O ROVNOMERNEJ KONVERGENCII SPOJITÝCH FUNKCIÍ

JÁN JAKUBÍK, Košice

Cieľom ďalších poznámok je vyšetrenie dvoch problémov, ktoré sa týkajú rovnomernej konvergencie spojitých funkcií. Aby sme ich mohli prehľadne formulovať, zaveďme najprv tieto označenia:

Nech M je množina všetkých spojitých funkcií $x(t)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$. Ďalej všade písmeny $x, y, z, u, v, w, \ldots$ (prípadne s indexmi) značia prvky množiny M. Konvergenciu postupnosti funkcií v každom bode intervalu $\langle 0,1 \rangle$ budeme označovať $x_n \to x$, rovnomernú konvergenciu v $\langle 0,1 \rangle$ $x_n \Rightarrow x$. Pre $M_1 \subset M$ definujme množinu $\bar{M}_1$ ($\tilde{M}_1$) takto:

$x \in \bar{M}_1$ ($x \in \tilde{M}_1$) vtedy a len vtedy, ak existuje postupnosť $\{x_n\}$, $x_n \in M_1$, $n = 1, 2 \ldots$, taká, že platí $x_n \to x$ ($x_n \Rightarrow x$).

Naskytujú sa tieto otázky:

1. *Či existuje vlastná podnožina $M_1 \subset M$, pre ktorú platí $\bar{M}_1 = M$, $\tilde{M}_1 = M_1$.*
2. *Či existuje vlastná podnožina $M_1 \subset M$, ktorá splňuje podmienky z otázky 1. a taká, aby bola grupou (ak grupovou operáciou je sčítanie funkcií).*

Dokážeme, že odpoveď na obidve otázky je kladná. Dôkaz vykonáme tak, že zostrojíme množiny, ktoré majú žiadané vlastnosti.[1]

V odseku 1 odvodíme niekoľko pomocných viet. V odseku 2 urobíme vlastnú konštrukciu hľadaných množín.

1.

Pojmy „rovnomerne ohraničená postupnosť funkcií" a „lineárna závislosť funkcií" považujeme za známe. Postupnosť (čísel alebo funkcií) budeme nazývať stacionárnou, ak existuje také číslo N, že všetky jej členy s indexmi väčšími ako N sú si navzájom rovné.

Lemma 1. Nech $x_n \Rightarrow x$. *Potom postupnosť $\{x_n\}$ je rovnomerne ohraničená.*

Dôkaz je zrejmý.

Definícia 1. *Nech $A \subset M$. Predpokladajme, že je dané zobrazenie množiny A na množinu $B \subset M$, (v označení $d(A) = B$, $d(x) = y$, $x \in A$, $y \in B$), pre ktoré platí: ku každému $x \in A$ existuje množina $m(x) \subset \langle 0,1 \rangle$ tak, že 1. pre $x_1 \neq x_2$ je $m(x_1) \cap m(x_2) = \emptyset$. 2. Ak $d(x) = y$, potom $t \in m(x) \Rightarrow x(t) = y(t)$*[2]. *Zobrazenie týchto vlastností budeme volať deformáciou množiny A na B. Znakom d budeme všade ďalej označovať deformáciu.*

[1] Otázky položil (vychádzajúc z problémov, ktoré sa týkajú topologických grúp) L. Mišík, ktorý už skôr vyriešil (iným postupom) prvú otázku.

Lemma 2. *Nech $d(A) = B$. Potom $\bar{A} \subset \bar{B}$.*

Dôkaz. Nech $x_0 \in \bar{A}$. Potom existuje postupnosť $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ Uvažujme postupnosť $\{y_n\}$, $y_n = d(x_n)$. Dokážeme, že platí $y_n \to x_0$.

Nech $t \in \langle 0,1 \rangle$. 1. Ak pre každé $x_n : t \bar{\in} m(x_n)$, potom $y_n(t) = x_n(t) \to x_0(t)$. 2. Ak pre isté $x_N : t \in m(x_N)$, potom pre $n > N : t \bar{\in} m(x_n)$, $x_n(t) = y_n(t)$, teda aj v tomto prípade $y_n(t) \to x_0(t)$.

Poznámky. 1. Ak je špeciálne $\bar{A} = M$, potom $d(A) = B \Rightarrow \bar{B} = M$.

2. Ľahko sa dokáže zostrenie lemmy 2 : $d(A) = B \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$. (To ďalej nepoužijeme).

3. Lemma 1 a 2 nám naznačujú cestu k zostrojeniu príkladu na zodpovedanie otázky 1. Treba vyjsť z nejakej množiny X, pre ktorú platí $\bar{X} = M$ a pokúsiť sa deformovať množinu X na množinu Y tak, aby žiadna nestacionárna postupnosť $\{y_n\}$, $y_n \in Y$ nebola rovnomerne ohraničená. Podľa lemmy 1 potom platí $\tilde{Y} = Y$ a podľa lemmy 2 $\bar{Y} = M$.

Lemma 3. *Nech $x_1, x_2, \ldots x_k$ sú navzájom lineárne nezávislé funkcie, nech a_i^n sú reálne čísla ($i = 1, \ldots k$, $n = 1, 2, \ldots$). Označme $a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \ldots + a_k^n x_k = \xi_n$. Nech $\xi_n \to x$. Potom funkcia x je lineárne závislá na $x_1, \ldots x_k$.*

Dôkaz. Pre $k = 1$ je tvrdenie zrejmé. Predpokladajme, že je to dokázané pre $1, 2, \ldots k - 1$.

a) Ak sa z postupnosti $\{a_k^n\}$ dá vybrať konvergentná čiastočná postupnosť $a_k^{n'} \to a_k'$, vyberme k nej príslušnú čiastočnú postupnosť $\{\xi_n'\}$ z postupnosti $\{\xi_n\}$. Nech $\xi_n' = a_1^{n'} x_1 + \ldots + a_k^{n'} x_k$. Potom $a_1^{n'} x_1 + \ldots + a_{k-1}^{n'} x_{k-1} \to x - a_k' x_k$, teda funkcia $x - a_k' x_k$ je podľa indukčného predpokladu lineárne závislá od $x_1, \ldots x_{k-1}$, z čoho vyplýva tvrdenie lemmy.

b) Ak sa z postupnosti $\{a_k^n\}$ nedá vybrať konvergentná čiastočná postupnosť, dá sa z nej vybrať čiastočná postupnosť $\{a_k^{n'}\}$ taká, že 1. $|a_k^{n'}| \to \infty$, 2. $a_k^{n'} \neq 0$. Vyberme k nej príslušnú postupnosť $\xi_n' = a_1^{n'} x_1 + a_2^{n'} x_2 + \ldots + a_k^{n'} x_k \to x$. Označme:

$$\frac{a_i^{n'}}{a_k^{n'}} = b_i^{n'} (i = 1, \ldots k - 1). \text{ Platí } \frac{1}{a_k^{n'}} \to 0, \text{ teda:}$$

$$b_1^{n'} x_1 + b_2^{n'} x_2 + \ldots + b_{k-1}^{n'} x_{k-1} + x_k \to 0$$

$$b_1^{n'} x_1 + b_2^{n'} x_2 + \ldots + b_{k-1}^{n'} x_{k-1} \to - x_k.$$

Podľa indukčného predpokladu by funkcia x_k bola lineárne závislá od funkcií $x_1, \ldots, x_{k-1}$, čo je spor s predpokladom.

Dôsledok 1. *Nech platia predpoklady z lemmy 3. Potom každá z postupností $\{a_i^n\}$ ($i = 1, \ldots k$) je konvergentná.*

[2] Znak $\Rightarrow$ na tomto mieste značí implikáciu. V ďalšom texte je zo súvislosti zrejmé o aký význam symbolu $\Rightarrow$ ide.

Dôkaz. Stačí dokázať, že postupnosť $\{a_k^n\}$ je konvergentná. Podľa dôkazu predošlej lemmy sa dá z nej vybrať konvergentná čiastočná postupnosť $a_k^{n'} \to a'_k$. Ak číslo a''_k je hromadným bodom postupnosti $\{a_k^n\}$[3], existuje jej čiastočná postupnosť $a_k^{n''} \to a''_k$. Vyberme príslušné postupnosti z postupnosti $\{\xi_n\}$:

$$\xi'_n = a_1^{n'} x_1 + \ldots + a_k^{n'} x_k \to x,$$
$$\xi''_n = a_1^{n''} x_1 + \ldots + a_k^{n''} x_k \to x.$$

Z toho vyplýva:

$$(a_1^{n'} - a_1^{n''})x_1 + \ldots + (a_{k-1}^{n'} - a_{k-1}^{n''})x_{k-1} \to (a'_k - a''_k)x_k.$$

Ak by $a'_k - a''_k \neq 0$, dostali by sme spor s tvrdením lemmy 3. Teda postupnosť $\{a_k^n\}$ má jediný hromadný bod a je konvergentná.

Dôsledok 2. *Nech platia predpoklady z lemmy 3, nech $a_i^n (i = 1, \ldots k$, $n = 1, 2, \ldots)$ sú celé čísla. Potom postupnosť $\{\xi_n\}$ je stacionárna.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že každá z postupností $\{a_i^n\}$ $(i = 1 \ldots k)$ je stacionárna. Podľa dôsledku 1 postupnosť $\{a_i^n\}$ je konvergentná. Postupnosť, ktorej všetky členy sú celé čísla, môže byť konvergentná len vtedy, keď je stacionárna.

Poznámka. Predošlá lemma vyplýva bezprostredne a priamo zo základných viet teórie lineárnych priestorov s konečným počtom dimenzií.

Lemma 4. *Nech $x_1, \ldots, x_k$ sú lineárne nezávislé funkcie, nech c_i^n $(i = 1, \ldots k$, $n = 1, 2, \ldots)$ sú celé čísla, nech postupnosť $\{\xi_n\}$, $\xi_n = c_1^n x_1 + \ldots + c_k^n x_k$ má všetky členy navzájom rôzne. Potom postupnosť $\{\xi_n\}$ nie je rovnomerne ohraničená.*

Dôkaz. 1. Nech $k = 1$. Keďže postupnosť celých čísel $\{c_1^n\}$ je prostá, platí $|c_1^n| \to \infty$. Postupnosť funkcií $\{c_1^n x_1\}$ potom nemôže byť rovnomerne ohraničená.

2. Predpokladajme, že tvrdenie je dokázané pre $1, 2, \ldots k-1$. Predpokladajme, že by postupnosť $\{\xi_n\}$ bola rovnomerne ohraničená.

a) Ak by pritom postupnosť $\{c_k^n\}$ bola ohraničená, obsahovala by len konečný počet rôznych členov; postupovať s členmi

$$\xi_k^n = c_1^n x_1 + \ldots + c_{k-1}^n x_{k-1} \tag{1}$$

by potom musela obsahovať nekonečne mnoho rôznych členov, teda by sa z nej dala vybrať čiastočná postupnosť $\{\xi_k^{n'}\}$, ktorej všetky členy by boli navzájom rôzne. Z uvedených predpokladov zároveň vyplýva, že by postupnosť $\{\xi_k^{n'}\}$ bola rovnomerne ohraničená (keďže $\xi_k^{n'} = \xi_{n'} - c_k^n x_k$). To je spor s indukčným predpokladom.

b) Ak $\{c_k^n\}$ nie je ohraničená, dá sa z nej vybrať taká čiastočná postupnosť $\{c_k^{n'}\}$, že platí $|c_k^{n'}| \to \infty$, $c_k^{n'} \neq 0$, teda $\frac{1}{c_k^{n'}} \to 0$. Pre čiastočnú postupnosť $\{c_k^{n'}\}$

[3] Podľa časti b) dôkazu lemmy 3 $+\infty$ ani $-\infty$ nemôžu byť hromadnými bodmi uvažovanej postupnosti.

vyberme príslušnú postupnosť $\{\xi'_n\}$, $\xi'_n = c_1^{n'} x_1 + \ldots + c_k^{n'} x_k$. Označme $-\frac{c_i^{n'}}{c_k^{n'}} = b_i^{n'}$, $i = 1, \ldots k-1$. Z predpokladu o rovnomernej ohraničenosti postupnosti $\{\xi'_n\}$ vyplýva, že postupnosť o členoch

$$-\frac{1}{c_k^{n'}}\xi'_n = b_1^{n'} x_1 + \ldots + b_{k-1}^{n'} x_{k-1} - x_k$$

konverguje k funkcii $x = 0$, teda $b_1^{n'} x_1 + \ldots + b_{k-1}^{n'} x_{k-1} \to x_k$. Podľa lemmy 3 by funkcia x_k bola lineárne závislá od $x_1, \ldots x_{k-1}$, čo je spor s predpokladom.

Poznámky.

1. Nech $x \in M$, nech $I \subset \langle 0,1 \rangle$. Pod znakom x_I budeme rozumieť funkciu, ktorej oblasťou definície je množina I a ktorá na tejto množine nadobúda rovnaké hodnoty ako funkcia x. Budeme hovoriť, že funkcie $x_1, \ldots x_k$ sú lineárne závislé, resp. nezávislé na I, ak funkcie $x_{1I}, \ldots, x_{kI}$ sú lineárne závislé, resp. nezávislé. Ak funkcie $x_{1I}, \ldots x_{kI}$ sú lineárne nezávislé na I, potom sú lineárne nezávislé (opačné tvrdenie neplatí).

2. Pripomeňme výslovne, že v lemmách 3 a 4 je nie potrebné predpokladať, že uvažované funkcie majú za oblasť definície interval $\langle 0,1 \rangle$ (oblasť definície môže byť ľubovoľná, ovšem rovnaká pre všetky funkcie $x_1, \ldots x_k$, x).

2.

Definícia 2. *Funkciu $x \in M$ budeme volať racionálnou lomenou čiarou, ak existuje prirodzené číslo n a racionálne čísla $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ také, že 1. $x(t_i)$ je racionálne číslo $(i = 0, 1, \ldots n)$, 2. funkcia x je lineárna v intervale $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ $(i = 1, \ldots n)$. Množinu všetkých racionálnych lomených čiar budeme označovať X.*

Lemma 5. *Množina X je spočítateľná a platí $\bar{X} = M$.*

Dôkaz oboch tvrdení je zrejmý. (Platí dokonca $\tilde{X} = M$). Množinu X budeme v ďalšom uvažovať v tvare postupnosti $X = \{x_n\}$.

Definícia 3. *Zvoľme si postupnosť otvorených intervalov I_n, $n = 1, 2, \ldots$, $I_n \subset \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ s racionálnymi koncovými bodmi, z ktorých ľubovoľné dva sú disjunktné. Funkcii $x_n \in X$ priraďme funkciu y_n definovanú takto:*

Ak $t \bar{\in} I_n$, položme $y_n(t) = x_n(t)$. Nech $I_n = (a_n, b_n)$, v strede c_n intervalu I_n nech $y_n(c_n) = n + \max_{i=1,\ldots n-1} |x_i(c_n)|$ pre $n > 1$; $y_1(c_1) = 1$; v intervaloch (a_n, c_n), (c_n, b_n) utvoríme $y_n(t)$ tak, aby funkcia $y_n(t)$ bola lineárna v každom z intervalov $\langle a_n, c_n \rangle$, $\langle c_n, b_n \rangle$. Množinu všetkých funkcií, vystupujúcich v postupnosti $\{y_n\}$, označme Y. Zrejme platí:

Lemma 6. *Priradenie $d(x_n) = y_n$, ktoré sme práve definovali, je deformáciou množiny X na Y. Platí $Y \subset X$.*

Lemma 7. $\bar{Y} = Y$.

Dôkaz. Nech $\{n_i\}$ je postupnosť prirodzených čísiel; uvažujme postupnosť

$\{y_{n_i}\}$. Ak postupnosť $\{n_i\}$ obsahuje nekonečne mnoho rôznych čísiel, potom podľa definície 3 postupnosť $\langle y_{n_i}\rangle$ nie je rovnomerne ohraničená, teda (podľa lemmy 1) nie je rovnomerne konvergentná. Ak $\{n_i\}$ obsahuje len konečný počet rôznych čísiel, potom je $\{y_{n_i}\}$ alebo stacionárna, alebo divergentná. Tým je dôkaz vykonaný.

Veta 1. *Platí* $\overline{Y} = M$, $\tilde{Y} = Y$.

Dôkaz prvého tvrdenia vyplýva z lemmat 5, 6 a 2; druhé tvrdenie je vyslovené v lemme 7.

Definícia 4. *Nech* $A \subset M$. *Znakom* $g(A)$ *označme množinu všetkých funkcií, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie funkcií* $a_i \in A$ *s* **celočíselnými** *koeficientmi.*

Zrejme platí:

Lemma 8. *Nech* $A \subset M$. *Množina* $g(A)$ *je grupa (keď pod grupovou operáciou rozumieme sčitovanie funkcií).*

Poznámka. Postup pri sostrojovaní príkladu k otázke 2 bude tento: Vyjdeme od množiny Y z definície 3 a deformujeme ju na istú množinu Z tak, aby funkcie množiny Z boli lineárne nezávislé. Utvoríme množinu $g(Z)$ a vyšetríme otázku rovnomernej ohraničenosti postupností, ktorých členy sú prvkami $g(Z)$. Na základe zistených vlastností množiny $g(Z)$ deformujeme množinu Z na istú množinu V tak, aby žiadna nestacionárna postupnosť, ktorej členy patria do $g(V)$, nebola rovnomerne ohraničená. Výsledná množina bude $W = g(V)$.

Definícia 5. *Definujme množinu* $\mathfrak{a}_n \subset \langle 0,1\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$ *takto:* $t \in \mathfrak{a}_n$ *vtedy a len vtedy, ak medzi funkciami* $y_1, \dots y_{n-1}$ *existuje aspoň jedna taká, ktorá nemá deriváciu v bode* t. $\mathfrak{a}_1$ *nech je rovná prázdnej množine.*

Lemma 9. *Všetky množiny* $\mathfrak{a}_n$ *sú konečné.*

Dôkaz vyplýva z definícií 3 a 5.

Definícia 6. *Nech* $\{I'_n\}$ *je postupnosť otvorených intervalov, z ktorých ľubovoľné dva sú navzájom disjunktné, nech* $I'_n \subset \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$. *Zvoľme si v každom intervale* I'_n *racionálne číslo* t_n, $t_n \bar{\in} \mathfrak{a}_n$. *Priraďme každej funkcii* $y_n \in Y$ *funkciu* z_n, *pre ktorú platí:* 1. $z_n \in X$, 2. z_n *nemá deriváciu v bode* t_n, 3. *pre* $t \bar{\in} I'_n$ *je* $y_n(t) = z_n(t)$. *Takáto funkcia* z_n *zrejme existuje. Množinu všetkých* z_n *označme* Z.

Lemma 10. *Pre množinu* Z *platí:* 1. $\overline{Z} = M$, 2. $\tilde{Z} = Z$, 3. *funkcie množiny* Z *sú navzájom lineárne nezávislé v intervale* $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$.

Dôkaz.

1. Zobrazenie množiny Y na Z, zavedené v definícii 6, je zrejme deformácia, teda podľa vety 1 a lemmy 1 $\overline{Z} = M$.

2. Dôkaz je taký ako v lemme 7, keďže na intervale $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ platí $y_n(t) = z_n(t)$.

3. Žiadna z funkcií z_n je nie identicky rovná nule, (v intervale I_n je supremum funkcie $z_n \geq n$). Funkcia z_n nie je lineárne závislá od $z_1, \dots, z_{n-1}$ (v opačnom prípade by mala deriváciu v bode t_n, v spore s definíciou 6). Ak by sa z_n dala vyjadriť v tvare $z_n = a_1 z_{n_1} + \dots + a_k z_{n_k}$, môžeme bez ujmy všeobecnosti predpokladať $a_{n_i} \neq 0$ $(i = 1, \dots k)$. Nech n_0 je najväčšie z čísel $n, n_1, \dots n_k$. Potom

by bolo z_{n_0} lineárne závislé od $z_1, \dots, z_{n_0 - 1}$, čo je spor s už dokázaným tvrdením.

Lemma 11. *Označme* $Z_n = \{z_1, z_2, \dots z_n\}$. *Množina* $g(Z_n)$ *obsahuje len konečný počet funkcií, ktorých absolútne hodnoty sú v každom bode intervalu* $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ *menšie ako* n.

Dôkaz. Ak by takýchto funkcií v $g(Z_n)$ bol nekonečný počet, mohli by sme z nich utvoriť postupnosť, ktorej všetky členy by boli navzájom rôzne. To by bol spor s lemmou 4, keďže funkcie $z_1, \dots z_n$ sú lineárne nezávislé v intervale $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$.

Označme $g_1(Z_1) = g(Z_1)$, $g_1(Z_n) = g(Z_n) - g(Z_{n-1})$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Množinu všetkých funkcií, ktoré patria do $g_1(Z_n)$ a ktoré nie sú identicky rovné nule a majú vlastnosti uvedené v predošlej lemme,[4] označme $g_0(Z_n)$. Ak $g_0(Z_n)$ je neprázdna, budeme jej prvky označovať ξ_i^n. Podľa lemmy 11 môžeme písať $g_0(Z_n) = \{\xi_1^n, \dots, \xi_{l_n}^n\}$. Ďalej budeme používať označenia

$$\xi_i^n = c_1^{ni} z_1 + c_2^{ni} z_2 + \dots + c_n^{ni} z_n,$$
$$\eta_i^n = c_1^{ni} z_1 + c_2^{ni} z_2 + \dots + c_{n-1}^{ni} z_{n-1}.$$

Definícia 7. *Nech* $\{I''_n\}$ *je postupnosť otvorených intervalov, z ktorých ľubovoľné dva sú disjunktné,* $I''_n \subset \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$, *nech* $I''_n = (a''_n, b''_n)$, $t''_n \in I''_n$. *Priraďme každej funkcii* $z_n \in Z$ *funkciu* v_n, *definovanú takto: ak* $g_0(Z_n) = \emptyset$, *nech* $v_n = z_n$; *ak* $g_0(Z_n) \neq \emptyset$, *potom*

1. *pre* $t \bar{\in} I''_n$ *nech* $v_n(t) = z_n(t)$,

2. *pre* $t = t''_n$ *položme* $v_n(t''_n) = \max\limits_{i=1,\dots l_n} \dfrac{|\eta_i^n(t''_n)| + n}{|c_n^{ni}|}$ *ak* $n > 1$[5] *a* $v_1(t''_1) = z''_1(t''_1)$,

3. *v intervale* (a''_n, t''_n) $[(t''_n, b''_n)]$ *definujme* v_n *tak, aby funkcia* v_n *bola lineárna v intervale* $\langle a''_n, t''_n\rangle$ $[\langle t''_n, b''_n\rangle]$.

Množinu všetkých funkcií v_n *označme* V. *Označme ďalej*

$$V_n = \{v_1, \dots, v_n\}, \; g_1(V_1) = g(V_1), \; g_1(V_n) = g(V_n) - g(V_{n-1}) (n \geq 2).$$

Lemma 12. *Platí* 1. $\overline{V} = M$, 2. *funkcie množiny* V *sú navzájom lineárne nezávislé.*

Dôkaz prvého tvrdenia vyplýva z toho, že zobrazenie množiny Z na V, uvažované v definícii 7, je zrejme deformácia. Dôkaz druhého tvrdenia vyplýva z toho, že v intervale $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ platí $z_n(t) = v_n(t)$ a z lemmy 10 a 3).

Lemma 13. *Nech* $n > 1$. *Nech* $w \in g_1(W_n)$, $w \neq 0$. *Potom existuje* $t_0 \in \langle 0,1\rangle$ *tak, že* $|w(t_0)| \geq n$.

Dôkaz. Podľa predpokladu sa w dá vyjadriť v tvare $w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ (c_i celé). Uvažujme prvok $\xi = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n$. Rozlišujeme tieto možnosti: 1. $\xi \bar{\in} g_0(Z_n)$. Potom existuje $t_0 \in \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$, pre ktoré platí $|\xi(t_0)| \geq n$. Podľa

[4] t. j. v každom bode intervalu $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ sú v absolútnej hodnote menšie ako n.

[5] Keďže je $n > 1$ a $\xi_i^n \in g_1(Z_n)$, $\xi_i^n \not\equiv 0$, musí byť $c_n^{ni} \neq 0$.

definície 7 je však $w(t_0) = \xi(t_0)$, teda $|w(t_0)| \geq n$. 2. $\xi \in g_0(Z_n)$. Potom je pre vhodné $i \in \{1, \ldots, l_n\}$ $\xi = \xi_i^n$,

$$\xi = c_1^{ni} z_1 + \ldots + c_n^{ni} z_n, \text{ teda pre } w \text{ platí:}$$

$$w = c_1^{ni} v_1 + \ldots + c_n^{ni} v_n.$$

Podľa definície 7 pre $t = t_n''$ platí $|v_n(t_n'')| \geq \frac{|\eta_i^n(t_n'')|}{|c_n^{ni}|} + \frac{n}{|c_n^{ni}|}$ $(i = 1, \ldots, l_n)$, teda:

$$|c_n^{ni} v_n(t_n'')| \geq |\eta_i^n(t_n'')| + n,$$

$$|\eta_i^n(t_n'') + c_n^{ni} v_n(t_n'')| \geq |c_n^{ni} v_n(t_n'')| - |\eta_i^n(t_n'')| \geq n.$$

Podľa definície 7 je ďalej $v_i(t_n'') = z_i(t_n'')(i = 1, \ldots n - 1)$, teda:

$$\eta_i^n(t_n'') + c_n^{ni} v_n(t_n'') = c_1^{ni} v_1(t_n'') + \ldots + c_{n-1}^{ni} v_{n-1}(t_n'') + c_n^{ni} v_n(t_n'') = w(t_n'').$$

Podľa poslednej nerovnosti je $|w(t_n'')| \geq n$.

Poznámka. Zrejme platí $g(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(V_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_1(V_n)$.

Veta 2. *Označme $W = g(V)$. Množina W je grupa a platí pre ňu $\overline{W} = M$, $\tilde{W} = W$.*[6]

Dôkaz. Je zrejmé, že $g(V)$ je grupou. Keďže $V \subset W$, $\overline{V} = M$, tým skôr platí $\overline{W} = M$.

Nech $w_n \in W (n = 1, 2 \ldots)$, $w_n \Rightarrow u \in M$. Nech existuje také prirodzené číslo N, že všetky členy postupnosti $\{w_n\}$ ležia v množine $g(V_N)$. Podľa dôsledku 2 lemmy 3 postupnosť $\{w_n\}$ je stacionárna, teda platí $w \in W$.

Ak neexistuje také prirodzené číslo N, že všetky členy postupnosti $\{w_n\}$ ležia v množine $g(V_N)$, potom pre ľubovoľné N existuje $m > N$ tak, že istý člen w_{n_m} uvažovanej postupnosti patrí do $g_1(V_m)$. Teda je $\max_{0 \leq t \leq 1} |w_{n_m}(t)| \geq m$ (podľa lemmy 13). Postupnosť $\{w_n\}$ nie je potom rovnomerne ohraničená, teda nie je rovnomerne konvergentná, čo je v spore s predpokladom.

Poznámka. Výsledky lemmy 10 a vety 2 môžeme zhrnúť takto:

Existuje množina $Z \subset M$, pre ktoré platí

1. funkcia množiny Z sú navzájom lineárne nezávislé
2. $\overline{Z} = M$, $g(\widetilde{Z}) = g(Z) \neq M$.

Došlo dňa 26. januára 1954.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ЯН ЯКУБИК

Выводы

Пусть М — множество всех непрерывных функций $x(t)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$. Буквы $x, y, \ldots$ в статье обозначают элементы множества M. Сходимость последовательности функций в каждой точке инпервала $\langle 0,1 \rangle$ мы будем обозначать $x_n \to x$, равномерную сходимость $x_n \Rightarrow x$.

Пусть $M_1 \subset M$. Определим множество $\overline{M}_1 \subset M$ ($\tilde{M}_1 \subset M$) следующим образом: $x \in \overline{M}_1$ ($x \in \tilde{M}_1$) тогда и только тогда, если сусчествуем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in M_1$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что имеет место $x_n \to x$ ($x_n \Rightarrow x$).

Множество M — группа (если групповую операцию представляет сложение функций). Если $M_1 \subset M$, обозначим через $g(M_1)$ пересечение всех подгрупп группы M, содержащих множество M_1. В стате построен пример множества $Z \subset M$, которое имеет следующие свойства:

1. Функсии множестра Z линейно незавиеимы
2. $\overline{Z} = M$, $g(\widetilde{Z}) = g(Z) \neq M$.

[6] Zrejme $W \neq M$.