokladať semimodulárnosť sväzu S a vzťah $S \underset{=}{g} S'$.

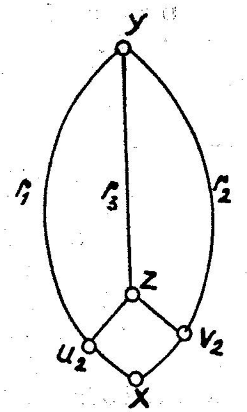
5 prvkov. Predpokladajme, že sväz A má dva prvky, sväz B päť prvkov. Nech a_0, $\bar{a}$ (b_0, $\bar{b}$) je najmenší, resp. najväčší prvok sväzu $A(B)$. Uvažujme prvky $(\bar{a}, b_0)$, $(a_0, \bar{b}) \in A \times B$. Pre ne platí:

1. uvažované prvky sú navzájom komplementárne,
2. prvok $(\bar{a}, b_0)$ pokrýva najmenší prvok sväzu $A \times B$,
3. ak $(a, b) \in A \times B$, $(a, b) > (\bar{a}, b_0)$, potom $(a, b) \cap (a_0, \bar{b}) > (a_0, b_0)$.

(Tvrdenia 1, 2 sú zrejmé. Tvrdenie 3 dokážeme takto: zo vzťahu $(a, b) >$



Obr. 3



Obr. 4

$> (\bar{a}, b_0)$ vyplýva $a \geqq \bar{a}$, teda $a = \bar{a}$. Tým dostávame vzťah $(\bar{a}, b) > (\bar{a}, b_0)$, z ktorého vyplýva $b > b_0$. Potom je:

$$(a, b) \cap (a_0, \bar{b}) = (\bar{a}, b) \cap (a_0, \bar{b}) = (a_0, b) > (a_0, b_0).$$

V izomorfizme $S \sim A \times B$ by sa prvok $(\bar{a}, b_0)$ musel zobraziť na taký prvok sväzu S, ktorý pokrýva u, teda na prvok x_1 alebo y_1. Vyšetríme prvú možnosť $(\bar{a}, b_0) \longleftrightarrow x_1$. Keďže prvok x_1 má jediný komplement, a to y_3, muselo by podľa 1. a predpokladaného izomorfizmu sväzov S, $A \times B$ platiť $y_3 \longleftrightarrow (a_0, \bar{b})$. Z vlastnosti 3 by potom vyplývalo, že pre každý prvok $p \in S$

$$p > x_1 \Rightarrow p \cap y_3 > u.$$

Pre prvok x_3 však platí $x_3 > x_1$, $x_3 \cap y_3 = u$, čím sme dospeli k sporu. Podobne dospejeme k sporu, ak predpokladáme $(\bar{a}, b_0) \longleftrightarrow y_1$. Z toho vyplýva, že sväz S je nerozložiteľný a tvrdenie vety je dokázané.

Lemma 4. *Každý semimodulárny sväz, ktorý nie je modulárnym, obsahuje podsväz, izomorfný so sväzom na obr. 3.*

Dôkaz. Nech S je semimodulárny sväz. Ak by pre každú trojicu prvkov x, y, z, pre ktorú platí $x \cup y = z\, s$, $x\, s\, z$, $y\, s\, z$, platilo zároveň $x \cap y\, s\, x$, $x \cap y\, s\, y$, sväz by bol modulárny ([1], str. 107, veta 3). Predpokladajme, že sväz S nie je modulárny; potom existuje trojica prvkov $x, y, z, x \cup y = z$, $x \, s \, z \, s \, y$, pre ktorú prvok $u = x \cap y$ nie je pokrytý oboma prvkami x, y. Prípadnou zmenou označenia môžeme dosiahnuť, že existuje prvok $x_1, u \, s \, x_1, u < x_1 < x$. Z toho vyplýva:

$$y = u \cup y \leq x_1 \cup y \leq x \cup y = z.$$

Keďže $\langle y, z\rangle$ je prvointerval a rovnosť $x_1 \cup y = y$ je zrejme vylúčená, musí platiť $x_1 \cup y = z$. Z nerovností $u < x_1 < x < z$ ďalej vyplýva, že každý reťazec medzi u, z má aspoň 4 prvky, takže prvok y nemôže pokrývať prvok u. Teda existuje prvok $y_1, u < y_1 < y, u \, s \, y_1$. Podobne ako pre prvky x_1, y sa dokáže $y_1 \cup x = z$. Keďže x_1, y_1 pokrývajú u, prvok $v = x_1 \cup y_1$ pokrýva prvky x_1, y_1. Z uvedených vzťahov dostávame $x \cup v = z$, $y \cup v = z$. Keďže $\langle x_1, v\rangle$, $\langle y_1, v\rangle$ sú prvointervaly, ľahko sa zistí platnosť rovníc $x \cap v = x_1$, $y \cup v = y_1$. Tým je tvrdenie lemmy dokázané.

Poznámka. Z predošlej lemmy vyplýva, že neplatnosť vety 1, [2] pre semimodulárne sväzy vyplýva z toho, že sa v danom semimodulárnom sväze vyskytuje podsväz, izomorfný so sväzom na obr. 3. Preto je prirodzená táto otázka: predpokladajme, že sväzy S, S' sú semimodulárne, $S \, g \, S'$, a že každý podsväz sväzu S a sväzu S' izomorfný so sväzom na obr. 3 sa zachová. Potom platí analogické tvrdenie ako vo vete 1, [2] (t. j. existujú sväzy A, B také, že platí $S \sim A \times B$, $S' \sim \bar{A} \times B$)? Cieľom ďalších úvah tohto odseku je dokázať, že odpoveď na túto otázku je kladná.

Definícia 7. *Podsväz sväzu S, izomorfný so sväzom na obr. 3, budeme nazývať podsväzom typu C.*

Lemma 5. *Nech $S \, g \, S'$, nech r_1, r_2 sú reťazce medzi prvkami x, y. Ak sa jeden z nich zachová, potom druhý sa tiež zachová.*

Dôkaz. Nech r_1, r_2 sú reťazce medzi prvkami x, y. Nech sa reťazec r_1 zachová. Ak $d(r_1) = 2$, tvrdenie lemmy je triviálne. Predpokladajme, že tvrdenie je dokázané pre reťazce dĺžky $2, 3, \ldots, n - 1 (n > 2)$, nech $d(r_1) = n$. Nech reťazec r_1 (r_2) (pozri obr. 4) je tvorený prvkami

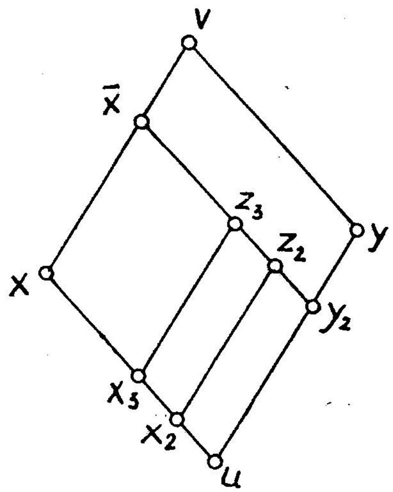
$$x = u_1 < u_2 < \ldots < u_n = y \quad (x = v_1 < v_2 \ldots < v_n = y).$$

Ak $u_2 = v_2$, potom interval $\langle x, v_2\rangle$ sa zachová podľa predpokladu lemmy a interval $\langle v_2, y\rangle$ (dĺžky $n - 1$) sa zachová podľa indukčného predpokladu.

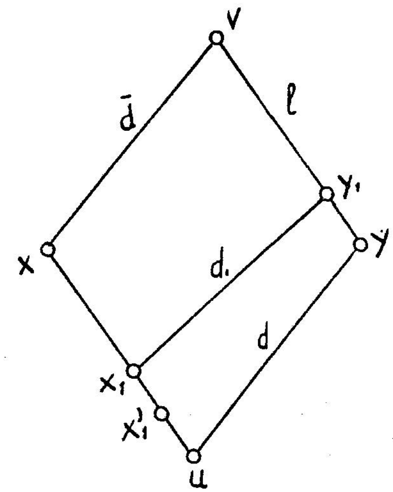
Ak $u_2 \neq v_2$, označme $u_2 \cup v_2 = z$. Keďže prvky u_2, v_2 pokrývajú prvok x a keďže sväz S je semimodulárny, prvok z pokrýva prvky u_2, v_2. Ak $z = y$, potom reťazec r_1 (r_2) je tvorený prvkami x, u_2, z (x, v_2, z). Intervaly $\langle x, u_2\rangle$, $\langle u_2, z\rangle$ sa zachovajú podľa predpokladu lemmy, interval $\langle x, v_2\rangle$ ($\langle v_2, z\rangle$) sa zachová podľa lemmy 2, keďže je jednoducho transponovaný k intervalu $\langle u_2, z\rangle$ ($\langle x, u_2\rangle$). Teda celý reťazec r_2 sa v tomto prípade zachová.

Nech $z < y$. Nech r_3 je nejaký reťazec medzi z, y tvorený prvkami $z = w_1 < w_2 < \ldots < w_{m-2} = y$. (Reťazec r má dĺžku $n - 2$ podľa lemmy 3.) Prvky $u_2 < w_1 < w_2 \ldots < w_{n-2}$ potom tvoria reťazec dĺžky $n - 1$ medzi u_2, y. Keďže reťazec $u_2 < u_3 < \ldots < u_n = y$ sa zachová podľa predpokladu lemmy, zachová sa podľa indukčného predpokladu tiež reťazec r_3. Zistili sme, že prvointerval $\langle v_2, z\rangle$ sa zachová. Teda sa zachová reťazec $v_2 < z < w_2 < w_3 \ldots < w_{n-2} = y$ medzi u_2, y, ktorý má dĺžku $n - 1$.

Podľa indukčného predpokladu sa potom zachová tiež časť reťazca r_2 medzi



Obr. 5



Obr. 6

prvkami v_2, y, ktorá má dĺžku $n - 1$. Keďže interval $\langle x, v_2\rangle$ sa zachová (ako sme už zistili), zachová sa aj celý reťazec r_2.

Lemma 6. *Nech r_1, r_2 sú reťazce medzi x, y. Ak sa jeden z nich prevráti, potom sa prevráti aj druhý.*

Dôkaz je rovnaký, ako v lemme 5 (slovo „zachová" treba všade nahradiť slovom „prevráti").

Dôsledok: Ak sa jeden reťazec medzi x, y zachová (prevráti), potom sa celý interval x, y zachová (prevráti).

Lemma 7. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, nech $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech interval $\langle u, x\rangle$ sa zachová. Potom sa zachová tiež interval $\langle y, v\rangle$.*

Dôkaz. Nech r_1 (r_2) je ľubovoľný reťazec medzi u, x (u, y). Označme $d = d(r_1) + d(r_2)$. Ak $d = 4$, potom prvky x, y pokrývajú prvok u, teda v pokrýva prvky x, y a dokazované tvrdenie vyplýva z lemmy 2. Predpokladajme, že tvrdenie je dokázané pre prípady $d = 4, 5, 6, \ldots n - 1$; nech $d = n$. Nech reťazec r_1 (r_2) je tvorený prvkami:

$$u = x_1 < x_2 < \ldots < x_k = x \quad (u = y_1 < y_2 < \ldots < y_l = y).$$

Označme $x_2 \cup y_2 = z_2$ a ďalej (ak $k > 2$) $x_i \cup z_{i-1} = z_i (i = 3, 4, \ldots, k)$

(pozri obr. 5). Pre všetky prvky z_i je $z_i > y_2$. Ak by niektorý z prvkov z_i bol menší alebo rovný ako prvok x, platilo by $x > y_2$, $x \cap y \geq y_2$, čo je spor s predpokladom. Teda žiaden z prvkov z_i nie je menší alebo rovný ako x. Tým skôr platí, že žiaden z prvkov z_i nie je menší alebo rovný ako x_j ($j = 1, \ldots,$ $k - 1$). Keďže S je semimodulárny sväz, z predošlého vyplýva, že interval $\langle y_2, z_2\rangle$ ($\langle z_{i-1}, z_i\rangle$, $i = 3, \ldots, k$) je jednoducho transponovaný k intervalu $\langle u, x_2\rangle$ ($\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 3, \ldots, k$), teda všetky intervaly $\langle y_2, z_2\rangle$, $\langle z_{i-1}, z_i\rangle$ ($i = 3, \ldots, k$) sa zachovajú. Označme $z_k = \bar{x}$.

Ak je teraz $\bar{x} = v$, potom podľa dôsledku za lemmou 6 celý interval $\langle y_2, v\rangle$ sa zachová. Teda sa zachová aj celý interval, $\langle y, v\rangle$, keďže zrejme je $\langle y, v\rangle \subset$ $\subset \langle y_2, v\rangle$.

Ak $\bar{x} < v$, potom platí $\bar{x} \cup y = v$ (keďže $x < \bar{x}$, $x \cup y = v$).

Označme $\bar{x} \cap y = \bar{u}$. Zo vzťahov $\bar{x} > y_2$, $y \geq y_2$ vyplýva $\bar{u} \geq y_2$. Podľa predošlého celý interval $\langle y_2, \bar{x}\rangle$ sa zachová, teda sa zachová tiež interval $\langle \bar{u}, \bar{x}\rangle \subset \langle y_2, x\rangle$. Keďže reťazec medzi y_2, $\bar{x}$ má dĺžku k, reťazec medzi $\bar{u}$, $\bar{x}$ má dĺžku $\leq k$. Reťazec medzi $\bar{u}$, y má zrejme dĺžku najviac $l - 1$ (prípad $y_2 = y$ je teraz vylúčený, keďže potom by bolo $\bar{x} = v$). Z indukčného predpokladu a z rovníc $\bar{x} \cap y = \bar{u}$, $\bar{x} \cup y = v$ potom vyplýva, že interval $\langle y, v\rangle$ sa zachová.

Lemma 8. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech interval $\langle u, x\rangle$ sa prevráti. Potom tiež interval $\langle y, v\rangle$ sa prevráti.*

Postup dôkazu je taký ako v predošlej lemme.

Lemma 9a. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech $u \, s \, x$. Potom platí $y \, s \, v$.*

Dôkaz. Nech d je dĺžka reťazca medzi u, y. Pred $d = 2$ je tvrdenie zrejmé (keďže sväz S je semimodulárny). Pred $d > 2$ tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na d.

Ak $d > 2$, existuje prvok u_1, $u < u_1 < y$, $u_1 \, s \, u$. Keďže x, u_1 pokrývajú u, tieto prvky sú pokryté prvkom $u_2 = x \cup u_1$. Ľahko sa zistí, že prvky u_2, y sú nezrovnateľné, a že platí $u_2 \cap y = u_1$, $u_2 \cup y = v$. Reťazec medzi u_1, y má dĺžku $d - 1$, teda podľa indukčného predpokladu platí $y \, s \, v$, č. b. t. d.

Poznámka. Na príkladoch sa ľahko zistí, že duálne tvrdenie pre semimodulárne sväzy neplatí.

Lemma 9b. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech reťazec medzi u, y má dĺžku d. Potom reťazec medzi x, v má dĺžku menšiu alebo rovnú ako d.*

Dôkaz. Nech l je dĺžka reťazca medzi u, x. Tvrdenie lemmy budeme dokazovať indukciou vzhľadom na l. Označme znakom $\bar{d}$ ($\bar{l}$) dĺžku reťazca medzi x, v (y, v).

a) Nech $l = 2$. Podľa predošlej lemmy je potom $\bar{l} = 2$. Z Jordan-Dedekindovej podmienky vyplýva $d + \bar{l} = l + \bar{d}$, teda $d = \bar{d}$.

b) Nech $l > 2$. Predpokladajme, že tvrdenie lemmy je dokázané pre

$2, 3, \ldots, l - 1$. Za našich predpokladov existuje prvok x_1', $u < x_1' < x$, $u \, s \, x_1'$. Označme (pozri obr. 6).

$$x_1' \cup y = y_1, \quad y_1 \cap x = x_1.$$

Označme dĺžku reťazca medzi u, x_1 (x_1, y_1) znakom l_1 (d_1). Uvažujme prvky u, y_1. Podľa Jordan-Dedekindovej podmienky platí:

$$d + 2 = l_1 + d_1.$$

Keďže $l_1 \geq 2$, platí $d \geq d_1$. Ak $y_1 = v$, potom $x_1 = x$ a tvrdenie je dokázané. Ak $y_1 < v$, potom z rovníc $x \cap y_1 = x_1$, $x \cup y_1 = v$ a z toho, že dĺžka reťazca medzi prvkami x_1, x je najviac $l - 1$, podľa indukčného predpokladu vyplýva $d_1 \geq \bar{d}$. Úhrnne dostávame $d \geq \bar{d}$.

Poznámka. Z konštrukcie, prevedenej v dôkaze predošlej lemmy, vyplýva správnosť tohoto tvrdenia:

Nech x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$; potom existujú prvky $x_0, \ldots, x_m$, $y_0, \ldots y_m$ také, že platí

1. $u = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = x$,
   $y = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = v$,
2. $y_{i-1} \, s \, y_i$ ($i = 1, \ldots m$),
3. $x_i \cap y_{i-1} = x_{i-1}$, $x_i \cup y_{i-1} = y_i$ ($i = 1, \ldots m$).

Lemma 9. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, $y \, s \, v$, nech interval $\langle y, v\rangle$ sa zachová, nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom tiež interval $\langle u, x\rangle$ sa zachová.*

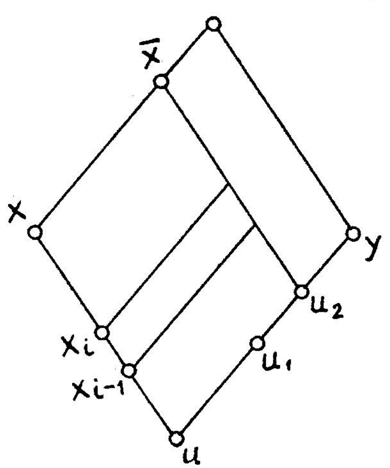
Dôkaz. Nech d je dĺžka reťazca medzi u, y. Ak $d = 2$, potom každý reťazec medzi u, v má tri prvky, teda $u \, s \, x \, s \, v$. Interval $\langle u, x\rangle$ je potom jednoducho transponovaný k intervalu $\langle y, v\rangle$, takže sa interval $\langle u, x\rangle$ zachová podľa lemmy 2.

Ďalej predpokládame, že platí $d = n > 2$, a že tvrdenie lemmy je dokázané pre prípady $2, 3, \ldots, n - 1$. Z predpokladu vyplýva, že existuje prvok u_1, $u < u_1 < y$, $u \, s \, u_1$. Označme $x \cup u_1 = \bar{x}$. Zrejme je $\bar{x} \leq x \leq v$. Prípad $x = \bar{x}$ je vylúčený, keďže potom by bolo $x \cap y \geq u_1$, čo je proti predpokladu. Zostávajú teda možnosti $\bar{x} < v$, $\bar{x} = v$.

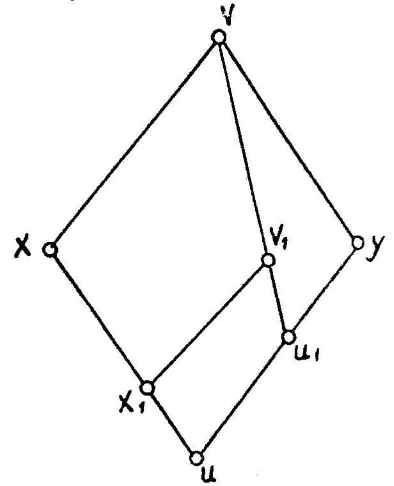
1. Nech $\bar{x} < v$ (pozri obr. 7). Označme potom $\bar{x} \cap y = u_2$. Zrejme je $u_2 \leq y$; z rovnosti $u_2 = y$ by však vyplývalo $\bar{x} = v$, čo je proti predpokladu. Teda $u < u_2 < y$. Z rovníc $\bar{x} \cap y = u_2$, $\bar{x} \cup y = v$ a z toho, že reťazec medzi u_2, y má dĺžku najviac $n - 1$, podľa indukčného predpokladu vyplýva, že interval $\langle u_2, \bar{x}\rangle$ sa zachová.

Zrejme platí $x \cap u_2 = u$, $x \cup u_2 = \bar{x}$. Nech d_1 je dĺžka reťazca medzi u, u_2. Platí $d_1 \leq n - 1$. Ak $u_2 \, s \, \bar{x}$, potom interval u, x sa zachová podľa indukčného predpokladu. Ak $u_2 \, s \, \bar{x}$ neplatí, rozdelíme podľa konštrukcie, opísanej v poznámke za lemmou 9b, interval $\langle u_2, \bar{x}\rangle$ ($\langle u, x\rangle$) na prvointervaly $\langle y_{i-1}, y_i\rangle$ (na intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$) ($i = 1, \ldots, m$). Keďže interval $\langle u_2, \bar{x}\rangle$ sa zachová, zachovajú sa všetky prvointervaly $\langle y_{i-1}, y_i\rangle$ ($i = 1, \ldots m$). Podľa lemmy 9b reťazec medzi x_i a y_i ($i = 0, \ldots, m$) má dĺžku najviac $d_1 \leq n - 1$, takže podľa indukčného predpokladu všetky intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ($i = 1, \ldots m$) sa zachovajú. Existuje teda reťazec medzi u, x, ktorý sa zachová. Podľa lemmy 5 celý interval $\langle u, x \rangle$ sa zachová.

2. Nech $\bar{x} = v$ (pozri obr. 8). Ak by platilo $u \, s \, x$, prvointerval $\langle u, x \rangle$ by sa musel zachovať (v opačnom prípade by sa podľa lemmy 8 interval $\langle y, v \rangle$ prevrátil, čo je spor s predpokladom). Stačí teda vyšetrovať len prípad, keď x



Obr. 7



Obr. 8

nepokrýva u. Potom existuje prvok x_1, pre ktorý platí $u < x_1 < x$, $u \, s \, x_1$. Označme $x_1 \cup u_1 = v_1$. Podľa predpokladu u_1, x_1 pokrývajú u, teda v_1 pokrýva prvky x_1, u_1.

Zrejme $v_1 \leq v$. Ak by platilo $v_1 = v$, potom by prvky $u < x_1 < v_1 = v$ tvorili reťazec medzi u, v, čo je podľa lemmy 3 v spore s predpokladom. Teda $v_1 < v$. Zrejme je $v_1 \cup x \geq u_1 \cup x = v$, teda $v_1 \cup x = v$. Z toho vyplýva $v_1 \cap x < v_1$. Keďže $x_1 < x$, $x_1 < v_1$, $x_1 \, s \, v_1$, musí byť $x \cap v_1 = x_1$. Vzťah $v_1 \leq y$ je vylúčený, keďže potom by platilo $x_1 \leq y$, $x_1 \leq x \cap y$ v spore s predpokladom. Vzťah $v_1 > y$ je tiež vylúčený, keďže potom by platilo $u_1 < y < v_1$, čo je v spore s dokázaným vzťahom $u_1 \, s \, v_1$. Teda prvky v_1, y sú nezrovnateľné. Označme $v_2 = v_1 \cup y$. Zrejme je $y < v_2 \leq v$. Keďže $y \, s \, v$, platí $v_2 = v$. Keďže $u_1 < v_1$, $u_1 < y$, $u_1 \, s \, v_1$, musí platiť $v_1 \cap y = u_1$.

Tým sme dokázali, že prvky $x, y, u, v, x_1, u_1, v_1$ tvoria podsväz typu C. Podľa predpokladu takýto podsväz sa zachová, teda tiež interval $\langle u, x \rangle$ sa zachová.

Lemma 10. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech $v \, s \, y$, nech interval $\langle y, v \rangle$ sa prevráti, nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom tiež interval $\langle u, x \rangle$ sa prevráti.*

Dôkaz. Ak $u \, s \, y$, tvrdenie lemmy je zrejmé podľa lemmy 3 a 2. Ak neplatí $u \, s \, y$, existuje prvok u_1, $u < u_1 < y$, $u \, s \, u_1$. Podobne ako v lemme 9 rozlišujeme tu dve možnosti:

1. $u_1 \cup x < v$, 2. $u_1 \cup x = v$. V prípade 1 je dôkaz rovnaký, ako v časti 1 dôkazu lemmy 9. (Slovo „zachovať" treba všade nahradiť slovom „prevrátiť".) Ak by platila rovnosť 2., (podľa časti 2 dôkazu lemmy 9) prvky y, v by patrili do intervalu typu C, teda interval $\langle y, v \rangle$ by sa musel zachovať, čo je spor s predpokladom lemmy. Teda ak sa $\langle y, v \rangle$ prevráti, prípad 2 nemôže nastať.

Lemma 11. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech interval $\langle y, v \rangle$ sa zachová, nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom interval $\langle u, x \rangle$ sa zachová.*

Dôkaz. Nech prvky $y = y_1 < y_2 < \ldots < y_n = v$ tvoria reťazec medzi y, v. Označme $x \cap y_i = x_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Pre pevné i môže platiť alebo $x_{i-1} = x_i$, alebo $x_{i-1} < x_i$. Pre dôkaz našej lemmy zrejme stačí dokázať, že pre všetky dvojice prvkov x_{i-1}, x_i, pre ktoré je $x_{i-1} < x_i$, platí, že interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ sa zachová.

Nech $x_{i-1} < x_i$. Potom $y_{i-1} \leq x_i \cup y_{i-1} \leq y_i$. Keďže $\langle y_{i-1}, y_i \rangle$ je prvointerval, platí alebo $x_i \cup y_{i-1} = y_{i-1}$, alebo $x_i \cup y_{i-1} = y_i$. Z prvého vzťahu by však vyplývalo $x_i \leq y_{i-1}$, teda $x \cap y_{i-1} \geq x_i$, $x_{i-1} = x_i$ v spore s predpokladom. Teda $x_i \cup y_{i-1} = y_i$. Zrejme platí $x_i \cap y_{i-1} = x_{i-1}$. Keďže $\langle y_{i-1}, y_i \rangle$ je prvointerval, ktorý sa podľa predpokladu lemmy zachová, podľa lemmy 10 sa zachová tiež interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Lemma 12. *Nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$, nech interval $\langle y, v \rangle$ sa prevráti, nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom interval $\langle u, x \rangle$ sa prevráti.*

Dôkaz, ktorý spočíva na lemme 10, je podobný, ako dôkaz lemmy 11.

Definícia 8. *Zaveďme na S reláciu R_1 (R_2) takto: pre $x, y \in S$ platí $x \equiv y$ (R_1) ($x \equiv y$ (R_2)) vtedy a len vtedy, keď je alebo $x = y$, alebo interval $\langle x \cap y, x \cup y \rangle$ sa zachová (prevráti).*

Lemma 13. *Nech $u < v$, $u \equiv v$ (R_1) ($u \equiv v$ (R_2)), $z \in S$. Potom*

$$u \cup z \equiv v \cup z \ (R_1) \ (u \cup z \equiv v \cup z \ (R_2)).$$

Dôkaz. Nech $u < v$, $u \equiv v$ (R_1) ($u \equiv v$ (R_2)). Ak $u \cup z = v \cup z$, tvrdenie lemmy je zrejmé. Ak $u \cup z < v \cup z$, označme $u \cup z = u_1$, $v \cup z = v_1$, $u_1 \cap v = u_2$. Potom zrejme platí:

$$u_2 < v, \quad u_1 \cup v = v_1, \quad u_1 \cap v = u_2.$$

Interval $\langle u_2, v \rangle$ je časťou intervalu $\langle u, v \rangle$, teda interval $\langle u_2, v \rangle$ sa zachová (prevráti). Zrejme je alebo $\langle u_2, v \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle$ (a vtedy je správnosť tvrdenia lemmy jasná), alebo prvky u_1, v sú nezrovnateľné. Potom tvrdenie lemmy vyplýva z lemmy 7 (lemmy 8).

Lemma 14. *Nech $u < v$, $u \equiv v$ (R_1) ($u \equiv v$ (R_2)), $z \in S$, nech všetky podsväzy typu C sväzu S sa zachovajú. Potom $u \cap z \equiv v \cap z$ (R_1) ($u \cap z \equiv v \cap z$ (R_2)).*

Postup dôkazu je analogický ako v predošlej lemme a spočíva na použití lemmy 11 resp. 12.

Lemma 15. *Nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom relácia R_1 je vytvorujúci rozklad na S.*

Dôkaz. a) Relácia R_1 je zrejme reflexívna a symetrická. Tranzitívnosť dokážeme takto: nech $x \equiv y\ (R_1)$, $y \equiv z\ (R_1)$. Označme:

$$x \cap y = u_1,\ y \cap z = u_2,\ u_1 \cap u_2 = u_3,$$
$$x \cup y = v_1,\ y \cup z = v_2,\ v_1 \cup v_2 = v_3.$$

Z uvedených predpokladov a z definície 8 vyplýva:

$$u_1 \equiv y,\ u_2 \equiv y,\ v_1 \equiv y,\ v_2 \equiv y\ (R_1),$$

teda použitím lemmy 14, resp. 13 na prvý, resp. tretí z napísaných vzťahov

$$u_3 = u_1 \cap u_2 \equiv y \cap u_2 = u_2,\ v_3 = v_1 \cup v_2 \equiv y \cup v_2 = v_2\ (R_1).$$

Z predošlého vyplýva, že každá z dvojíc, označených písmenami $u_3, u_2;\ u_2, y;\ y, v_2;\ v_2, v_3$ udáva alebo jediný prvok, alebo interval, ktorý sa zachová. Teda medzi u_3, v_3 existuje reťazec, ktorý sa zachová, takže (podľa lemmy 5) platí alebo $u_3 = v_3$, alebo interval $\langle u_3, v_3\rangle$ sa zachová. V prvom prípade zrejme platí $x = z$, $x \equiv z\ (R_1)$. V druhom prípade prvky $x \cap z$, $x \cup z$ zrejme ležia v intervale $\langle u_3, v_3\rangle$, takže je alebo $x \cap z = x \cup z$, alebo interval $\langle x \cap z, x \cup z\rangle$ sa zachová. V každom prípade je teda $x \equiv z\ (R_1)$.

b) Nech $x \equiv y\ (R_1)$ $z \in S$. Ak $x = y$, zrejme platí $x \cup z \equiv y \cup z\ (R_1)$. Ak $x \neq y$, potom:

$$u = x \cap y < x \cup y = v,\ u \equiv v\ (R_1),\ u \cup z \equiv v \cup z\ (R_1).$$

Ak $u \cup z = v \cup z$, potom zrejme platí $x \cup z = y \cup z$; ak $u \cup z < v \cup z$, potom (keďže interval $\langle u \cap z, v \cup z\rangle$ sa zachová a prvky $x \cup z$, $y \cup z$ ležia v tomto intervale), platí:

$$x \cup z \equiv y \cup z\ (R_1).$$

Analogicky (použitím lemmy 14) sa dokáže vzťah $x \cap z \equiv y \cap z\ (R_1)$. Tým je dôkaz lemmy 15 vykonaný.

Lemma 16. *Nech každý podsväz typu C sväzu S sa zachová. Potom relácia R_2 je vytvorujúci rozklad na S.*

Postup dôkazu je taký ako v lemme 15.

Poznámka. Analogicky by sme definovali relácie R_1', R_2' na S' (pozri definíciu 8, ak všade dáme čiarkované písmeny). Keďže podľa predpokladu S' je tiež semimodulárny sväz, platí: ak každý podsväz typu C sväzu S' sa zachová, potom R_1', R_2' sú vytvorujúce rozklady na S'.

Lemma 17. *Nech každý podsväz typu C sväzu S a sväzu S' sa zachová. Pre rozklady R_1, R_2 platí:*

1. $R_1 \cap R_2 = 0$, $R_1 \cup R_2 = I$,
2. *rozklady R_1, R_2 sú doplnkové.*

Dôkaz prvého, resp. druhého tvrdenia by sa vykonal presne takým postupom ako dôkaz lemmy 6, resp. 7 v práci [2].

Rovnakým postupom ako v [2] z toho vyplýva

Veta 2. *Nech S, S' sú semimodulárne sväzy, nech $S\,\underline{g}\,S'$, nech všetky podsväzy typu C sväzu S i S' sa pri uvažovanom grafovom izomorfizme zachovajú. Potom existujú také sväzy A, B, že platí:*

$$S \sim A \times B,\ S' \sim \tilde{A} \times B.$$

3.

Pripomeňme najprv dve lemmy, odvodené v práci [2], ktoré platia pre ľubovoľný konečný sväz S.

Lemma 18. ([2], lemma 1) *Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne prvky sväzu S, nech a s b s c s d s a. Potom prvky a, b, c, d tvoria podsväz v S, v ktorom presne dva prvky sú nezrovnateľné.*

Lemma 19. ([2], lemma 7. 2). *Nech $S\,\underline{g}\,S'$, nech interval $\langle u, a\rangle$ ($\langle a, u\rangle$) sa zachová, nech interval $\langle u, b\rangle$ ($\langle b, u\rangle$) sa prevráti. Potom platí* $a \cap b = u$ ($a \cup b = u$).

Poznámka. Keďže modulárny sväz neobsahuje žiadny podsväz typu C, z lemmy 7, 8, 11 a 12 vyplýva toto tvrdenie: nech S je modulárny sväz, $S\,\underline{g}\,S'$, nech prvky x, y sú nezrovnateľné, $x \cap y = u$, $x \cup y = v$. Ak sa jeden z intervalov $\langle u, x\rangle$, $\langle y, v\rangle$ zachová (prevráti), potom sa aj druhý zachová (prevráti).

V ďalšom budeme predpokladať, že sväz S je modulárny, a že platí $S\,\underline{g}\,S'$.

Lemma 20. *Nech $x < y$, $x' < y'$, $x = 0$. Potom interval $\langle x, y\rangle$ sa zachová.*

Dôkaz. Nech prvky $x' = u_1' < u_2' < \ldots u_n' = y'$ tvoria reťazec medzi x', y'. Ak sa všetky intervaly $I_i' = \langle u_i', u_{i+1}'\rangle$ $(i = 1, \ldots n-1)$ zachovajú, potom existuje reťazec medzi x, y, ktorý sa zachová a tvrdenie vyplýva z lemmy 5.

Ak by sa niektorý z intervalov I_i' prevrátil, existoval by medzi nimi interval I_l' s najmenším indexom, ktorý sa prevráti. Intervaly I_i' $(i < l)$ by sa zachovali, takže by platilo $x \leq u_l > u_{l+1}$. Možnosť $x = u_l > u_{l+1}$ je zrejme vylúčená, keďže $x = 0$. Ak $x < u_l$, potom prvky $x = u_1 < u_2 < \ldots < u_l$ tvoria reťazec medzi x, u_l, ktorý sa zachová, teda celý interval $\langle x, u_l\rangle$ sa zachová. Keďže interval $\langle u_{l+1}, u_l\rangle$ sa prevráti, platí podľa lemmy 19 $x \cup u_{l+1} = u_l$, čo je spor s predpokladom $x = 0$. Teda všetky intervaly I_i' sa zachovajú.

Lemma 21. *Nech $x < y$, $x' < y'$. Potom interval $\langle x, y\rangle$ sa zachová.*

Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom na $d(x)$. Pre $d(x) = 0$ je tvrdenie dokázané v predošlej lemme.

Nech $d(x) = n$. Nech $x' = u_1' < u_2' < \ldots < u_k' = y'$ je reťazec medzi x', y'. Ak sa všetky intervaly $\langle u_i', u_{i+1}'\rangle$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ zachovajú, platnosť tvrdenia je zrejmá. Predpokladajme, že I_l' je interval s najmenším indexom, ktorý sa prevráti. Potom platí $x \leq u_l > u_{l+1}$. Ak $x = u_l$, vtedy $u_{l+1} < x < y$, $u_{l+1}' < y'$, $d(u_{l+1}) < n$, teda podľa indukčného predpokladu $\langle u_{l+1}, y\rangle$ sa zachová, takže interval $\langle u_{l+1}, x\rangle \subset \langle u_{l+1}, y\rangle$ by sa musel tiež zachovať, čo je spor s predpokladom.

Ak $x < u_l$, potom interval $\langle x, u_l\rangle$ sa zrejme zachová. Podľa lemmy 19 $x \cup u_{l+1} = u_l$. Označme $x \cap u_{l+1} = x_1$. Podľa poznámky za lemmou 19 interval $\langle x_1, u_{l+1}\rangle$ sa zachová, teda $x_1' < u_{l+1}'$. Zrejme je $d(x_1) < d(x) = n$. Úhrnne pre x_1 platí $x_1 < x < y$, $x_1' < u_{l+1}' < y'$.

Podľa indukčného predpokladu interval $\langle x_1, y\rangle$ sa zachová. Potom by sa musel zachovať tiež interval $\langle x_1, x\rangle$ a podľa poznámky za lemmou 19 tiež interval $\langle u_{l+1}, u_l\rangle$, čo je spor s predpokladom. Teda všetky intervaly I_i' sa zachovajú.

Keďže reťazec $x' = u_1' < u_2' < \ldots < u_k' = y'$ medzi x', y' bol vybraný ľubovoľným spôsobom, zároveň sme dokázali, že každý reťazec medzi x', y' sa zachová, teda celý interval $\langle x', y'\rangle$ sa zachová.

Poznámka. Na príkladoch sa ľahko zistí, že lemmy 20 a 21 pre všeobecné (nemodulárne) sväzy neplatia.

Lemma 22. *Nech prvky x', y', $x' \neq y'$ pokrývajú prvok $u' = x' \cap y'$, nech $0 = y < u < x$. Potom prvok $v' = x' \cup y'$ pokrýva prvky x', y'.*

Dôkaz. Nech $x' = x_1' < x_2' < \ldots x_k' = v'$ je ľubovoľný reťazec medzi x', v'. Označme $I_i' = \langle x_i', x_{i+1}'\rangle$ $(i = 1, \ldots k - 1)$. Ak by sa všetky tieto intervaly zachovali, platilo by $u < x < v$, $u' < v'$. Podľa lemmy 21 by sa potom celý interval $\langle u', v'\rangle$ zachoval, čo je spor s predpokladom $y < u$. Teda medzi intervalmi I_i' existuje interval I_l' s najmenším indexom, ktorý sa prevráti. Potom zrejme platí: $u < x \leq x_l$, $x_{l+1} < x_l$, interval $\langle u, x_l\rangle$ sa zachová, interval $\langle x_{l+1}, x_l\rangle$ sa prevráti. Podľa lemmy 19 platí $u \cup x_{l+1} = x_l$. Teda prvky u, x_{l+1} sú nezrovnateľné. Keďže $d(u) = 1$, musí platiť $x_{l+1} \cap u = 0 = y$.

Označme $x \cap x_{l+1} = v_1$. Ak by bolo $v_1 = y$, potom (keďže $x_{l+1} \neq y$) by prvky x, x_{l+1} boli nezrovnateľné, $x \neq x_l$ a prvky y, u, x, x_l, x_{l+1}, by tvorili nemodulárny podsväz v S, čo nie je možné. Teda $v_1 > y$. Zrejme je $v_1 < x$. Keďže dĺžka reťazca medzi y, x je 2, musí platiť $y \mathrel{s} v_1 \mathrel{s} x$, teda tiež $y' \mathrel{s} v_1' \mathrel{s} x'$. Podľa predpokladov dokazovanej lemmy a lemmy 18 je potom $v_1' = x' \cup y' = v'$, $y' \mathrel{s} v' \mathrel{s} x'$, č. b. t. d.

Definícia 9. *Definujme podmnožinu $Y \subset S$ takto: prvok y patrí do množiny Y vtedy a len vtedy, keď k nemu existujú prvky x, u také, že platí:*

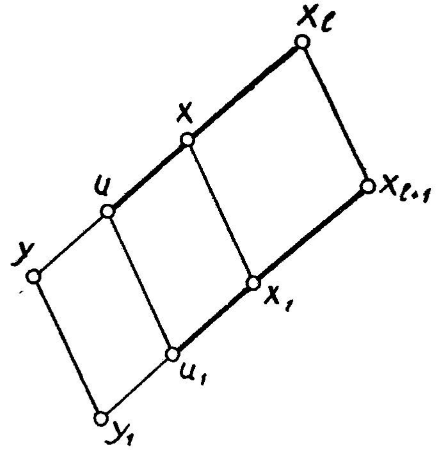
1. $y < u < x$, $y \mathrel{s} u \mathrel{s} x$,
2. $x' \cap y' = u'$,
3. *prvok u nemá relatívny komplement v intervale $\langle y, x\rangle$.*

Lemma 23a. *Predpokladajme, že prvok y patrí do množiny Y. Označme $d(y) = n$. Potom existuje prvok $y_1 \in Y$, pre ktorý platí $d(y_1) = n - 1$.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady lemmy. Používajme rovnaké označenia ako v lemme 22 (okrem predpokladu $y = 0$). Rovnakým postupom ako v dôkaze lemmy 22 sa zistí, že medzi prvointervalmi I_i' musí existovať interval I_l

s najmenším indexom, ktorý sa prevráti. Z predošlého zrejmým postupom vyplýva:
$$d(x_{l+1}) = d(x_l) - 1 \geq d(x) > d(y),$$
takže nemôže platiť $x_{l+1} \leq y$. Rozlišujme dve možnosti:

a) $x_{l+1} > y$. Prvky x_{l+1}, u sú zrejme nezrovnateľné (keby boli zrovnateľné, interval $\langle x_{l+1}, x_l\rangle$ by patril do intervalu $\langle u, x_l\rangle$, teda by sa zachoval, čo je proti predpokladu). Keďže $y \mathrel{s} u$, $x_{l+1} \mathrel{s} x_l$, by potom bolo:
$$u \cap x_{l+1} = y, \quad u \cup x_{l+1} = x_l.$$



Obr. 9

Vtedy by však prvok $v_1 = x \cap x_{l+1}$ bol zrejme relatívnym komplementom prvku u v intervale $\langle y, x\rangle$, čo je v spore s predpokladom. Teda vzťah $x_{l+1} > y$ nemôže platiť.

b) Predpokladajme, že prvky x_{l+1}, y sú nezrovnateľné (pozri obr. 9). Potom zrejme platí $y \cup x_{l+1} = x_l$. Označme $y \cap x_{l+1} = y_1$. Zo vzťahu $x_{l+1} \mathrel{s} x_l$ vyplýva $y_1 \mathrel{s} y$. Označme ďalej:
$$u \cap x_{l+1} = u_1, \quad x \cap x_{l+1} = x_1.$$

Zrejme platí 1') $y_1 \mathrel{s} u_1 \mathrel{s} x_1$, $y_1 < u_1 < x_1$. Z poznámky za lemmou 19 vyplýva, že interval $\langle y_1, u_1\rangle$ ($\langle u_1, x_1\rangle$) sa prevráti (zachová). Ľahko sa zistí, že potom platí 2') $x_1' \cap y_1' = u_1'$.

Podľa vety 6, str. 113 z práce [1] transponované intervaly $\langle y, x\rangle$, $\langle y_1, x_1\rangle$ sú izomorfné, pričom v uvažovanom izomorfizme prvku u je priradený prvok u_1. Keďže u nemá relatívny komplement v $\langle y, x\rangle$, nemá u_1 relatívny komplement v intervale $\langle y_1, x_1\rangle$. Z toho podľa 1' a 2' vyplýva $y_1 \in Y$. Zrejme je $d(y_1) = n - 1$. Tým je tvrdenie lemmy dokázané.

Lemma 23b. *Množina Y je prázdna.*

Dôkaz. Ak by prvok y ležal v množine Y, označme $d(y) = n$. Použijúc n-krát za sebou predošlú lemmu dostali by sme vzťah $0 \in Y$, čo je v spore s lemmou 22.

Z toho bezprostredne vyplýva

Lemma 23. *Nech $y < u < x$, $y \mathrel{s} u \mathrel{s} x$, $x' \cap y' = u'$. Potom existuje relatívny komplement prvku u v intervale $\langle y, x\rangle$.*

Poznámky.

1. Analogickým postupom by sa dokázalo duálne tvrdenie k predošlej lemme.
2. Nech sú splnené predpoklady z predošlej lemmy. Používajme tam za-

vedené označenia. Nech r je relatívny komplement prvku u v intervale $\langle y, x\rangle$. Keďže S je modulárny sväz, platí $y\, s\, r\, s\, x$. Z uvedeného a lemmy 18 vyplýva, že potom musí platiť $x' \cup y' = r'$.

Platnosť duálneho tvrdenia by sme zistili analogicky.

Lemma 24. *Nech prvky x', y', $x' \mp y'$ pokrývajú prvok $u' = x' \cap y'$. Potom x', y' sú pokryté prvkom $v' = x' \cup y'$.*

Dôkaz.

a) Nech všetky prvky x, y, u sú zrovnateľné. Potom tvrdenie lemmy vyplýva z lemmy 23 a za ňou nasledujúcich poznámok.

b) Nech medzi prvkami x, y, u existuje dvojica nezrovnateľných prvkov. Keďže platí $x\, s\, u\, s\, y$, takúto dvojicu môžu tvoriť len prvky x, y a platí alebo $x \cap y = u$, alebo $x \cup y = u$. V prvom prípade označme $x \cup y = v_1$. Keďže S je modulárny sväz, prvok v_1 pokrýva prvky x, y, takže $x\, s\, v_1\, s\, y$, $x'\, s\, v_1'\, s\, y'$. Podľa predpokladu lemmy a lemmy 18 musí byť $v_1' = x' \cup y' = v'$, $x'\, s\, v'\, s\, y'$. V druhom prípade označme $x \cap y = v_2$. Z modulárnosti sväzu S vyplýva $x\, s\, v_2\, s\, y$, teda $x'\, s\, v_2'\, s\, y'$, $v_2' = v'$.

Lemma 25. *Nech prvky x', y', $x' \mp y'$ sú pokryté prvkom $v' = x' \cup y'$. Potom x', y' pokrývajú prvok $u' = x' \cap y'$.*

Dôkaz je k dôkazu lemmy 24 duálny.

Veta 3. *Nech S je modulárny sväz, nech $S \underset{\sim}{g} S'$. Potom sväz S' je modulárny.*

Dôkaz. Podľa vety 3, kap. V., [1] podmienky vyslovené v lemmách 24 a 25, zaručujú modulárnosť sväzu S.

Poznámka. Pre semimodulárne sväzy analogická veta neplatí. Príklad: Nech S je sväz na obr. 3, nech $S' = \tilde{S}$. Zrejme je $S \underset{\sim}{g} S'$, sväz S je semimodulárny, sväz S' však nie je semimodulárny.

Došlo dňa 20. februára 1954.

LITERATÚRA

[1] Г. Биркгоф: Теория структур, Москва, 1952.
[2] Ян Якубик: О графическом изоморфизме структур, Чехослов. мат. журнал, 1954 (v tlači).

О ГРАФИЧЕСКОМ ИЗОМОРФИЗМЕ ПОЛУДЕДЕКИНДОВЫХ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК

Выводы

Понятие графического изоморфизма структур введено Г. Биркгофом (см. [1], стр. 23 и 42). В статье автора [2] рассмотрены некоторые вопросы, касающиеся графического изоморфизма дедекиндовых структур. Главным результатом является следующая теорема ([2], теорема 1):

Пусть S, S' — конечные дедекиндовы структуры, пусть S, S' графически изоморфны. Потом сусчествуют такие структуры A, B, что структура S изоморфна $A \times B$ и структура S' изоморфна структуре $\tilde{A} \times B$ (здесь $A \times B$ обозначает прямое произведение структур A, B и $\tilde{A}$ структуру, двойственную структуре A).

В конце статьи [2] помещены следующие нерешенне вопросы:

a) Справедлива теорема 1 для полудедекиндовых структур?

b) Пусть S — дедекиндова структура, пусть структура S' графически изоморфна структуре S. Следует-ли из того, что структура S' тоже дедекиндова?

В части 2 статьи доказан отрыцательный ответ на вопрос a). Далее доказывается ослабленная форма теоремы 1, [2], которая останет в силе и для полудедекиндовых структур. В части 3 доказано, что ответ на вопрос b) положителен.