O PRÚDOVOM POLI V HOMOGÉNNOM POLOPRIESTORE S GUĽOVOU VLOŽKOU ODLIŠNEJ VODIVOSTI

T. KOLBENHEYER, Košice

Teoretické podklady interpretácie výsledkov geoelektrických odporových meraní sú veľmi podrobne zpracované pre útvary vymedzené rovinnými plochami, a to najmä pre polopriestor, ktorý pozostáva z neveľkého počtu vrstiev konštantnej mocnosti. Vo všetkých týchto prípadoch ide o geometrické schémy pozostávajúce z útvarov, ktoré majú aspoň jeden rozmer neohraničený, vo väčšine prípadov sú však dva rozmery nekonečné. Pomerne málo pozornosti sa doteraz venuje odporovým účinkom útvarov, ktoré sú po geometrickej stránke všestranne ohraničené. Ak pritom prihliadame na to, že sa u nás používajú odporové metódy pomerne často pri prieskume útvarov s konečnými, rádove približne rovnakými rozmermi, ukazuje sa potrebné venovať viac pozornosti riešeniu aspoň niektorých takýchto problémov. Geometricky najjednoduchším prípadom tohto druhu je polopriestor s guľovou vložkou.

Po riešení problému sýtenia multipólovými zdrojmi v homogénnom priestore so sférickou vložkou naznačuje sa v tejto práci spôsob striktného riešenia predloženého problému a odvodzujú sa približné vzorce, ktoré v ďalekosiahlej miere vyhovujú všetkým praktickým požiadavkám.

Otázku prúdového poľa v homogénnom polopriestore s guľovou vložkou odlišnej vodivosti riešil približnými metódami A. I. Zaborovskij (3). Bližší rozbor problému však ukazuje, že presnosť týchto metód nevyhovuje všetkým praktickým požiadavkám. Striktné riešenie problému podala N. V. Lipskaja (2) v dobe, keď už takmer celá tu predložená práca bola pripravená pre tlač. Uverejnenie tejto práce sa však pritom všetkom ukázalo účelným, pretože je nielen po metodickej, ale aj po obsahovej stránke od spomenutých už prác, ktoré sa zaoberajú daným problémom, odlišná. Odvodené vzorce môžu slúžiť ako východisko pre ďalšie rozvitie problému a sú prispôsobené praktickým potrebám numerického počítania.

§ 1. REKAPITULÁCIA ZÁKLADNÝCH ZÁKONOV, DEFINÍCIÍ A VZORCOV POTREBNÝCH PRE RIEŠENIE PROBLÉMU

Vzťah medzi vektorom hustoty prúdu $\vec{i}$ a potenciálom V v izotrópnom prostredí vyjadruje Ohmov zákon

$$\vec{i} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} V, \tag{1}$$

kde ϱ je špecifický odpor prostredia v uvažovanom bode. V ľubovoľnom bode, ktorý patrí k oblasti, kde nie sú zdroje prúdu, je $\operatorname{div}\vec{i} = 0$, a preto v takejto oblasti potenciál vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici.

$$\Delta V = 0, \tag{2}$$

ak ide o homogénne prostredie.

V prípade, že celý priestor je vyplnený homogénnym a izotrópnym prostredím (čo do elektrickej vodivosti) a toto prostredie sýtime jediným bodovým zdrojom, je potenciál $V_{(0)}$ v ľubovoľnom bode priestoru vo vzdialenosti R od zdroja

$$V_{(0)} = \frac{q}{R}, \tag{3}$$

kde q je úmerné intenzite prúdu I, ktorý vyteká zo zdroja:

$$q = \frac{I\varrho}{4\pi}.$$

Za ináč tých istých podmienok pri sýtení jediným dipólovým, kvadrupólovým, oktapólovým alebo všeobecne multipólovým zdrojom pre potenciál v bode o pravouhlých karteziánskych súradniciach ξ_1, ξ_2, ξ_3 vo vzdialenosti R od zdroja platia preto vzťahy:

1. pri dipólovom sýtení

$$V_{(1)} = -\frac{1}{1!}\sum_i Mi\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{1}{R}\right), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3a}$$

2. pri kvadrupólovom sýtení:

$$V_{(2)} = \frac{1}{2!}\sum_{ik} M_{ik}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_k}\left(\frac{1}{R}\right), \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{3b}$$

3. pri oktapólovom sýtení:

$$V_{(3)} = -\frac{1}{3!}\sum_{ikl} M_{ikl}\frac{\partial^3}{\partial\xi_i\partial\xi_k\partial\xi_l}\left(\frac{1}{R}\right), \quad (i, k, l = 1, 2, 3) \tag{3c}$$

4. vo všeobecnom prípade 2^n-pólového sýtenia:

$$V_{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} M_{i_1 i_2 \ldots i_n}\frac{\partial^n}{\partial\xi_{i_1}\partial\xi_{i_2}\ldots\partial\xi_{i_n}}\left(\frac{1}{R}\right), \quad (i_1, i_2, \ldots = 1, 2, 3) \tag{3d}$$

kde M_i sú zložky vektora dipólového momentu, M_{ik}, M_{ikl} atď. zložky tenzoru kvadrupólového, oktapólového momentu zdroja atď.

Dokážeme platnosť vzorca 3b pre potenciál kvadrupólového zdroja. Dôkaz ostatných vzorcov, ako aj všeobecného vzorca (3d) možno previesť tým istým spôsobom.

Majme najprv štyri bodové zdroje q_1, q_2, q_3, q_4 (pri všeobecnom multipólovom sýtení uvažujeme 2^n bodových zdrojov), pričom súradnice zdroja q_i v ľubovoľnej pravouhlej sústave nech sú x_k^i $(k = 1, 2, 3)$. Vzdialenosť tohto zdroja od počiatku súradnej sústavy označme r_i. Uvažujme potenciál V tejto sústavy v ľubovoľnom bode Q o súradniciach ξ_k $(k = 1, 2, 3)$, ktorého vzdialenosť od zdroja q_i nech je l_i. Vzdialenosť bodu Q od počiatku súradnej sústavy označme R a predpokladajme, že táto vzdialenosť je väčšia ako najväčšia z hodnôt r_i:

$$R > (r_i)\,\text{max}.$$

Potenciál v uvažovanom bode je potom podľa vzorca (3).

$$V = \sum_i \frac{q_i}{l_i}$$

Avšak, ako budeme o tom hovoriť podrobnejšie neskôr v § 2, funkciu $\frac{1}{l_i}$ možno rozviesť v Taylorov rad podľa mocnín ξ_1, ξ_2, ξ_3 (pre objasnenie tohto postupu môže slúžiť tiež obr. 1):

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{R} - \frac{1}{1!}\sum_k x_k^i \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{kl} x_k^i x_l^i \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) -$$
$$- \frac{1}{3!}\sum_{klm} x_k^i x_l^i x_m^i \frac{\partial^3}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m}\left(\frac{1}{R}\right) + \dots \quad (k, l, \dots = 1, 2, 3),$$

preto možno tiež písať:

$$V = \frac{1}{R}\sum_i q_i - \frac{1}{1!}\sum_{ik} q_i x_k^i \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{ikl} q_i x_k^i x_l^i \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{l}\right) -$$
$$- \frac{1}{3!}\sum_{iklm} q_i x_k^i x_l^i x_m^i \frac{\partial^3}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m}\left(\frac{1}{R}\right) + \dots$$

Uvažujme teraz, že by sme mali sústavu, pre ktorú by platilo:

$$\sum_i q_i = 0, \quad \sum_i q_i x_k^i = 0,$$

(t. j. sústavu s nulovou celkovou intenzitou a nulovým dipólovým momentom). Rad pre potenciál sa potom zjednodušuje takto:

$$V = \frac{1}{2!}\sum_{ikl} q_i x_k^i x_l^i \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{3!}\sum_{iklm} q_i x_k^i x_l^i x_m^i \frac{\partial^3}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Približujme teraz napr. úmerným zmenšovaním všetkých $|x_k^i|$ všetky zdroje k počiatku súradnej sústavy, pričom však zvyšujeme súčasne všetky q_i v pomere: $|x_k^i|^2$. Súčet

$$M_{kl} = \sum_i q_i x_k^i x_l^i$$

zostáva nezmenený, a práve tak aj naďalej platí:

$$q_i = \sum_i q_i x_k^i = 0,$$

naproti tomu napr.

$$\lim_{x_k^i \to 0} \sum_i q_i x_k^i x_l^i x_m^i = 0$$

a to isté platí o všetkých podobných výrazoch v treťom, štvrtom a v ďalších členoch výrazu pre potenciál. Prechodom k limite $x_k^i \to 0$ dostávame v počiatku kvadrupólový zdroj. Hodnoty M_{kl}, ktoré sme definovali, nazývame zložkami jeho momentu v uvažovanej súradnej sústave. Potenciál kvadrupólového zdroja v bode Q (ξ_1, ξ_2, ξ_3) teda je:

$$V = V_{(2)} = \frac{1}{2!}\sum_{kl} M_{kl} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right),$$

čím sme vzorec (3b) dokázali.

Zložky kvadrupólového momentu sa často definujú odlišne od definície, ktorú sme tu uviedli, vzorcom:

$$m_{kl} = M_{kl} - \frac{1}{3}\,\delta_{kl} \sum_i M_{ii},$$

kde $\delta_{kl} = 1$, ak $k = l$, $\delta_{kl} = 0$, ak $k = l$. Potom však

$$V = \frac{1}{2!}\sum_{kl}\left(m_{kl} + \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\sum_i M_{ii}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2!}\sum_{kl} m_{kl} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) +$$
$$+ \frac{\sum_i M_{ii}}{3!}\sum_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2}\left(\frac{1}{R}\right)$$

a druhý člen v poslednom výraze sa rovná identicky nule, pretože $\frac{1}{R}$ je harmonická funkcia. Preto aj pri tejto definícii zložiek kvadrupólového momentu pre potenciál platí vzorec:

$$V = \frac{1}{2!}\sum_{kl} m_{kl} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Dokážeme ešte, že pri zachovaní rovnobežnosti osí súradnej sústavy hodnoty M_{kl} pre ľubovoľnú sústavu zdrojov s nulovou celkovou intenzitou a nulovým dipólovým momentom sú nezávislé od voľby počiatku. V skutočnosti ak kladieme:

$$x_k^i = X_k^i + \Delta_k,$$

dostávame najprv

$$\sum_i q_i x_k^i = \sum_i q_i X_k^i = \Delta_k \sum_i q_i = \sum_i q_i X_k^i = 0,$$

ďalej

$$\sum_i q_i x_k^i x_l^i = \sum_i q_i (X_k^i + \Delta_k)(X_l^i + \Delta_l) = \sum_i q_i X_k^i X_l^i + \Delta_k \sum_i q_i X_l^i + \\ + \Delta_l \sum_i q_i X_k^i + \Delta_k \Delta_l \sum_i q_i$$

Teda je:

$$\sum_i q_i X_k^i X_l^i = \sum_i q_i x_k^i x_l^i = M_{kl}.$$

Z fyzikálneho zmyslu potenciálu je zrejmé, že potenciál kvadrupólu (multipólu) je nezávislý od voľby súradnej sústavy. Po matematickej stránke táto okolnosť sa vysvetľuje tým, že zložky kvadrupólového momentu M_{kl}, ako aj derivácie

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right)$$

tvoria tenzor. Výraz na pravej strane vzorca (3b) preto predstavuje skalárny súčin týchto dvoch tenzorov a je teda v zmysle poučiek tenzorovej algebry invariantný voči akejkoľvek lineárnej transformácii súradníc danej vzorcami:

$$x_k^i = \sum_r a_{kr} \bar{x}_r^i, \qquad \xi_k = \sum_r a_{kr} \bar{\xi}_r,$$

kde a_{kr} sú ľubovoľné konštanty.

Inverznú transformáciu možno pritom vyjadriť vzorcami:

$$\bar{x}_r^i = \sum_s A_{rs} x_s^i, \qquad \bar{\xi}_r = \sum_s A_{rs} \xi_s.$$

Z týchto transformačných vzorcov dostávame ľahko vzťah:

$$\bar{x}_r^i = \sum_s A_{rs} (\sum_t a_{st} \bar{x}_t^i) = \sum_{rs} A_{rs} a_{st} \bar{x}_t^i,$$

ktorý platí pre ľubovoľné hodnoty súradníc $\bar{x}_t^i$. To je však možné iba vtedy, ak platí známy vzťah:

$$\sum_{rs} A_{rs} a_{st} = \delta_{rt}.$$

Pri takýchto transformáciách súradníc však zrejme platí:

$$M_{kl} = \sum_i q_i x_k^i x_l^i = \sum_{irs} a_{kr} a_{ls} q_i \bar{x}_r^i \bar{x}_s^i = \sum_{rs} a_{kr} a_{ls} \bar{M}_{rs},$$

čím sme dokázali, že zložky kvadrupólového momentu sa transformujú ako zložky kontravariantného tenzoru.

Ľahko dokážeme tiež ďalší vzorec:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{tu} A_{tk} A_{ul} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_t \partial \bar{\xi}_u}\left(\frac{1}{R}\right),$$

ktorý vyjadruje skutočnosť, že druhé derivácie skaláru $\frac{1}{R}$ podľa priamočiarych

súradníc ξ_k tvoria kovariantný tenzor druhého stupňa. Pre potenciál kvadrupólového zdroja platí vzťah:

$$V = \frac{1}{2!} \sum_{kl} M_{kl} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{klrstu} c_{kr} c_{ls} A_{tk} A_{ul} \bar{M}_{rs} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_t \partial \bar{\xi}_u}\left(\frac{1}{R}\right) =$$
$$= \sum_{rstu} \delta_{rt} \delta_{su} \bar{M}_{rs} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_t \partial \bar{\xi}_u}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{rs} \bar{M}_{rs} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_r \partial \bar{\xi}_s}\left(\frac{1}{R}\right),$$

ktorý vyjadruje jeho invariantnosť voči uvažovanej transformácii súradníc.

Definujeme v ľubovoľnej pravouhlej karteziánskej sústave symetrické tenzory A_i, A_{ik}, A_{ikl} ... takýmto spôsobom:

$$A_i = -\frac{R^2}{1!} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{R}\right),$$
$$A_{ik} = \frac{R^3}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right), \qquad (i, k, l, \ldots = 1, 2, 3) \tag{4}$$
$$A_{ikl} = -\frac{R^4}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right)$$

atď.

Keďže funkcia $\frac{1}{R}$ vyhovuje Laplaceovej rovnici, platí:

$$\sum_i A_{ii} = 0, \quad \sum_i A_{iik} = 0, \quad \sum_i A_{iikl} = 0, \ldots \tag{5}$$

Zložky vektora A_i sú smerové kosínusy spojnice zdroja s uvažovaným bodom priestoru Q. V dôsledku toho, ako aj v dôsledku definícií tenzorov A_i, A_{ik}, A_{ikl}, ... vyjadrených rovnicami (4), platia vzťahy:

$$A_i = P_{(A_i)}, \quad A_{ii} = P_{2(A_i)}, \quad A_{iii} = P_{3(A_i)} \text{ atď.}, \tag{6}$$

kde P_n je Legendreov polynóm n-tého stupňa definovaný známym spôsobom práve ako polynóm:

$$P_{n(A_i)} = (-1)^n \frac{R^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_i^n}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{7}$$

Všetky zložky tenzorov A_{ik}, A_{ikl} atď. dajú sa vyjadriť tiež elementárnym spôsobom ako celé algebraické funkcie zložiek vektora A_i, o čom sa možno presvedčiť priamo derivovaním v rovniciach (4). Takto dostávame:

$$A_{ik} = \frac{3 \cdot 1}{2!} A_i A_k - \frac{1}{2!} \delta_{ik},$$
$$A_{ikl} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{3!} A_i A_k A_l - \frac{3 \cdot 1}{3!} (\delta_{ik} A_l + \delta_{il} A_k + \delta_{kl} A_i) \tag{8}$$

atď.,

kde $\delta_{ik} = 1$, ak $i = k$ a $\delta_{ik} = 0$, ak $i \neq k$.

Doteraz sme uvažovali jediný ľubovoľný bod o súradniciach ξ_1, ξ_2, ξ_3 vo vzdialenosti $R > 0$ od zdroja. Ak uvažujeme ktorýkoľvek iný ľubovoľný bod vo vzdialenosti $r > 0$ od tohto zdroja, ktorého súradnice sú x_1, x_2, x_3, možno definovať analogicky rovniciam (4) ďalšiu skupinu symetrických tenzorov:

$$a_{ik} = \frac{r^3}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r}\right),$$
$$a_{ikl} = -\frac{r^4}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r}\right) \tag{4a}$$
atď.,

pre ktorých zložky platia s príslušnými zmenami rovnice (5) až (8). Dokážeme teraz niektoré základné vzťahy medzi zložkami tenzorov a_{ik} a A_{ik}. Tvorme najprv napr. tento skalárny súčin:

$$\sum_{ik} A_{ik} a_{ik} = \frac{3 \,.\, 1}{2!} \sum_{ik} a_{ik} A_i A_k - \frac{1}{2!} \sum_{ik} a_{ik} \delta_{ik}$$

v. rovn. (8). Druhý súčet na pravej strane tejto rovnice sa nám však v dôsledku definície veličiny δ_{ik} redukuje na Σa_i.

V dôsledku rovníc analogických rovniciam (7) a platných pre tenzor a_{ik} však platí:

$$\sum_i a_{ii} = 0.$$

Preto dostávame:

$$\sum_{ik} A_{ik} a_{ik} = \frac{3 \,.\, 1}{2!} \sum_{ik} a_{ik} A_i A_k = \frac{3 \,.\, 1}{2!} \sum_{ik} A_{ik} a_i a_k. \tag{8}$$

Tým istým spôsobom možno dokázať, že platia vzťahy:

$$\sum_{ikl} A_{ikl} a_{ikl} = \frac{5 \,.\, 3 \,.\, 1}{3!} \sum_{ikl} a_{ikl} A_i A_k A_l = \frac{5 \,.\, 3 \,.\, 1}{3!} \sum_{ikl} A_{ikl} a_i a_k a_l,$$
$$\sum_{iklm} A_{iklm} a_{iklm} = \frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{4!} \sum_{iklm} a_{iklm} A_i A_k A_l A_m = \frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{4!} \sum_{iklm} A_{iklm} a_i a_k a_l a_m, \tag{9}$$

ktoré možno zovšeobecniť pre ľubovoľný počet indexov.

Skalárny súčin dvoch tenzorov je nezávislý od voľby súradnicovej sústavy. Túto si teda môžeme voliť napr. tak, že by bolo:

$$A_p = 1, \quad A_i = \delta_{ip}, \quad A_k = \delta_{kp}, \quad A_l = \delta_{lp},$$

kde p je ľubovoľný pevný index ($p = 1, 2, 3$). Potom

$$\sum_{ik} a_{ik} A_i A_k = a_{pp} = P_2(a_p),$$
$$\sum_{ikl} a_{ikl} A_i A_k A_l = a_{ppp} = P_3(a_p), \tag{10}$$
$$\sum_{iklm} a_{iklm} A_i A_k A_l A_m = a_{pppp} = P_4(a_p),$$

kde a_p teraz znamená kosínus uhla ψ, ktorý zvierajú oba smery (A_1, A_2, A_3) a (a_1, a_2, a_3). Kladúc preto v rovniciach (10)

$$a_p = \cos \psi,$$

dostávame z rovníc (9) nezávisle od voľby súradnicovej sústavy:

$$\sum_{ik} A_{ik} a_{ik} = \frac{3 \,.\, 1}{2!} P_2(\cos \psi)$$
$$\sum_{ikl} A_{ikl} a_{ikl} = \frac{5 \,.\, 3 \,.\, 1}{3!} P_3(\cos \psi)$$
$$\sum_{iklm} A_{iklm} a_{iklm} = \frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{4!} P_4(\cos \psi) \tag{11}$$
atď.

a tieto rovnice možno opäť zovšeobecniť pre ľubovoľný počet indexov.

Podobne vzťahom (9) možno tiež dokázať, že:

$$\sum_{kl} A_{ikl} a_{kl} = \frac{3 \,.\, 1}{2!} \sum_{kl} A_{ikl} a_k a_l,$$
$$\sum_{klm} A_{iklm} a_{klm} = \frac{5 \,.\, 3 \,.\, 1}{3!} \sum_{klm} A_{iklm} a_k a_l a_m \tag{12}$$
atď.

a všeobecne

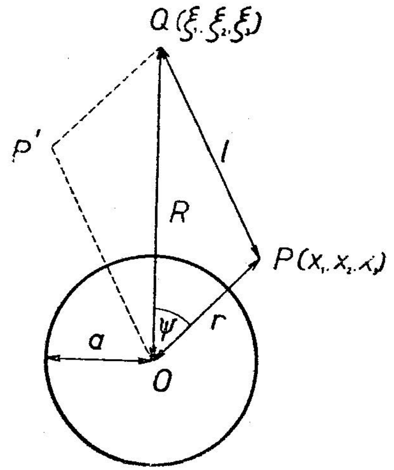
$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} A_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n} \cdot a_{i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_n} =$$
$$= \frac{[2(n-k)-1][2(n-k)-3] \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(n-k)!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} A_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot a_{i_{k+1}} a_{i_{k+2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}. \tag{12a}$$

§ 2. PRÚDOVÉ POLE PRI SÝTENÍ BODOVÝM ZDROJOM

Obrátime sa teraz k otázke, aké bude potenciálové pole v nekonečnom priestore vyplnenom homogénne vodivou izotrópnou hmotou špecifického odporu ϱ_1 a tiež homogénnou a izotrópnou guľovou vložkou špecifického odporu ϱ_2 o polomere a pri sýtení prúdom intenzity I v jedinom bode Q, ktorý leží v oblasti mimo gule (druhý zdroj intenzity $-I$ si myslíme vo veľmi veľkej vzdialenosti). Vzdialenosť bodu Q od stredu gule nech je $R > a$ (v. obr. 1) a jeho súradnice v ľubovoľnej súradnicovej sústave, ktorá má počiatok O v strede uvažovanej gule, nech sú ξ_1, ξ_2, ξ_3. Uvažujeme potenciál poľa v ľubovoľnom bode P o súradniciach x_1, x_2, x_3 vo vzdialenosti r od stredu. Ak i vzdialenosť označíme $QP = l$, potenciál pri sýtení v tom istom bode Q prúdom tej istej intenzity I avšak bez uvažovanej guľovej vložky, by bol podľa rovnice (3), § 1

$$V_0 = \frac{I\varrho_1}{4\pi l} = \frac{q}{l}.$$

Ak je $r < R$, možno rozvinúť funkciu $\frac{1}{l}$ v Taylorov rad podľa x_1, x_2, x_3. Berúc do úvahy (v. obr. 1), že:



Obr. 1

$$l = QP = OP',$$

dostávame rad:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} - \frac{1}{1!}\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{ik} x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{3!}\sum_{ikl} x_i x_k x_l \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_k \partial \xi_l}\left(\frac{1}{R}\right) + \dots$$

a po úprave podľa rovníc (4), § 1

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} + \frac{r}{R^2}\sum_i A_i a_i + \frac{r^2}{R^3}\sum_{ik} A_{ik} a_i a_k + \frac{r^3}{R^4}\sum_{ikl} A_{ikl} a_i a_k a_l + \dots,$$

kde a_i je jednotkový vektor v smere OP, A_i jednotkový vektor v smere OQ a A_{ik}, A_{ikl}, ... sú smerové tenzory, ktoré prislúchajú smeru OQ.

Podrobnejším rozborom sa dá dokázať, že tento rad konverguje rovnomerne v oblasti, ktorá leží vo vnútri ľubovoľnej guľovej plochy so stredom v bode O a o polomere menšom ako R. Preto pri všetkých hodnotách $r < R$ možno vzhľadom na rovnice (9), § 1 písať:

$$V_{(0)} = \frac{q}{R} + \frac{q}{R^2} r \sum_i A_i a_i + \frac{2!}{3 \cdot 1}\frac{q}{R^3} r^2 \sum_{ik} A_{ik} a_{ik} + \frac{3!}{5 \cdot 3 \cdot 1}\frac{q}{R^4} r^3 \sum_{ikl} A_{ikl} a_{ikl}. \tag{1}$$

Keďže potenciál $V_{(0)}$ vyhovuje Laplaceovej rovnici $\Delta V_{(0)} = 0$ a keďže prvšie úvahy platia pre ľubovoľné hodnoty r a R, ktoré vyhovujú podmienke $r < R$ a tiež pre ľubovoľné konštantné A_i, A_{ik} atď., musí nevyhnutne platiť:

$$\Delta(r \cdot a_i) = \Delta x_i = 0, \quad \Delta(r^2 a_{ik}) = 0, \quad \Delta(r^3 a_{ikl}) = 0$$

atď.

Možno podotknúť, že rovnice (2) sú zovšeobecnením známych vzorcov teórie guľových funkcií

$$\Delta(r \cdot P_1(\cos\psi)) = 0, \quad \Delta(r^2 P_2(\cos\psi)) = 0, \quad \Delta(r^3 P_3(\cos\psi)) = 0 \tag{2a}$$

atď.

Rad 1. Predstavuje potenciál vnútri gule o polomere R, ak celý priestor je homogénne vyplnený hmotou špecifického odporu ϱ_1. V dôsledku toho však, že časť priestoru vymedzená guľou polomeru a je vyplnená hmotou inej vodivosti (špec. odpor ϱ_2), pôvodné neporušené pole sa zmení. Potenciál poľa V sa od neporušenej hodnoty líši, a preto kladieme:

1. v oblasti mimo uvažovanej gule $V = V_{(0)} + V'_{(0)}$,
2. vo vnútri gule $V = V''_{(0)}$.

Funkcie $V'_{(0)}$ a $V''_{(0)}$ vyhovujú pritom v svojich oblastiach nevyhnutne Laplaceovej rovnici.

Potenciál $V'_{(0)}$ hľadáme v tvare nekonečného radu

$$V'_{(0)} = C' + \frac{1}{r^2}\sum_i M_i a_i + \frac{1}{r^3}\sum_{ik} M_{ik} a_{ik} + \frac{1}{r^4}\sum_{ikl} M_{ikl} a_{ikl} + \dots, \tag{3a}$$

kde M_i, M_{ik}, M_{ikl} atď. sú tenzory vhodne volených multipólových momentov fiktívnych zdrojov umiestených v strede gule. Je zrejmé, že potenciál $V'_{(0)}$ potom skutočne vyhovuje Laplaceovej rovnici v celom priestore (okrem stredu gule) a ním určené pole nemá žiadne zdroje v oblasti mimo gule.

Potenciál $V''_{(0)}$ predpokladáme tiež v tvare nekonečného radu a kladieme:

$$V''_{(0)} = C'' + r\sum_i m_i a_i + r^2 \sum_{ik} m_{ik} a_{ik} + r^3 \sum_{ikl} m_{ikl} a_{ikl} + \dots \tag{4a}$$

Z rovníc (2) vyplýva, že potenciál $V''_{(0)}$ skutočne vyhovuje Laplaceovej rovnici a je tiež zrejmé, že ním určené pole nemá žiadne zdroje v oblasti vnútra gule ani vo vonkajšom priestore.

Pre zjednodušenie ďalších výpočtov zavedieme namiesto zložiek tenzorov M_i, M_{ik}, m_i, m_{ik} a iné, im úmerné hodnoty N_i, N_{ik}, n_i, n_{ik} a píšeme:

$$V'_{(0)} = C' + \frac{1}{r^2}\sum_i N_i^{(0)} a_i + \frac{2!}{3 \cdot 1}\cdot\frac{1}{r^3}\sum_{ik} N_{ik}^{(0)} a_{ik} + \frac{3!}{5 \cdot 3 \cdot 1}\cdot\frac{1}{r^4}\sum_{ikl} N_{ikl}^{(0)} a_{ikl} + \dots, \tag{3}$$

$$V''_{(0)} = C'' + r\sum_i n_i^{(0)} a_i + \frac{2!}{3 \cdot 1} r^2 \sum_{ik} n_{ik}^{(0)} a_{ik} + \frac{3!}{5 \cdot 3 \cdot 1} r^3 \sum_{ikl} n_{ikl}^{(0)} a_{ikl} + \dots. \tag{4}$$

Na povrchu gule musia sa splniť tieto podmienky:

$$[V_{(0)} + V'_{(0)}]_{r=a} = [V''_{(0)}]_{r=a},$$
$$\varkappa\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_{(0)} + V'_{(0)})\right]_{r=a} = \left[\frac{\partial V''_{(0)}}{\partial r}\right]_{r=a}, \qquad (5)$$

(6)

kde $\varkappa = \varrho_2/\varrho_1$. Tieto podmienky dávajú vzhľadom na (1), (3), (4) tieto sústavy rovníc:

$$\frac{qa}{R^2}A_i + \frac{1}{a^2}N_i^{(0)} = an_i^{(0)} \qquad \frac{qa^2}{R^3}A_{ik} + \frac{1}{a^3}N_{ik}^{(0)} = a^2 n_{ik}^{(0)}$$
$$\varkappa\left[\frac{q}{R^2}A_i - \frac{2}{a^3}N_i^{(0)}\right] = n_i^{(0)} \qquad \varkappa\left[\frac{2qa}{R^3}A_{ik} - \frac{3}{a^4}N_{ik}^{(0)}\right] = 2an_{ik}^{(0)}$$
$$\frac{qa^3}{R^4}A_{ikl} + \frac{1}{a^4}N_{ikl}^{(0)} = a^3 n_{ikl}^{(0)}$$
$$\varkappa\left[\frac{3qa^2}{R^4}A_{ikl} - \frac{4}{a^5}N_{ikl}^{(0)}\right] = 3a^2 n_{ikl}^{(0)}$$

atď.

Riešenia týchto sústav sú takéto:

$$N_i^{(0)} = q\cdot\frac{a^3}{R^2}\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}A_i \qquad n_i^{(0)} = \frac{q}{R^2}\frac{3\varkappa}{2\varkappa+1}A_i$$
$$N_{ik}^{(0)} = 2q\frac{a^5}{R^3}\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}A_{ik} \qquad n_{ik}^{(0)} = \frac{q}{R^3}\frac{5\varkappa}{3\varkappa+2}A_{ik}$$
$$N_{ikl}^{(0)} = 3q\frac{a^7}{R^4}\frac{\varkappa-1}{4\varkappa+3}A_{ikl} \qquad n_{ikl}^{(0)} = \frac{q}{R^4}\frac{7\varkappa}{4\varkappa+3}A_{ikl}$$

atď.

Kladúc ešte $C' = O$, $C'' = \frac{q}{R}$, dostávame z rovníc (3) a (4)

$$V'_{(0)} = q\cdot\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^2r^2}\sum_i A_i a_i + \frac{2!2}{3.1}\frac{q(\varkappa-1)}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^3r^3}\sum_{ik}A_{ik}a_{ik} +$$
$$+\frac{3!3}{5.3.1}\frac{q(\varkappa-1)}{4\varkappa+3}\frac{a}{R^4r^4}\sum_{ikl}A_{ikl}a_{ikl} + \ldots, \qquad (7a)$$

$$V''_{(0)} = \frac{q}{R} + \frac{3q\varkappa}{2\varkappa+1}\frac{r}{R^2}\sum_i A_i a_i + \frac{2!}{3.1}\frac{5q\varkappa}{3\varkappa+2}\frac{r^2}{R^3}\sum_{ik}A_{ik}a_{ik} +$$
$$+\frac{3!}{5.3.1}\cdot\frac{7q\varkappa}{4\varkappa+3}\frac{r^3}{R^4}\sum_{ikl}A_{ikl}a_{ikl} + \ldots \qquad (8a)$$

Opierajúc sa o vzorce (11), § 1 tieto potenciály môžeme vyjadriť pomocou guľových funkcií:

$$V'_{(0)} = \frac{q(\varkappa-1)}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^2r^2}P_1(\cos\psi) + \frac{2q(\varkappa-1)}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^3r^3}P_2(\cos\psi) +$$
$$+\frac{3q(\varkappa-1)}{4\varkappa+3}\frac{a^7}{R^4r^4}P_3(\cos\psi) + \ldots, \qquad (7)$$

$$V''_{(0)} = \frac{q}{R} + \frac{3q\varkappa}{2\varkappa+1}\frac{r}{R^2}P_1(\cos\psi) + \frac{5q\varkappa}{3\varkappa+2}\frac{r^2}{R^3}P_2(\cos\psi) +$$
$$+\frac{7q\varkappa}{4\varkappa+3}\frac{r^3}{R^4}P_3(\cos\psi) + \ldots \qquad (8)$$

Opierajúc sa o známu vlastnosť Legendreových polynómov

$$|P_n(\cos\psi)| \leq 1,$$

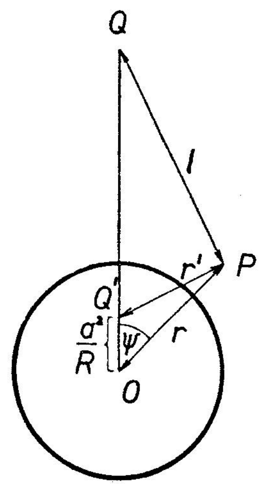
bez ťažkosti možno dokázať, že prvý z týchto radov konverguje nezávisle od $\varkappa$ a ψ absolútne pri všetkých hodnotách r, ktoré vyhovujú nerovnosti

$$r > \frac{a^2}{R},$$

druhý pri všetkých hodnotách $r < R$. To isté platí aj o deriváciách týchto radov podľa r. Tým sme dodatočne dokázali správnosť predpokladov 3a a 4a, ako aj vývodov, ktoré sme z nich urobili.

Potenciál v ľubovoľnom bode P vonkajšej oblasti teda je:

$$V = \frac{q}{l} + V'_{(0)} \qquad (9)$$



Obr. 2

a rad 1. slúži len pre odvodenie radov pre $V'_{(0)}$ a $V''_{(0)}$, kým pre ďalšie praktické účely možno používať podstatne jednoduchší tvar, ktorý sme použili v rovnici (9).

Rad 7 vyjadruje prídatný potenciál $V'_{(0)}$. Tento možno napísať v inom tvare, ktorý je v určitých prípadoch pre praktické účely výhodnejší. Členy tohto radu sú potenciály fiktívneho dipólového, kvadrupólového a vyšších multipólových zdrojov v strede gule. Dipólový zdroj môžeme si teraz nahradiť dvoma rovnakými bodovými zdrojmi opačného znamienka, z ktorých jeden nech je v strede gule, druhý v bode Q' inverzne združenom s bodom Q (v. obr. 2). Teda je:

$$OQ' = \frac{a^2}{R}.$$

Ak si označíme vzdialenosť $Q'P = r'$, potenciál týchto dvoch fiktívnych zdrojov v bode P je:

$$q'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q'a^2}{R \,.\, r^2} P_1(\cos\psi) + \frac{q'a^4}{R^2 r^3} P_2(\cos\psi) + \frac{q'a^6}{R^3 r^4} P_3(\cos\psi) + \dots \quad (10)$$

Zvolíme si teraz q' tak, aby prvý člen tohto radu sa zhodoval s prvým členom radu (7), teda:

$$q' = q \cdot \frac{a}{R} \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}. \quad (11)$$

Potom rad (7) môžeme písať takto:

$$V'_{(0)} = q'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) + \left[\frac{2(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2} - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right] \frac{a^5 q}{R^3 r^3} P_2(\cos\psi) +$$
$$+ \left[\frac{3(\varkappa - 1)}{4\varkappa + 3} - \frac{(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\right] \frac{a^7 q}{R^4 r^4} P_3(\cos\psi) + \dots$$

a po jednoduchej úprave

$$V'_{(0)} = q'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) + q\frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \frac{a^5}{R^3 r^3} P_2(\cos\psi) +$$
$$+ q \cdot \frac{2\varkappa(\varkappa - 1)}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \frac{a^7}{R^4 r^4} P_3(\cos\psi) + \dots \quad (12)$$

V prípade dokonale vodivej gule ($\varrho_2 = 0$) je $\varkappa = 0$, a preto

$$V'_{(0)} = -\frac{qa}{R}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right),$$

takže prídatný potenciál sa dá vyjadriť v uzavretom tvare. V prípade gule dokonale nevodivej ($\varkappa \to \infty$) je zase podľa rovnice (7)

$$V'_{(0)} = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{R^2 r^2} P_1(\cos\psi) + \frac{2}{3} \frac{qa^5}{R^3 r^3} P_2(\cos\psi) + \frac{3}{4} \frac{qa^7}{R^4 r^4} P_3(\cos\psi) + \dots,$$

kým podľa (12)

$$V'_{(0)} = \frac{qa}{2R}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{6} \frac{qa^5}{R^3 r^3} P_2(\cos\psi) + \frac{1}{4} \frac{qa^7}{R^4 r^4} P_3(\cos\psi) + \dots$$

Pre praktické účely môže aj v tomto prípade druhý tvar radu poskytovať určité výhody oproti prvému tvaru.

Výrazy (7a) (8a), prípadne (7) (8) a (9) pre potenciál v oblasti mimo gule a vo vnútri nej predstavujú súčasne riešenie analogického problému elektrostatického poľa bodového náboja v homogénnom dielektriku, ktoré vypĺňuje celý priestor s homogénnou guľovou vložkou o inej dielektrickej konštante, ak sa náboj nachádza v oblasti mimo gule.

§ 3. POLE PRI SÝTENÍ DIPÓLOVÝM ZDROJOM

Ak zdrojom poľa je dipól o momente (M_1, M_2, M_3) umiestený v bode Q (v. obr. 1), potenciál neporušeného poľa v bode P môžeme napísať v tvare:

$$V_{(1)} = -\frac{1}{1!} \sum_i M_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{l}\right). \quad (1)$$

Avšak už v predchádzajúcom paragrafe sme ukázali, že pri všetkých $r < R$ platí:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sum_k A_k x_k + \frac{1}{R^3} \sum_{kl} A_{kl} x_k x_l + \frac{1}{R^4} \sum_{klm} A_{klm} x_k x_l x_m + \dots, \quad (2)$$

pričom $A_k \,.\, A_{kl}$, A_{klm}, ... sú nezávislé od súradníc x_1, x_2, x_3. Každý člen tohto radu je teda homogénny polynóm v premenných x_i a ľahko sa presvedčíme, že

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{kl} A_{kl} x_k x_l = \sum_{kl} A_{kl}(\delta_{ik} x_l + \delta_{il} x_k) = 2 \sum_k A_{ik} x_k$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{klm} A_{klm} x_k x_l x_m = 3 \,.\, \sum_{kl} A_{ikl} x_k x_l \quad (3)$$

atď.

Vzhľadom na to, že $x_k = r \,.\, a_k$, platí za tých istých podmienok ako 2.

$$V_{(1)} = -\frac{1}{R^2} \sum_i A_i M_i - \frac{2r}{R^3} \sum_{ik} A_{ik} M_i a_k - \frac{3r^2}{R^4} \sum_{ikl} A_{ikl} M_i a_k a_l -$$
$$- \frac{4r^3}{R^5} \sum_{iklm} A_{iklm} M_i a_k a_l a_m - \dots$$

Pre ďalšiu úpravu tohto radu použijeme ešte vzorce (12), § 1:

$$V_{(1)} = -\frac{1}{R^2} \sum_i A_i M_i - \frac{2!}{1} \cdot \frac{r}{R^3} \sum_{ik} A_{ik} M_i a_k - \frac{3!}{3 \,.\, 1} \frac{r^2}{R^4} \sum_{ikl} A_{ikl} M_i a_{kl} -$$
$$- \frac{4!}{5 \,.\, 3 \,.\, 1} \frac{r^3}{R^5} \sum_{iklm} A_{iklm} M_i a_{klm} - \dots \quad (4)$$

a tento rad konverguje opäť nezávisle od uhla ψ pri všetkých hodnotách $r < R$.

Prídatný potenciál $V'_{(1)}$ v oblasti mimo gule hľadáme v tvare nekonečného radu

$$V'_{(1)} = C'_{(1)} + \frac{1}{r^2} \sum_k N_k^{(1)} a_k + \frac{2!}{3 \,.\, 1} \cdot \frac{1}{r^3} \sum_{kl} N_{kl}^{(1)} a_{kl} + \frac{3!}{5 \,.\, 3 \,.\, 1} \cdot \frac{1}{r^4} \sum_{klm} N_{klm}^{(1)} a_{klm}, \quad (5)$$

ktorého členy sú potenciály dipólového, kvadrupólového a vyšších multipólových fiktívnych zdrojov umiestených v strede gule, potenciál $V''_{(1)}$ vo vnútri gule v tvare radu

$$V''_1 = C''_1 + r\sum_k n_k^{(1)} a_k + \frac{2!}{3\,.\,1} r^2 \sum_{kl} n_{kl}^{(1)} a_{kl} + \frac{3!}{5\,.\,3\,.\,1} r^3 \sum_{klm} n_{klm}^{(1)} a_{klm} + \dots \tag{6}$$

Z tých istých príčin ako v predchádzajúcom paragrafe je bezprostredne jasné, že $V'_{(1)}$ ako aj $V''_{(1)}$ vyhovujú v oblastiach, v ktorých sú definované, Laplaceovej diferenciálnej rovnici.

Na povrchu gule musia byť splnené podmienky:

$$[V_{(1)} + V'_{(1)}]_{r=a} = [V''_{(1)}]_{r=a}$$
$$\varkappa\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_{(1)} + V'_{(1)})\right]_{r=a} = \left[\frac{\partial V''_{(1)}}{\partial r}\right]_{r=a}. \tag{7}$$

Podobne ako v § 2. vyplývajú vzhľadom na tieto podmienky z rovníc (4) (5) a (6) sústavy vždy dvoch lineárnych rovníc pre neznáme (N_k, n_k), (N_{kl}, n_{kl}), (N_{klm}, n_{klm}) atď., ktorých riešením dostávame:

$$N_k^{(1)} = -2\,.\,1\,.\,\frac{a^3}{R^3}\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\sum_i A_{ik}M_i \qquad n_k^{(1)} = -\frac{3\,.\,2}{R^3}\frac{\varkappa}{2\varkappa+1}\sum_i A_{ik}M_i,$$
$$N_{kl}^{(1)} = -3\,.\,2\,.\,\frac{a^5}{R^4}\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\sum_i A_{ikl}M_i \qquad n_{kl}^{(1)} = -\frac{5\,.\,3}{R^4}\frac{\varkappa}{3\varkappa+2}\sum_i A_{ikl}M_i,$$
$$N_{klm}^{(1)} = -4\,.\,3\,.\,\frac{a^7}{R^5}\frac{\varkappa-1}{4\varkappa+3}\sum_i A_{iklm}M_i \qquad n_{klm}^{(1)} = -\frac{7\,.\,4}{R^5}\frac{\varkappa}{4\varkappa+3}\sum_i A_{iklm}M_i. \tag{8}$$

Ďalej musí byť:

$$C'_{(1)} = \lim_{r\to\infty} V'_{(1)} = O$$

a v dôsledku toho:

$$C''_{(1)} = -\frac{1}{R^2}\sum_i A_i M_i.$$

Po vsadení zložiek multipólových momentov vyjadrených vzorcami (8) rady (5) a (6) pre potenciál $V'_{(1)}$ a $V''_{(1)}$ nadobúdajú tvar:

$$V'_{(1)} = -\frac{2!1}{1}\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^3 r^2}\sum_{ik} A_{ik}M_i a_k - \frac{3!2}{3\,.\,1}\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^4 r^3}\sum_{ikl} A_{ikl}M_i a_{kl} -$$
$$-\frac{4!}{5\,.\,3\,.\,1}\frac{\varkappa-1}{4\varkappa+3}\frac{a^7}{R^5 r^4}\sum_{iklm} A_{iklm}M_i a_{klm} - \dots \tag{9}$$

$$V''_{(1)} = -\frac{1}{R^2}\sum_i A_i M_i - \frac{2!3}{1}\frac{\varkappa}{2\varkappa+1}\frac{r}{R^3}\sum_{ik} A_{ik}M_i a_k -$$
$$-\frac{3!5}{3\,.\,1}\frac{\varkappa}{3\varkappa+2}\frac{r^2}{R^4}\sum_{ikl} A_{ikl}M_i a_{kl} - \frac{4!7}{5\,.\,3\,.\,1}\frac{\varkappa}{4\varkappa+3}\frac{r^3}{R^5}\sum_{iklm} A_{iklm}M_i a_{klm} - \dots \tag{10}$$

Otvorenou zostáva ešte otázka konvergencie radov (4) (9) a (10). Podrobnejšou úvahou, ktorú tu pre krátkosť neuvádzame, možno dokázať vychádzajúc z konvergencie radu (2) pri $r < R$, že aj rad (4) konverguje nezávisle od voľby smeru (a_1, a_2, a_3) pri všetkých hodnotách r vyhovujúcich podmienke $r < R$. Opierajúc sa o tento fakt bez zvláštnych ťažkostí dokážeme, že rad (9) konverguje pri všetkých hodnotách

$$r > \frac{a^2}{R}$$

a rad (10) zase pri všetkých hodnotách

$$r < R.$$

To isté platí o radoch, ktoré dostávame derivovaním radov (9) a (10) podľa r. Preto za predpokladu $R > a$ možno vždy vymedziť takú oblasť, vo vnútri ktorej leží celá uvažovaná guľová plocha a v ktorej všetky tri rady $V_{(1)}$, $V'_{(1)}$ a $V''_{(1)}$, ako aj ich derivácie konvergujú rovnomerne, čím sme dodatočne dokázali správnosť predpokladov, o ktoré sme sa pri úvahách tohto paragrafu opierali.

§ 4. POLE PRI SÝTENÍ KVADRUPÓLOVÝM A OKTAPÓLOVÝM ZDROJOM

V bode Q, obr. 1, majme kvadrupólový zdroj prúdu. Potenciál neporušeného poľa v bode P je podľa vzorca (3b), § 1.

$$V_{(2)} = \frac{1}{2!}\sum_{ik} M_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{l}\right) \tag{1}$$

Odvodili sme však už rad pre $\frac{1}{l}$ (v. § 2 a § 3) v tvare:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\sum_l A_l x_l + \frac{1}{R^3}\sum_{lm} A_{lm}x_l x_m + \frac{1}{R^4}\sum_{lmn} A_{lmn}x_l x_m x_n + \dots \tag{2}$$

a zistili sme jeho konvergenciu pri $r < R$. Presvedčíme sa ľahko, že:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \sum_l A_l x_l = 0 \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \sum_{lm} A_{lm} x_l x_m = 2 \,.\, 1 \,.\, A_{ik} \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \sum_{lmn} A_{lmn} x_l x_m x_n = 3 \,.\, 2 \sum_l A_{ikl} x_l \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \sum_{lmnp} A_{lmnp} x_l x_m x_n x_p = 4 \,.\, 3 \,.\, \sum_{lm} A_{iklm} x_l x_m
\end{aligned} \tag{3}$$

atď.

Vsadiac rad (2) do vzorca (1) a používajúc vzťahy (3) dostávame po jednoduchej, úplne analogickej úprave postupu v § 2 a § 3 pre $V_{(2)}$ tento rad:

$$V_{(2)} = \frac{1}{R^3} \sum_{ikl} A_{ik} M_{ik} + \frac{3\,.\,2\,1\,!}{2\,!} \frac{r}{1} \frac{}{R^4} \sum_{ikl} A_{ikl} M_{ik} a_l + \frac{4\,.\,3}{2\,!} \frac{2\,!}{3\,.\,1} \sum_{iklm} A_{iklm} M_{ik} a_{lm} + \dots \tag{4}$$

Prídatný potenciál $V'_{(2)}$ možno písať ako nekonečný rad

$$V'_{(2)} = C'_{(2)} + \frac{1\,!}{1} \cdot \frac{1}{r^2} \sum_l N_l^{(2)} a_l + \frac{2\,!}{3\,.\,1} \cdot \frac{1}{r^3} \sum_{lm} N_{lm}^{(2)} a_{lm} + \dots \tag{5}$$

a potenciál $V''_{(2)}$ vo vnútri gule ako rad

$$V''_{(2)} = C''_{(2)} + r \,.\, \sum_l n_l^{(2)} a_l + \frac{2\,!}{3\,.\,1} \sum_{lm} n_{lm}^{(2)} a_{lm} + \dots \tag{6}$$

V dôsledku rovníc (2) v § 2 obe tieto potenciálové funkcie vyhovujú Laplaceovej rovnici. Práve tak ako v predchádzajúcich paragrafoch, hraničné podmienky umožňujú vyjadriť zložky tenzorov

$$N_l^{(2)},\ N_{lm}^{(2)},\ \dots, \text{ prípadne } n_l^{(2)},\ n_{lm}^{(2)},\ \dots$$

pomocou zložiek

$$M_{ik},\ A_{ik},\ A_{ikl},\ A_{iklm},\ \dots$$

Vsadením takto zistených hodnôt N do radu (5) potom dostávame:

$$V'_{(2)} = \frac{3\,.\,2\,.\,1}{2\,.\,1} \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \cdot \frac{a^3}{R^4 r^2} \sum_{ikl} A_{ikl} M_{ik} a_l + \frac{4\,.\,3\,.\,2}{3\,.\,1} \frac{a^5}{R^5 r^3} \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \sum_{iklm} A_{ikl} M_{ikl} a_{lm} + \dots \tag{7}$$

Pri sýtení oktapólovým zdrojom je potenciál neporušeného poľa podľa vzorca (3c), § 1.

$$V_{(3)} = -\frac{1}{3\,!} \sum_{ikl} M_{ikl} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{l} \right),$$

ktorý za tých istých podmienok ako predtým ($r < R$) môžeme písať ako konvergentný rad

$$V_{(3)} = -\frac{1}{R^4} \sum_{ikl} A_{ikl} N_{ikl} - \frac{4r}{R^5} \sum_{iklm} A_{iklm} M_{ikl} a_m - \dots \tag{8}$$

Ak sa obmedzíme na prvý člen príslušného radu, čo úplne stačí pre všetky ďalšie účely, môžeme prídatný potenciál vo vonkajšom priestore vyjadriť vzorcom:

$$V'_{(3)} = -\frac{4(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1} \frac{a^3}{R^5 r^2} \sum_{iklm} A_{iklm} M_{ikl} a_m \tag{9}$$

Z tvaru tohto vzorca po vhodnej úprave a porovnaní so vzorcami (3a) a (4), § 1 vyplýva, že je to potenciál dipólu umiesteného v strede gule, ktorého moment má zložky:

$$q_m^{(3)} = -4 \cdot \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \frac{a^3}{R^5} \sum_{ikl} A_{iklm} M_{ikl}. \tag{10}$$

§ 5. PREHĽAD A INTERPRETÁCIA VÝSLEDKOV

Potenciál $V'_{(0)}$ môžeme interpretovať ako potenciál fiktívneho dipólového, kvadrupólového, oktapólového a vyšších multipólových zdrojov umiestených v strede gule. Zložky $q_i^{(0)}$, $q_{ik}^{(0)}$, $q_{ikl}^{(0)}$ atď. momentov týchto zdrojov dostávame z jednotlivých členov radu (7a), § 2. K tomu účelu použijeme vzorce pre potenciál multipólových zdrojov (3a) až (3d), v ktorých však píšeme x_i namiesto ξ_i, r namiesto R, $q_i^{(0)}$, $q_{ik}^{(0)}$, $q_{ikl}^{(0)}$ atď., namiesto M_i, M_{ik}, M_{ikl}... a parciálne derivácie podľa súradníc x_i, x_k vyjadríme pomocou zložiek smerových tenzorov a_i, a_{ik}, a_{ikl} atď. Takto napr. dostávame:

$$\begin{aligned}
&\sum_i q_i^{(0)} a_i = q \cdot \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \frac{a^3}{R^2} \sum_i A_i a_i, \\
&\sum_{ik} q_{ik}^{(0)} a_{ik} = \frac{2\,!\,2}{3\,.\,1} q \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \frac{a^5}{R^3} \sum_{ik} A_{ik} a_{ik}. \\
&\sum_{ikl} q_{ikl}^{(0)} a_{ikl} = \frac{3\,!\,3}{5\,.\,3\,.\,1} q \frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3} \frac{a^7}{R^4} \sum_{ikl} A_{ikl} a_{ikl}
\end{aligned} \tag{1}$$

a preto kladieme:

$$q_i^{(0)} = q\cdot\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^2}A_i \qquad q_{ik}^{(0)} = \frac{4}{3}\,q\,\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^3}A_{ik}$$

$$q_{ikl}^{(0)} = \frac{6}{5}\,q\,\frac{\varkappa-1}{4\varkappa+3}\frac{a^7}{R^4}A_{ikl}\dots \tag{2}$$

Práve tak môžeme interpretovať aj potenciál $V'_{(1)}$ vyjadrený radom (9), § 3 a vznikajúci pri sýtení dipólovým zdrojom ako potenciál radu fiktívnych zdrojov, ktorých momenty vyjadríme tenzormi $q_i^{(1)}$, $q_{ik}^{(1)}$, $q_{ikl}^{(1)}$ atď. Tým istým spôsobom ako v predchádzajúcom prípade dostávame:

$$q_i^{(1)} = -\,2\,\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^3}\sum_k A_{ik}M_k, \qquad q_{ik}^{(1)} = -\,4\,\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^4}\sum_l A_{ikl}M_l,$$

$$q_{ikl}^{(1)} = -\frac{24}{5}\,\frac{\varkappa-1}{4\varkappa+3}\frac{a^7}{R^5}\sum_m A_{iklm}M_m. \tag{3}$$

Prídatné potenciály $V'_{(2)}$ a $V'_{(3)}$ vznikajúce pri sýtení kvadrupólovým, resp. oktapólovým zdrojom možno opäť ponímať ako súčty potenciálov fiktívnych dipólových, kvadrupólových, oktapólových a vyšších multipólových zdrojov $q_i^{(2)}$, $q_{ik}^{(2)}$, $q_{ikl}^{(2)}$, ..., prípadne $q_i^{(3)}$, $q_{ik}^{(3)}$, $q_{ikl}^{(3)}$, ... Ich momenty dostávame porovnaním členov radu (7), resp. výrazu (9), § 4 s výrazmi (1) tohto paragrafu:

$$q_i^{(2)} = 3\cdot\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\cdot\frac{a^3}{R^4}\sum_{kl}A_{ikl}M_{kl},$$

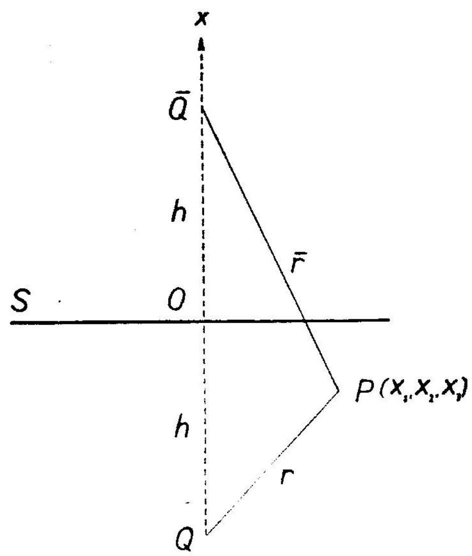
$$q_{ik}^{(2)} = 8\cdot\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{R^5}\sum_{lm}A_{iklm}M_{lm}, \tag{4}$$

$$q_i^{(3)} = -\,4\,\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R^5}\sum_{klm}A_{iklm}M_{klm}. \tag{5}$$

V ďalšom sa budeme často opierať o terminológiu používanú v elementárnej teórii elektrostatického poľa pri známej Thomsonovej metóde zrkadlenia na rovine. V tomto zmysle sa môžeme preto vyjadrovať tak, že zrkadlením bodového zdroja q na guľovej ploche vzniká v jej strede fiktívny dipól $q_i^{(0)}$, kvadrupól $q_{ik}^{(0)}$, oktapól $q_{ikl}^{(0)}$ a ďalšie vyššie multipóly, zrkadlením dipólu M_i dipól $q_i^{(1)}$, kvadrupól $q_{ik}^{(1)}$, oktapól $q_{ikl}^{(1)}$ atď. Z predchádzajúcich úvah vysvitá, že pri sýtení akýmkoľvek multipólovým zdrojom vznikajú zrkadlením na guľovej ploche vždy všetky multipóly počínajúc dipólom, nevzniká však nikdy fiktívny pól. (Pritom stále predpokladáme, že sýtime v oblasti $R > a$, neprihliadajúc na triválny prípad $\varkappa = 1$.)

§ 6. ZRKADLENIE MULTIPÓLOVÝCH TENZOROV NA ROVINE A PRÚDOVÉ POLE V HOMOGÉNNOM POLOPRIESTORE PRI SÝTENÍ MULTIPÓLOVÝM ZDROJOM

Majme rovinu S a bod Q, ktorý neleží v nej (v. obr. 3). Vzdialenosť tohto bodu od danej roviny nech je h a zrkadlením uvažovaného bodu na rovine dostávame bod $\bar{Q}$. Zvolíme si pravouhlú sústavu súradníc (x_1, x_2, x_3) s počiatkom v bode O a s osou x_2, ktorej kladný smer nech sa zhoduje so smerom OQ. Nech je P ľubovoľný bod priestoru, ktorého súradnice v danej sústave sú (x_1, x_2, x_3). Vzdialenosť tohto bodu od bodu Q označíme r, jeho vzdialenosť od $\bar{Q}$ označme $\bar{r}$.



Obr. 3

Definujeme všeobecné smerové tenzory prislúchajúce smerom QP a $\bar{O}P$ v zmysle vzorcov (4), § 1 v danej súradnicovej sústave takto:

$$a_{i_1,i_2,\dots i_n} = (-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\bar{a}_{i_1,i_2,\dots i_n} = (-1)^n\frac{\bar{r}^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right). \tag{1}$$

Ak zavedieme označovanie

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+(h+x_2)^2+x_3^2}} = f(x_1, x_2, x_3),$$

zrejme platí:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+(h-x_2)^2+x_3^2}} = f(x_1, -x_2, x_3),$$

a preto z definícií 1. vyplýva:

$$\bar{a}_{i_1,i_2\dots i_n} = (-1)^{\delta_{i_1,2}+\delta_{i_2,2}+\dots+\delta_{i_n,2}}\frac{\bar{r}^{n+1}}{r^{n+1}}\cdot a_{i_1,i_2,\dots i_n}.$$

Ak bod P leží v rovine S, teda v uvažovanej pravouhlej súradnicovej sústave, je:

$$\bar{a}_{i_1,i_2,\dots i_n} = (-1)^{\delta_{i_1,2}+\delta_{i_2,2}+\dots+\delta_{i_n,2}}\,.\,a_{i_1,i_2,\dots i_n}. \tag{2}$$

Vzorec (2) môžeme vysloviť takto: Ak bod P leží v rovine S, zložky tenzoru $\bar{a}$ sa čo do absolútnej hodnoty rovnajú príslušným zložkám tenzoru a a majú to isté alebo opačné znamienko podľa toho, či index 2 vystupuje v rade indexov $i_1, i_2 \dots, i_n$ párny alebo nepárny počet krát.

Uvažujme teraz homogénny polopriestor ohraničený rovinou S a vyplnený hmotou špecifického odporu ϱ. Nech táto hmota vypĺňuje časť priestoru $x_2 < O$. V bode Q majme multipólový zdroj prúdu o momente $M_{i_1, i_2, \dots i_n}$. Potenciál prúdového poľa v uvažovanom polopriestore hľadáme v tvare:

$$V = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \left[M_{i_1 \dots i_n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{r}\right) + \bar{M}_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right) \right]. \tag{3}$$

Tento tvar vyhovuje podmienke, že vo veľmi malých vzdialenostiach od bodu Q pole musí byť také, ako keby celý priestor bol vyplnený hmotou špecifického odporu ϱ. Zložky tenzoru fiktívneho multipólového momentu $\bar{M}_{i_1, i_2 \dots i_n}$ určíme z podmienky:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_{x_2 = 0} = O,$$

teda:

$$\sum_{i_1, \dots i_n} \left[M_{i_1, \dots i_n} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_{\_} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{r}\right) + \bar{M}_{i_1, \dots i_n} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_2 \partial x_{i_1} \partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right) \right] = 0,$$

pri $x_2 = O$. V dôsledku vzorcov (1) a (2) možno túto podmienku písať v tomto tvare:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots i_n} [M_{i_1, i_2, \dots i_n} + (-1)^{1 + \delta_{i_1,2} + \delta_{i_2,2} + \dots + \delta_{i_n,2}} \cdot \bar{M}_{i_1, i_2, \dots i_n}] a_{2, i_1, i_2, \dots i_n} = O,$$

z čoho:

$$\bar{M}_{i_1, i_2, \dots i_n} = (-1)^{\delta_{i_1,2} + \delta_{i_2,2} + \dots + \delta_{i_n,2}} \cdot M_{i_1, i_2, \dots i_n} \tag{4}$$

V ďalšom budeme tiež hovoriť, že tenzor $\bar{M}$ je zrkadlením (alebo vzniká zrkadlením) tenzoru M na rovine S. Vzorec (4) môžeme vysloviť takto: zložky zrkadleného tenzoru multipólového momentu majú v uvažovanej súradnicovej sústave tú istú absolútnu hodnotu ako zložky pôvodného tenzoru. Ak sa index 2 vyskytuje v rade indexov $i_1, i_2, \dots i_n$ k krát, zložky zrkadleného tenzoru majú to isté alebo opačné znamienko ako zložky pôvodného tenzoru, podľa toho, či je k párne alebo nepárne.

Keďže potenciál V, ktorý sme definovali rovnicou (3) vyhovuje okrem uvedených podmienok tiež Laplaceovej rovnici, rovnice (3) a (4) predstavujú riešenie otázky prúdového poľa v homogénnom polopriestore.

Rovnicu (3) môžeme vzhľadom na vzorce (1) písať tiež takto:

$$V = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i_1, i_2, \dots i_n} M_{i_1, i_2 \dots i_n} \cdot a_{i_1, i_2, \dots i_n} + \frac{1}{\bar{r}^{n+1}} \sum_{i_1, i_2 \dots i_n} \bar{M}_{i_1, i_2 \dots i_n} \cdot \bar{a}_{i_1, i_2 \dots i_n} \tag{5}$$

Prvý člen na pravej strane tejto rovnice predstavuje potenciál multipólového zdroja v homogénnom priestore, druhý člen potenciál fiktívneho zrkadleného multipólového zdroja, ktorý si myslíme v bode $\bar{Q}$. Rovnica (5) vyjadruje potenciál v polopriestore $x_2 \leqq O$, teda aj v rovine S. V bodoch tejto samej roviny je $\bar{r} = r$. Okrem toho v dôsledku rovníc (2) a (4) tu tiež platí:

$$M_{i_1, i_2, \dots i_n} \cdot a_{i_1, i_2, \dots i_n} = \bar{M}_{i_1, i_2, \dots i_n} \cdot \bar{a}_{i_1, i_2, \dots i_n},$$

preto potenciál v rovine S môžeme vyjadriť vzorcom:

$$V_S = \frac{2}{r^{n+1}} \sum_{i_1, i_2, \dots i_n} M_{i_1, i_2, \dots i_n} \cdot a_{i_1, i_2, \dots i_n}. \tag{6}$$

Potenciál v ľubovoľnom bode roviny ohraničujúcej nekonečný homogénny polopriestor je teda dvakrát taký ako by bol potenciál v tomto bode pri sýtení tým istým multipólovým zdrojom, ak by celý priestor bol vyplnený hmotou tej istej vodivosti.

§ 7. VÝPOČET PRIBLIŽNÝCH TEORETICKÝCH HODNÔT ZDANLIVÉHO ŠPECIFICKÉHO ODPORU PRI ODPOROVÝCH MERANIACH NAD STREDOM GULE

Na obr. 4. vodorovná priamka S znázorňuje zemský povrch, ktorý si myslíme dokonale rovinný. Prostredie pod povrchom pozostáva z dvoch oblastí, a to z homogénnej gule špecifického odporu ϱ_2 a zo zbývajúcej časti polopriestoru vyplnenej homogénne hmotou špecifického odporu ϱ_1. Stred gule je v bode O, v hĺbke h pod povrchom, jej polomer označujeme a. Kolmica spustená z bodu O na rovinu zemského povrchu ho pretína v bode C. V bodoch A a B majme sýtne elektródy, pričom nech je $AC = BC$ a obe elektródy ležia na priamke S, ktorá prechádza bodom C. Skúmajme rozdiel potenciálu v bodoch M a N, v ktorých si môžeme myslieť merné elektródy a ktoré ležia tiež na priamke S, súmerne podľa bodu C. Pri známej Wennerovej schéme je okrem toho

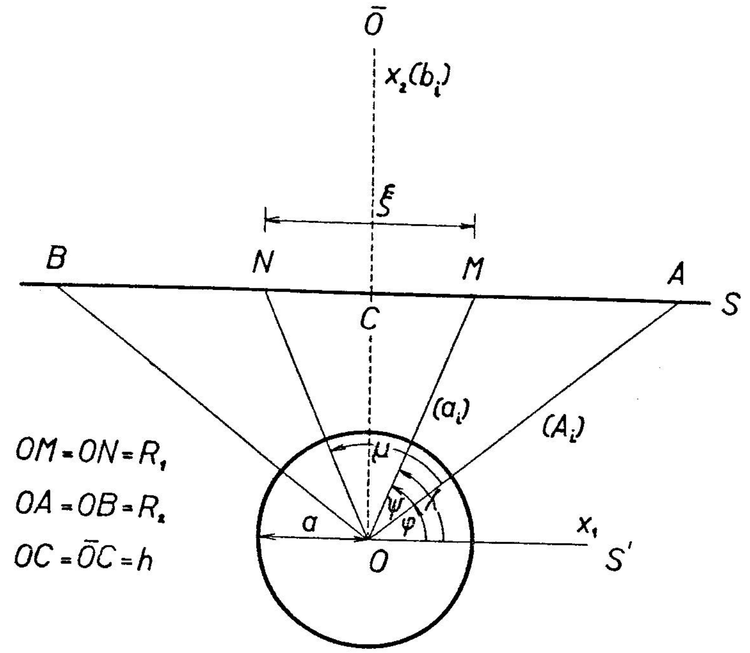
$$AM = MN = NB = \xi.$$

Ak sa najprv obmedzíme na prípad sýtenia jedinou elektródou A (k tomu účelu si myslíme druhú sýtnu elektródu B umiestenú prechodne vo veľmi veľkej vzdialenosti, kým M a N ostávajú naďalej v miestach vyznačených na obr. 4.), dostávame hodnotu potenciálu v ľubovoľnom bode pod zemským povrchom (odhliadnúc od bodov vnútri gule), ak k jeho „neporušenej" hodnote (v. § 2.) pridáme potenciály prislúchajúce fiktívnym zdrojom. Pri prvom priblížení budeme uvažovať len fiktívne zdroje, ktoré vznikajú zrkadlením zdroja A na uvažovanej guli v jej strede (v. § 2. a § 5.) a ich zrkadlenia na rovine S.

Pre vzdialenosti a uhly vyznačené na obr. 4. si zavedieme toto označenie:

$$\overline{OM} = \overline{ON} = R_1,\ \overline{OA} = \overline{OB} = R_2,\ \overline{AM} = \overline{NM} = \overline{NB} = \xi,$$
$$\sphericalangle AOM = \psi,\ \sphericalangle AON = \mu,\ \sphericalangle S'OA = \varphi,\ \sphericalangle S'OM = \varphi + \psi = \lambda.$$

Ak uvažujeme len jedinú sýtnu elektródu v bode A, potenciál v bode M v dôsledku rovníc (7), § 2 a (6), § 6 je:



Obr. 4

$$V_{AM} = \frac{q}{\xi} + \frac{2q(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_1^2 R_2^2} P_1(\cos\psi) + \frac{4q(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2}\frac{a^5}{R_1^3 R_2^3} P_2(\cos\psi) + $$
$$+ \frac{6q(\varkappa - 1)}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_1^4 R_2^4} P_3(\cos\psi) + \dots$$

a v bode N

$$V_{AN} = \frac{q}{2\xi} + \frac{2q(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_1^2 R_2^2} P_1(\cos\mu) + \frac{4q(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2}\frac{a^5}{R_1^3 R_2^3} P_2(\cos\mu) + $$
$$+ \frac{6q(\varkappa - 1)}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_1^4 R_2^4} P_3(\cos\mu) + \dots,$$

teda:

$$V_{AM} - V_{AN} = \frac{q}{2\xi} + \frac{2q(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_1^2 R_2^2}[P_1(\cos\psi) - P_1(\cos\mu)] + $$
$$+ \frac{4q(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2}\frac{a^5}{R_1^3 R_2^3}[P_2(\cos\psi) - P_2(\cos\mu)] + \dots$$

Ak teraz prihliadame na to, že okrem bodu A sýtime tiež v bode B, v ktorom máme zdroj prúdu o tej istej intenzite avšak opačného znamienka, celkový potenciálový rozdiel na elektródach M a N je:

$$V_M - V_N = 2(V_{AM} - V_{AN}),$$

teda:

$$V_M - V_N = \frac{q}{\xi} + \frac{4q(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_1^2 R_2^2}[P_1(\cos\psi) - P_1(\cos\mu)] + $$
$$+ \frac{8q(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2}\frac{a^5}{R_1^3 R_2^3}[P_2(\cos\psi) - P_2(\cos\mu)] + \dots$$

Keby nebolo guľovej vložky, t. j. keby celý polopriestor bol homogénne vyplnený hmotou špecifického odporu ϱ_1, bol by za ináč tých istých podmienok potenciálový rozdiel na elektródach M a N

$$\Delta V_{MN} = \frac{q}{\xi}.$$

Relatívnu hodnotu anomálie zdanlivého špecifického odporu spôsobenej guľovou vložkou možno preto vyjadriť takto:

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_1} = \frac{V_M - V_N}{\Delta V_{MN}} - 1 = \frac{4\xi(\varkappa - 1)}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_1^2 R_2^2}[P_1(\cos\psi) - P_1(\cos\mu)] + $$
$$+ \frac{8\xi(\varkappa - 1)}{3\varkappa + 2}\frac{a^5}{R_1^3 R_2^3}[P_2(\cos\psi) - P_2(\cos\mu)] + $$
$$+ \frac{12\xi(\varkappa - 1)}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_1^4 R_2^4}[P_3(\cos\psi) - P_3(\cos\mu)] + \dots.$$

V tejto rovnici, ako je na prvý pohľad zrejmé, uplatňuje sa známy princíp „podobnosti" v tom, že sa hodnota anomálie zdanlivého špecifického odporu nezmení, ak prejdeme z daného usporiadania na usporiadanie geometricky podobné nemeniac hodnotu $\varkappa$. V dôsledku toho môžeme hĺbku stredu gule h voliť za dĺžkovú jednotku a v ďalšom polomer gule a, ako aj dĺžky ξ, R_1 a R_2 budeme vždy vyjadrovať v týchto jednotkách.

V rovnici (1) okrem polomeru a a fyzikálnej konštanty $\varkappa$ vystupujú veličiny závislé výlučne od geometrického usporiadania elektród (ξ, R_1, R_2, ψ, μ), ktoré môžeme nazvať geometrickými parametrami sondáže. Za základný z týchto parametrov môžeme považovať ξ (vzdialenosť potenciálových elektród). Všetky ostatné parametry sa dajú z tohto základného parametra odvodiť jednoduchou geometrickou úvahou.

Pre prehľadnosť zavedieme ešte ďalšie geometrické parametre:

$$F_1 = \frac{4\xi[P_1(\cos\psi) - P_1(\cos\mu)]}{R_1^2 R_2^2},$$
$$F_2 = \frac{8\xi[P_2(\cos\psi) - P_2(\cos\mu)]}{R_1^3 R_2^3},$$
$$F_3 = \frac{12\xi[P_3(\cos\psi) - P_3(\cos\mu)]}{R_1^4 R_2^4}, \tag{2}$$
$$F_4 = \frac{16\xi[P_4(\cos\psi) - P_4(\cos\mu)]}{R_1^5 R_2^5}$$

atď.

Vzorec (1) možno potom písať takto:

$$\Delta_0 = a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} F_1 + a^5 \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} F_2 + a^7 \frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3} F_3 + a^9 \frac{\varkappa - 1}{5\varkappa + 4} F_4 + \ldots \tag{3}$$

V ďalšej časti tejto práce chcem venovať zvláštnu pozornosť obom krajným prípadom, t. j. prípadu gule dokonale vodivej ($\varkappa = O$) a dokonale nevodivej ($\varkappa \to \infty$). V týchto prípadoch máme:

$$\Delta_0 = -\left[a^3 F_1 + \frac{1}{2} a^5 F_2 + \frac{1}{3} a^7 F_3 + \frac{1}{4} a^9 F_4 + \ldots\right], \quad (\varkappa = O) \tag{3a}$$

prípadne

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} a^3 F_1 + \frac{1}{3} a^5 F_2 + \frac{1}{4} a^7 F_3 + \frac{1}{5} a^9 F_4 + \ldots \quad (\varkappa \to \infty) \tag{3b}$$

Pri porovnaní vzorcov (3a) a (3b) vidíme, že relatívna hodnota anomálie zdanlivého špecifického odporu je (ak odhliadneme od znamienka) pri tom istom usporiadaní elektród a pri rovnakom polomere vždy väčšia v prípade gule dokonale vodivej ako v prípade gule dokonale nevodivej.

Ak meníme vzdialenosť potenciálových elektród ξ, mení sa prirodzene aj zdanlivý špecifický odpor. Pomer $\Delta\varrho/\varrho_1$ má pri malých hodnotách ξ približne nulovú hodnotu, pri vzrastajúcom ξ jeho hodnota najprv stúpa, dosahuje pri určitej hodnote $\xi = \xi_{max}$ maximum a potom opäť klesá a blíži sa asymptoticky nule. Ako z ďalších výsledkov uvidíme, je pri $a < 0{,}6$ v oboch krajných prípadoch ξ_{max} približne konštantné, a síce:

$$\xi_{max} \sim 1$$

nezávisle od polomeru a. Preto pri malých polomeroch maximálna hodnota anomálie zdanlivého špecifického odporu je približne úmerná tretej mocnine polomeru. Vyplýva to zo vzorca (3), kde pri takomto obmedzení možno zanedbať členy s vyššími mocninami polomeru a považovať F_1 za konštantné. Vzhľadom na princíp podobnosti možno tento poznatok vyjadriť tiež takto: Pri hĺbkach presahujúcich asi dvojnásobok polomeru gule klesá maximum odporovej anomálie približne s treťou mocninou hĺbky.

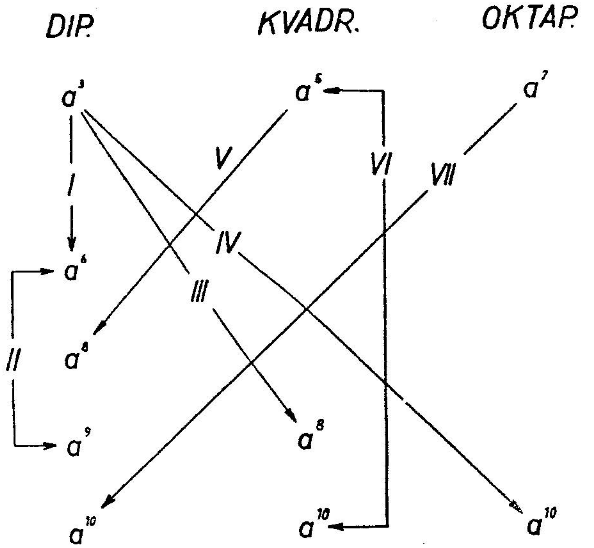
§ 8. SPRESNENIE TEÓRIE

V predchádzajúcom paragrafe sme odvodili približné vzorce pre zdanlivý špecifický odpor za predpokladu, že stred merania C (v. obr. 4.) je presne nad stredom gule, a že elektródy sú usporiadané podľa Wennerovej schémy. Dvojicu zdrojov A a B sme zrkadlili najprv na guli a vznikajúce fiktívne multipólové zdroje v bode O sme zrkadlili opäť na rovine S, čím vznikli ďalšie fiktívne multipólové zdroje v bode $\bar{O}$. Týmto zrkadlením na rovine S sme však porušili hraničné podmienky vyjadrené vzorcami (5) a (6), § 2. Aby sme týmto podmienkam vyhoveli, musíme všetky fiktívne zdroje vzniknuté v bode $\bar{O}$ opäť zrkadliť na guli do bodu O, čím zase porušujeme hraničné podmienky na rovine S. Preto všetky novovznikajúce fiktívne zdroje v bode O musíme zase zrkadliť na rovine S atď. Ak by sme chceli daný problém riešiť striktne, museli by sme teda zrkadliť na guli aj na rovine nekonečne mnohokrát a vyšetriť otázku konvergencie tohto postupu. Je to postup v určitom ohľade podobný ako obvyklý postup, ktorý používame pri riešení tzv. problému dvoch vrstiev. Podstatný rozdiel medzi oboma prípadmi je však v tom, že kým pri zrkadlení daného zdroja na ľubovoľnej rovine dostávame len jediný zrkadlový obraz, pri zrkadlení každého zdroja na guli dostávame nekonečný rad zdrojov, v ktorom sú zastúpené, dipólom počínajúc, všetky multipóly. Postup sa tým vo veľkej miere komplikuje a po niekoľkých zrkadleniach sa stáva úplne neprehľadným.

Pravda, pre praktické účely nie je treba v tomto postupe pokračovať veľmi ďaleko. Pri prvom zrkadlení sa totiž na guli vyskytuje v momente vznikajúceho fiktívneho dipólu činiteľ a^3, v momente kvadrupólu a^5, v momente oktapólu a^7 atď., ako sme videli vo vzorci (7a), § 2. K týmto činiteľom pri každom ďalšom zrkadlení pristupuje opäť činiteľ a^3, a^5, a^7... atď., ako sme videli v § 3 a § 4, a to podľa toho, či novovznikajúci zdroj je dipól, kvadrupól, oktapól atď. Preto pri neveľkých hodnotách polomeru ($a < 0{,}5$) konverguje naznačený postup veľmi rýchle a v skutočnosti už vzorec (3), § 7 vyhovuje dokonale všetkým praktickým potrebám. Podrobnejší rozbor výsledkov okrem toho ukazuje, že aj pri pomerne vysokých hodnotách polomeru (približne po $a = 0{,}9$) pre praktické potreby stačí uvažovať len tie členy výrazu pre potenciál, v ktorých ako činiteľ vystupuje nanajvýš a^{10} a nižšie mocniny polomeru. Výnimku tu do určitej miery tvoria len členy radu (3), § 7, kde už pri $a = 0{,}7$ treba brať do úvahy aj člen s a^{11} a pri väčších polomeroch prípadne aj ďalšie.

Ujasníme si teda jednotlivé čiastkové kroky postupu zrkadlenia, ktoré vedú k multipólom, ktorých momenty obsahujú ako činiteľa desiatu alebo nižšiu mocninu polomeru. Tomuto účelu slúži schéma znázornená na obr. 5. Zrkadlením dvojice zdrojov A a B na guli a v zápätí na rovine S vzniká v bode $\bar{O}$ dipól, kvadrupól, oktapól a šesťnásťpól (ďalšie vyššie multipóly obsahujú ako činiteľa vyššie mocniny polomeru, a preto ich zanedbávame). Prvý obsahuje činiteľ a^3, druhý a^5, tretí a^7 a štvrtý a^9. Zrkadlením posledného zrejme nemôžu vznikať multipóly s nižšou mocninou polomeru ako dvanástou, a preto tieto zanedbávame.

Prvým krokom znázorneným na obr. 5. šípkou I, je zrkadlenie dipólu v bode $\bar{O}$ na guli v dipól umiestený v jej strede O a jeho súčasné zrkadlenie na rovine S späť do bodu O. Preto najprv vypočítame časť potenciálového rozdielu, ktorý vzniká na elektródach M a N, ktorá je podmienená touto dvojicou dipólov súmerných podľa roviny S.



Obr. 5

Dvojica bodových zdrojov A a B (v. obr. 4) najprv spôsobuje, že v bode O vznikajú dva dipóly. Ak si zvolíme súradnú sústavu (x_1, x_2, x_3), ako sme naznačili v obr. 4., t. j. s počiatkom v bode O, osou x_1 orientovanou vodorovne vpravo, osou x_2 zvisle hore (cez $\bar{O}$) a osou x_3 kolmo na nákresnú rovinu smerom vpred, a ak ďalej smeru OA zodpovedajú smerové tenzory A_i, A_{ik}, A_{ikl}, ..., smeru OM tenzory a_i, a_{ik}, a_{ikl}, ..., smeru osi x_2 b_i, b_{ik}, b_{ikl}, ..., v zmysle výsledkov § 5, zložky momentov uvažovaných dvoch dipólov sú:

$$M'_1 = q\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_2^2}A_1 = CA_1,\ M'_2 = CA_2,\ M'_3 = CA_3 = O,$$

$$M''_1 = q\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{R_2^2}A_1 = CA_1,\ M''_2 = -CA_2,\ M''_3 = O.$$

Prvý z týchto dipólov zodpovedá sýteniu zdrojom q v bode A, druhý sýteniu zdrojom $-q$ v bode B. Výsledný dipól má zložky:

$$M_1 = M'_1 + M''_1 = 2CA_1,\ M_2 = M_3 = O.$$

Žrkadlením tohto dipólu na rovine S dostávame v bode $\bar{O}$ dipól o zložkách:

$$\overline{M}_1 = M_1 = 2CA_1,\ \overline{M}_2 = \overline{M}_3 = O.$$

Zrkadlíme teraz dipól $\overline{M}_i$ opäť na guli, čím pristupjeme k vlastnému kroku I, znázornenému v schéme obr. 5, predbežne uvažujúc iba dipólovú časť tohto zrkadlenia. Podľa vzorca (9), § 3, v ktorom kladieme teraz $R = 2\ (= O\bar{O})$, $\overline{M}_i = M_i$, $A_{ik} = b_{ik}$, pre potenciál tejto časti v bode M dostávame:

$$V_M = -\frac{\varkappa - 1}{(2\varkappa + 1)}\frac{a^3}{4R_1^2}\sum_{ik} b_{ik}\overline{M}_i a_k = -\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\frac{a^3}{4R_1^2}\overline{M}_1\sum_k b_{1k}a_k,$$

avšak

$$b_{11} = -\frac{1}{2},\ b_{12} = b_{13} = O,$$

a preto

$$V_M = \frac{\varkappa - 1}{2(2\varkappa + 1)}\frac{a^3}{4R_1^2}\overline{M}_1 a_1 = q\left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot \frac{a^6}{4R_1^2R_2^2}A_1 a_1. \tag{1}$$

Prvý smerový kosínus smeru ON je $-a_1$, a preto príslušný potenciál v bode N je:

$$V_N = -V_M,$$

v dôsledku čoho uvažovaný potenciálový rozdiel na oboch merných elektródach je:

$$V_M - V_N = 2V_M = q\left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot \frac{a^6}{2R_1^2R_2^2}A_1 a_1. \tag{2}$$

Potenciál V_M vyjadrený vzorcom (1) zodpovedá dipólu myslenému v bode O. Aby sme vyhoveli hraničným podmienkam na rovine S, musíme však tento dipól ešte raz zrkadliť na rovine S do bodu $\bar{O}$. V zmysle výsledkov § 6 tomuto postupu zodpovedá zdvojnásobenie potenciálového rozdielu na elektródach M a N, a preto dostávame konečne upravený vzorec:

$$V_M - V_N = q\left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot \frac{a^6}{R_1^2R_2^2}\cos\varphi \cdot \cos\lambda, \tag{3}$$

pričom podľa obr. 4.

$$\cos\varphi = A_1,\ \cos\lambda = a_1.$$

Potenciálový rozdiel (3) k hodnote relatívnej anomálie zdanlivého špecifického odporu prispieva čiastkou:

$$\Delta_1 = \frac{\xi(V_M - V_N)}{q} = a^6\left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot \frac{\xi\cos\varphi\cos\lambda}{R_1^2R_2^2}.$$

Kladúc

$$G_1 = \frac{\xi \cdot \cos\varphi\cos\lambda}{R_1^2R_2^2} = \xi \cdot \cos\varphi\sin^2\varphi\cos\lambda\sin^2\lambda \tag{4a}$$

teda máme:

$$\Delta_1 = a^6\left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot G_1, \tag{4}$$

kde G_1 je geometrická veličina, ktorá závisí jedine od usporiadania elektród, t. j. od vzdialenosti ξ.

Výraz na pravej strane rovnice (1) predstavuje potenciál dipólu v bode M. Tento dipól je v strede gule a zložky jeho momentu v súradnicovej sústave znázornenej na obr. 4. sú:

$$m_1 = q\frac{a^6}{4R_2^2}\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^2 \cdot A_1, \; m_2 = m_3 = O. \tag{5}$$

Jeho zrkadlový obraz na rovine S, vznikajúci v bode O, má ten istý dipólový moment

$$\overline{m}_1 = m_1, \; \overline{m}_2 = \overline{m}_3 = O. \tag{5a}$$

Oba dipóly m_i a $\overline{m}_i$ spolu na elektródach M a N dávajú potenciálový rozdiel vyjadrený rovnicou (3).

Druhý krok znázornený v schéme obr. 5. šípkou II však predpokladá ďalšie zrkadlenie dipólu $\overline{m}_i$ na guli a v zápätí opäť na rovine S. Pritom však pri zrkadlení sa na guli stačí obmedziť na vznikajúci dipól n_k, pretože pri tomto zrkadlení vznikajúce vyššie multipólové momenty obsahujú ako činitele a^{11}, a^{13} atď., a preto ich zanedbávame.

Podľa výsledkov zistených v § 3 (vzorec (9)) zložky dipólu n_k sú dané vzorcom:

$$n_k = -\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{4}\sum_i b_{ik}\overline{m}_i.$$

Fiktívny zdroj $\overline{m}_i$ je totiž v bode $\overline{O}$, ktorého vzdialenosť od bodu O je 2 a bod sýtenia $\overline{O}$ je v smere, ktorému zodpovedá tenzor b_{ik}. V prvom člene radu (9), § 3 kladieme preto $R = 2$ a namiesto A_{ik} píšeme b_{ik}. V dôsledku rovníc (5) a (5a) je ďalej:

$$n_k = -\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{4}\cdot b_{1k}\overline{m}_1,$$

teda:

$$n_k = -q\cdot\frac{a^9}{16R_2^2}\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^3 A_1 b_{1k}.$$

Použijeme opäť vzorce pre zložky tenzoru b_{ik}, o ktoré sme sa opierali už predtým

$$b_{11} = -\frac{1}{2}, \; b_{12} = b_{13} = 0$$

a dostávame:

$$n_1 = q\cdot\frac{a^9}{32R_2^2}\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^3 A_1, \; n_2 = n_3 = 0 \tag{6}$$

Dipól n_i musíme ešte raz zrkadliť na rovine S, pričom zložky zrkadleného dipólu $\overline{n}_i$ v bode $\overline{O}$ sa rovnajú zložkám n_i

$$\overline{n}_1 = n_1, \; \overline{n}_2 = \overline{n}_3 = 0.$$

Potenciál dvojice dipólov n_i a $\overline{n}_i$ v bode M je podľa príslušných vzorcov:

$$V_M = q\cdot\frac{a^9}{16R_1^2R_2^2}\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^3 A_1 a_1.$$

keďže smerové kosínusy smeru $\overrightarrow{ON}$ sú $(-a_1, a_2, O)$, pre potenciál v bode N platí:

$$V_N = -V_M.$$

Pre potenciálový rozdiel na elektródach M a N preto dostávame, kladúc $A_1 = \cos\varphi$, $a_1 = \cos\lambda$,

$$V_M - V_N = q\cdot\frac{a^9}{8R_1^2R_2^2}\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^3 \cos\varphi\cos\lambda.$$

Tento potenciálový rozdiel prispieva k celkovej anomálii zdanlivého špecifického odporu čiastkou:

$$\Delta_2 = \frac{\xi(V_M - V_N)}{q} = a^9\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\right)^3\cdot G_2. \tag{7}$$

kde G_2 je opäť veličina závislá jedine od geometrického usporiadania elektród, t. j. od vzdialenosti $\xi = \overline{MN}$:

$$G_2 = \frac{\xi\cos\varphi\cos\lambda}{8R_1^2R_2^2} = \frac{1}{8}\,\xi\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\lambda\sin^2\lambda = \frac{1}{8}\,G_1. \tag{8}$$

Teraz prikročíme k ďalšiemu kroku, ktorý je vyznačený v schéme na obr. 5, šípkou III. Dvojica bodových zdrojov A a B dáva najprv vznik dipólovému momentu M_i v bode O, ktorého zrkadlovým obrazom v bode O je moment $\overline{M}_i$. Tento dipól sme zrkadlili opäť na guli, pričom sme však uvažovali z nekonečného radu vznikajúcich multipólových fiktívnych zdrojov len dipólovú zložku. Teraz budeme uvažovať kvadrupólovú zložku. Pre moment $\overline{M}_i$, ako sme už skôr uviedli, platí:

$$\overline{M}_1 = 2q\frac{\varkappa-1}{2\varkappa+1}\frac{a^3}{R_2^2}A_1, \; \overline{M}_2 = \overline{M}_3 = 0.$$

Zložky kvadrupólového momentu m_{kl}, vznikajúceho zrkadlením $\overline{M}_i$ na guli zistíme na základe vzorca (9), § 3. V ľubovoľnom bode, ktorý leží od bodu O vo vzdialenosti r v smere a_i potenciál tohto kvadrupólu v zmysle práve spomenutého vzorca je:

$$V = -\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+2}\frac{a^5}{4r^3}\sum_{ikl} b_{ikl}\overline{M}_i a_{kl}. \tag{9a}$$

V príslušnej časti vzorca (9), § 3 sme pritom opäť kládli $R = O\overline{O} = 2$ a namiesto A_{ikl} sme písali b_{ikl}, pretože príslušný smerový tenzor, odpovedajúci smeru $O\overline{O}$, je b_{ikl}. Potenciál kvadrupólu sme vyjadrili už v § 1 všeobecným vzorcom (3b), ktorý môžeme upraviť pomocou vzorcov (4), prípadne (4a), § 1 pre náš prípad takto:

$$V = \frac{1}{r^3} \sum_{kl} m_{kl} \alpha_{kl}. \tag{9b}$$

Porovnávajúc pravé strany vzorcov (9a) a (9b) zisťujeme, že

$$m_{kl} = -\frac{a^5}{4} \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \sum_i b_{ikl} \overline{M}_i,$$

po jednoduchej úprave dostávame:

$$m_{kl} = -\frac{a^5}{4} \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \overline{M}_1 \cdot b_{1kl} = -q \cdot \frac{a^8}{2R_2^2} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_1 b_{1kl}.$$

Kvadrupólový moment $\overline{m}_{kl}$, ktorý vzniká zrkadlením zdroja m_{kl} na rovine S, má zložky:

$$\overline{m}_{kl} = -q \cdot \frac{a^8}{2R_2^2} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_1 \cdot \bar{b}_{1kl}.$$

Potenciál dvojice kvadrupólových zdrojov m_{kl} a $\overline{m}_{kl}$ v bode M, ktorý leží v rovine S, rovná sa podľa výsledkov, ktoré sme získali v § 6, dvojnásobku potenciálu m_{kl} v tom istom bode. Opierajúc sa o vzorec (9b), môžeme preto písať:

$$V_M = -q \cdot \frac{a^8}{R_1^3 R_2^2} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_1 \sum_{kl} b_{1kl} \alpha_{kl}.$$

Zložky smerového tenzoru b_{ikl}, vystupujúce v tomto vzorci, môžeme vypočítať na základe všeobecnej definície tohto tenzoru uvedenej v § 1. Podrobnejším výpočtom sa možno presvedčiť, že:

$$b_{111} = b_{113} = b_{122} = b_{123} = b_{133} = O,$$

kým

$$b_{112} = b_{121} = -\frac{1}{2}.$$

Práve tak sa môžeme presvedčiť, že:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{3}{2} a_1 a_2.$$

V dôsledku toho platí:

$$\sum_{kl} b_{1kl} \alpha_{kl} = 2 b_{112} \alpha_{12} = -\frac{3}{2} a_1 a_2,$$

teda

$$V_M = q \cdot \frac{3a^8}{2R_1^3 R_2^2} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_1 a_1 a_2.$$

Keďže kosínusy smeru $\overrightarrow{ON}$ sú $(-a_1, a_2, O)$, opäť platí:

$$V_N = -V_M,$$

a preto pre potenciálový rozdiel na elektródach M a N dostávame, kladúc $A_1 = \cos\varphi$, $a_1 = \cos\lambda$, $a_2 = \sin\lambda$, vzorec:

$$V_M - V_N = q \cdot \frac{3a^8}{R_1^3 R_2^2} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \sin\lambda \cos\lambda \cos\varphi.$$

Ďalší geometrický parameter G_3 definujeme takto:

$$G_3 = \frac{3\xi \sin\lambda \cos\lambda \cos\varphi}{R_1^3 R_2^2} = 3\xi \sin^4\lambda \cos\lambda \sin^2\varphi \cos\varphi \tag{10}$$

Príspevok tu uvažovaného potenciálového rozdielu na elektródach M a N k anomálii zdanlivého špecifického odporu potom môžeme vyjadriť vzorcom:

$$\Delta_3 = a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \cdot G_3. \tag{11}$$

Zrkadlením na guli dipólu $\overline{M}_i$ vzniká v jej strede okrem vypočítaného dipólu m_k a kvadrupólu m_{kl} tiež oktapól m_{kln} schematizovaný na obr. 5, šípkou IV. K výpočtu zložiek jeho momentu použijeme vo vhodne upravenom tvare tretiu z rovníc (3), § 5, v ktorej opäť kladieme $R = 2$, píšeme q_{ikl} m_{kln} namiesto A_{iklm} b_{ikln} a namiesto M_n M_i. Dostávame:

$$m_{kln} = -\frac{3}{20} \frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3} a^7 \sum_i b_{ikln} \overline{M}_i.$$

Vzhľadom na skôr odvodené vzorce pre $\overline{M}_i$

$$m_{kln} = -\frac{3}{10} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \frac{a^{10}}{R_2^2} A_1 b_{1kln}.$$

Ak tento oktapól zrkadlíme ešte raz na rovine S, dostávame oktapól

$$\overline{m}_{kln} = -\frac{3}{10} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \frac{a^{10}}{R_2^2} A_1 \bar{b}_{1kln}.$$

Potenciál dvojice oktapólov m_{kln} v ľubovoľnom bode roviny S sa podľa výsledkov, ktoré sme odvodili v § 6, rovná opäť dvojnásobku potenciálu oktapólu m_{kln} v tomto bode. Preto potenciál v bode M je:

$$V_M = \frac{2}{R_1^4} \sum_{kln} m_{kln} \alpha_{kln} = -\frac{3}{5} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \frac{a^{10}}{R_1^4 R_2^2} A_1 \sum_{kln} b_{1kln} \alpha_{kln}. \tag{12}$$

Zložky tenzoru α_{kln} môžeme vypočítať na základe ich definície uvedenej v § 1. Ak prihliadame k tomu, že bod M leží v rovine $x_3 = 0$, $a_3 = 0$, môžeme ľahko odvodiť tieto vzorce:

$$a_{111} = \frac{5}{2} a_1^3 - \frac{3}{2} a_1, \quad a_{112} = \frac{5}{2} a_1^2 a_2 - \frac{1}{2} a_2, \quad a_{122} = \frac{5}{2} a_1 a_2^2 - \frac{1}{2} a_1,$$
$$a_{133} = -\frac{1}{2} a_1, \quad a_{222} = \frac{5}{2} a_2^3 - \frac{3}{2} a_2, \quad a_{233} = \frac{5}{2} a_2 a_3^2 - \frac{1}{2} a_2, \tag{13}$$
$$a_{113} = a_{123} = a_{223} = a_{333} = 0.$$

Vzhľadom na poslednú z týchto rovníc redukuje sa súčet na pravej strane vzorca (12) takto:

$$\sum_{kln} b_{1kln} a_{kln} = b_{1111} a_{111} + 3b_{1112} a_{112} + 3b_{1122} a_{122} + 3b_{1133} a_{133} + 3b_{1233} a_{233} + b_{1222} a_{222}.$$

Zložky b_{iklm}, vystupujúce v tomto výraze, môžeme opäť vyjadriť pomocou zložiek vektora b_i ($b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 1$) na základe definícií uvedených v § 1. Ľahko sa presvedčíme najprv o tom, že:

$$b_{1112} = b_{1233} = b_{1222} = 0,$$

a preto

$$\sum_{kln} b_{1kln} a_{kln} = b_{1111} a_{111} + 3b_{1122} a_{122} + 3b_{1133} a_{133}. \tag{14}$$

Výpočtom ďalej dostávame:

$$b_{1111} = \frac{3}{8}, \quad b_{1122} = -\frac{1}{2}, \quad b_{1133} = \frac{1}{8}. \tag{14a}$$

Vsadiac tieto hodnoty do vzorca (14) a potom do vzorca (12) po ľahkej úprave máme:

$$V_M = -\frac{9}{16} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \cdot \frac{a^{10}}{R_1^4 R_2^4} A_1 a_1 (a_1^2 - 4a_2^2).$$

Keďže však

$$a_1^2 = 1 - a_2^2,$$

môžeme tiež písať:

$$V_M = \frac{9}{16} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \cdot \frac{a^{10}}{R_1^4 R_2^4} \cdot A_1 a_1 (5a_2^2 - 1).$$

Ľahko sa tiež presvedčíme, že:

$$V_M - V_N = 2V_M = \frac{9}{8} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \cdot \frac{a^{10}}{R_1^4 R_2^4} A_1 a_1 (5a_2^2 - 1)$$

a tomuto potenciálovému rozdielu zase zodpovedá časť celkovej anomálie zdanlivého špecifického odporu

$$\Delta_4 = a^{10} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \cdot G_4. \tag{15}$$

kde G_4 je opäť geometrický parameter merania definovaný vzťahom

$$G_4 = \frac{9}{8} \frac{\xi A_1 a_1}{R_1^4 R_2^4} (5a_2^2 - 1). \tag{16}$$

Môžeme tu opäť klásť:

$$A_1 = \cos\varphi, \quad a_1 = \cos\lambda, \quad a_2 = \sin\lambda, \quad R_1 = \frac{1}{\sin\lambda}, \quad R_2 = \frac{1}{\sin\varphi}$$

teda:

$$G_4 = \frac{9}{8} \xi \cos\varphi \cos\lambda \sin^2\varphi \sin^4\lambda \, (5\sin^2\lambda - 1). \tag{16a}$$

Tým sme vyčerpali všetky členy vznikajúce postupným zrkadlením dipólu M_i, prípadne $\overline{M}_i$, ktoré ako činitele obsahujú mocniny polomeru a až do jeho desiatej mocniny. Zrkadlením bodového zdroja A na guli však vzniká v jej strede súčasne tiež fiktívny kvadrupól M'_{ik} a zrkadlením zdroja B fiktívny kvadrupól M''_{ik}. Oba tieto kvadrupóly spolu dávajú výsledný kvadrupól M_{ik}.

Zložky kvadrupólového momentu M'_{ik} a M''_{ik} vypočítame na základe druhej z rovníc (2), § 5. Ak v tejto rovnici pozmeníme $q_{ik}^{(0)}$ na M'_{ik} a R na R_2, dostávame:

$$M'_{ik} = \frac{4}{3} q \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \frac{a^5}{R_2^3} A_{ik}.$$

Príslušný vzorec pre M''_{ik} dostávame zámenou A_{ik} na A''_{ik}, kde A''_{ik} sú zložky smerového tenzoru prislúchajúceho smeru OB (v. obr. 4). Pri symetrickom usporiadaní elektród A a B naznačenom na obr. 4 však je:

$$A''_{11} = A_{11}, \; A''_{13} = A_{13} = 0, \; A''_{22} = A_{22}, \; A''_{23} = A_{23} = 0, \; A''_{33} = A_{33} = -\frac{1}{2}$$

a súčasne

$$A''_{12} = -A_{12}.$$

Keďže v bode B sýtime zdrojom intenzity $-q$, zložky výsledného fiktívneho kvadrupólu sú:

$$M_{12} = \frac{8}{3} q \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \frac{a^5}{R_2^3} A_{12}, \quad M_{11} = M_{22} = M_{33} = M_{13} = M_{23} = 0. \tag{17}$$

Jeho zrkadlením na rovine S vzniká kvadrupól

$$\overline{M}_{12} = -\frac{8}{3} q \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} \frac{a^5}{R_2^3} A_{12}, \quad \overline{M}_{11} = \overline{M}_{22} = \overline{M}_{33} = \overline{M}_{13} = \overline{M}_{23} = 0. \tag{17a}$$

Vplyv dvojice kvadrupólov M_{ik} a $\overline{M}_{ik}$ na hodnotu relatívnej anomálie zdanlivého špecifického odporu je zahrnutý už vo výraze (3), § 7. Ďalším zrkadlením kvadrupólu $\overline{M}_{ik}$ na guli však vzniká v jej strede dipól p_i (šípka V na obr. 5.) a kvadrupól p_{ik} (šípka VI), prípadne opätovným zrkadlením na rovine S dipól $\overline{p}_i$ a kvadrupól $\overline{p}_{ik}$, ktorých vplyv sme doteraz neuvažovali.

Zložky dipólového momentu p_i môžeme vypočítať na základe vhodne upravenej prvej rovnice (4), § 5:

$$p_i = \frac{3}{16}\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} a^3 \sum_{kl} b_{ikl}\overline{M}_{kl} = \frac{3}{8} a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} b_{i12}\overline{M}_{12}.$$

Avšak, ako sa ľahko presvedčíme na základe vzorcov (13)

$$b_{112} = -\frac{1}{2}, \quad b_{212} = b_{312} = 0,$$

a preto

$$p_1 = -\frac{3}{16} a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \overline{M}_{12}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0.$$

Vsadiac za $\overline{M}_{12}$ výraz vyjadrený vzorcom (17a) dostávame:

$$p_1 = \frac{q}{2} \cdot \frac{a^8}{R_2^3} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \cdot A_{12}.$$

Pre zložky zrkadleného dipólu $\bar{p}_i$ platia vzťahy:

$$\bar{p}_1 = p_1, \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 0.$$

Vypočítame teraz potenciál dvojice dipólov p_i a $\bar{p}_i$ v bodoch M a N podľa známych vzorcov:

$$V_M = \frac{2}{R_1^2} \sum_i p_i a_i = \frac{2}{R_1^2} p_1 a_1 = q \cdot \frac{a}{R_1^2 R_2^3} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_{12} a_1 = -V_N.$$

Preto potenciálový rozdiel v bodoch M a N, ktorý je podmienený touto dvojicou dipólov, je daný vzorcom:

$$V_M - V_N = 2V_M = 2q \cdot \frac{a^8}{R_1^2 R_2^3} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} A_{12} a_1$$

a príslušná časť relatívnej anomálie zdanlivého špecifického odporu

$$\Delta_5 = \frac{2a^8(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \cdot \frac{\xi A_{12} a_1}{R_1^2 R_2^3}.$$

Z definície tenzoru A_{ik} (v. § 1) však vyplýva

$$A_{12} = \frac{3}{2} \cos\varphi \sin\varphi.$$

Ak teda kladieme:

$$G_5 = \frac{3\xi \cos\varphi \sin\varphi \cos\lambda}{R_1^2 R_2^3} = 3\xi \sin^4\varphi \cos\varphi \sin^2\lambda \cos\lambda, \qquad (18)$$

môžeme tiež písať:

$$\Delta_5 = a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} \cdot G_5. \qquad (19)$$

Obrátime sa teraz k výpočtu potenciálu dvojice kvadrupólov p_{ik} a $\bar{p}_{ik}$, z ktorých p_{ik} predstavuje kvadrupól vznikajúci v bode O (obr. 4) pri zrkadlení fiktívneho zdroja M_{ik} na guli, kým $\bar{p}_{ik}$ vzniká ďalším zrkadlením tenzoru p_{ik} na rovine S. Na obr. 5 tejto časti našej úvahy zodpovedá šípka VI.

Zložky kvadrupólového momentu $\overline{M}_{ik}$ sme vyjadrili už vzorcom (17a) a videli sme, že okrem $\overline{M}_{12}$ všetky zložky sa rovnajú nule. Pre výpočet zložiek p_{ik} použijeme vhodným spôsobom upravenú druhú rovnicu (4), § 5, z ktorej dostávame:

$$p_{ik} = \frac{1}{4}\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} a^5 \sum_{iklm} b_{iklm}\overline{M}_{lm} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} a^5 \overline{M}_{12} b_{ik12}.$$

Za $\overline{M}_{12}$ vsadíme výraz, ktorý sme našli vo vzorci (17a):

$$p_{ik} = -\frac{4}{3} q \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot \frac{a^{10}}{R_2^3} A_{12} b_{ik12}.$$

Zložky tenzoru $\bar{p}_{ik}$ dostávame použijúc pravidlá, ktoré sme odvodili pre zrkadlenie na rovine v § 6. Podľa týchto pravidiel, ktoré sme v predchádzajúcich úvahách použili už viackrát, potenciál dvojice p_{ik} a $\bar{p}_{ik}$ v ľubovoľnom bode roviny S sa rovná dvojnásobku potenciálu kvadrupólu p_{ik} v tom istom bode. Preto potenciál v bóde M je:

$$V_M = \frac{2}{R_1^3} \sum_{ik} p_{ik} a_{ik} = -\frac{8}{3} q \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \frac{a^{10}}{R_1^3 R_2^3} A_{12} \sum_{ik} b_{ik12} a_{ik}.$$

Avšak ľahko sa presvedčíme, že pri voľbe súradnej sústavy znázornenej na obr. 4 platí:

$$b_{1112} = b_{2212} = b_{3312} = 0, \quad b_{1212} = -\frac{1}{2}$$

a pri uvažovanom usporiadaní elektród okrem toho je:

$$a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = -\frac{1}{2}.$$

Preto súčet na pravej strane horejšieho vzorca, ktorý sme pre potenciál V_M odvodili, redukuje sa na jediný člen:

$$\sum_{ik} b_{ik12} a_{ik} = 2a_{12} b_{1212} = -a_{12}$$

a pre samý potenciál V_M dostávame vzorec:

$$V_M = \frac{8}{3} q \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot \frac{a^{10}}{R_1^3 R_2^3} A_{12} a_{12}.$$

Majúc na zreteli súmernosť usporiadania elektród a prihliadajúc na základné vlastnosti tenzoru a_{ik}, z tohto vzorca bez akýchkoľvek ťažkostí opäť vyplýva:

$$V_N = -V_M, \quad V_M - V_N = 2V_M,$$

teda:

$$\Delta_6 = \frac{16}{3}\left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot \frac{a^{10}}{R_1^3 R_2^3}\,\xi A_{12}\alpha_{12}.$$

Podľa definície kladieme:

$$A_{12} = \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad \alpha_{12} = \frac{3}{2}\sin\lambda\cos\lambda$$

a dostávame:

$$\Delta_6 = a^{10}\left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot G_6, \tag{20}$$

kde sme ako geometrický parameter usporiadania elektród zaviedli veličinu

$$G_6 = \frac{12\xi\sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda\cos\lambda}{R_1^3 R_2^3} = 12\xi\sin^4\varphi\cos\varphi\sin^4\lambda\cos\lambda. \tag{21}$$

Tým sme vyčerpali všetky členy vznikajúce postupným zrkadlením prvotného kvadrupólu M_{ik} na rovine S a na danej guli, v ktorých vystupuje ako činiteľ desiata mocnina polomeru a alebo niektorá z jeho nižších mocnín. Preto pristúpime k poslednému kroku tejto úvahy, ktorý sme na obr. 5 schematizovali šípkou VII.

V dôsledku sýtenia v bode A prúdom intenzity I v strede gule O vzniká fiktívny oktapólový zdroj M_{ikl}. Jeho zložky určíme pomocou tretej rovnice (2), § 5:

$$M'_{ikl} = \frac{6}{5}q\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_2^4}A_{ikl}.$$

Súčasne však v bode O vzniká tiež druhý fiktívny oktapólový zdroj M''_{ikl}, pretože sýtime aj v bode B prúdom intenzity $-I$. Výsledný oktapólový moment bude mať zložky:

$$M_{ikl} = M'_{ikl} + M''_{ikl}.$$

Výpočtom zložiek tenzoru A_{ikl} možno zistiť, že v súradnej sústave, ktorú sme si pre svoje úvahy zvolili (v. obr. 4), v dôsledku súmernosti úsečky AB podľa osi $O\overline{O}$ platia vzťahy:

$$M''_{111} = M'_{111}, \quad M''_{122} = M'_{122}, \quad M''_{133} = M'_{133},$$
$$M'_{112} + M''_{112} = M'_{222} + M''_{222} = M'_{233} + M''_{233} = 0,$$
$$M''_{113} = M'_{113} = M''_{123} = M'_{123} = M''_{223} = M'_{223} = M''_{333} = M'_{333} = 0,$$

a preto výsledný oktapólový moment M_{ikl} má len tieto zložky:

$$M_{111} = \frac{12}{5}q\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_2^4}A_{111}, \qquad M_{122} = \frac{12}{5}q\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_2^4}A_{122},$$
$$M_{133} = \frac{12}{5}q\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3}\frac{a^7}{R_2^4}A_{133}. \tag{22}$$

Jeho zrkadlením na rovine S vzniká v bode O fiktívny oktapólový zdroj, ktorého zložky sú:

$$\overline{M}_{111} = M_{111}, \quad \overline{M}_{122} = M_{122}, \quad \overline{M}_{133} = M_{133} \tag{22a}$$

(všetky ostatné zložky sa rovnajú nule!). Vplyv oktapólov M_{ikl} a $\overline{M}_{ikl}$ na anomáliu zdanlivého špecifického odporu je zahrnutý už v rovnici (3), § 7 (v treťom člene výrazu na jej pravej strane). Pri terajšej úvahe schematizovanej šípkou VII, obr. 5, ide len o výpočet tej časti, ktorou k celkovej anomálii prispieva dipól q_i, ktorý vzniká pri zrkadlení oktapólu M_{ikl} na guli a dipól $\overline{q}_i$, ktorý vzniká zrkadlením dipólu q_i na rovine S.

K výpočtu zložiek dipólu q_i použijeme vzorec (5), § 5, ktorý pre tento prípad môžeme písať v tvare:

$$q_i = -\frac{a^3}{8}\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\sum_{klm} b_{iklm}\overline{M}_{klm}.$$

Súčet, ktorý je na pravej strane tohto vzorca sa však redukuje v dôsledku toho, že časť zložiek $\overline{M}_{klm}$ sa rovná nule, na tri členy:

$$\sum_{klm} b_{iklm}\overline{M}_{klm} = b_{i11}\overline{M}_{111} + 3b_{i122}\overline{M}_{122} + 3b_{i133}\overline{M}_{133}.$$

Z definície tenzoru b_{iklm} možno dokázať, že v súradnicovej sústave, ktorú sme pre svoje úvahy zvolili, platí:

$$b_{2111} = b_{2122} = b_{2133} = b_{3111} = b_{3122} = b_{3133}.$$

preto $q_2 = q_3 = 0$ a dipól q_i má jedinú zložku

$$q_1 = -\frac{a^3}{8}\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}(b_{1111}\overline{M}_{111} + 3b_{1122}\overline{M}_{122} + 3b_{1133}\overline{M}_{133}).$$

Do tohto vzorca vsadíme jednak hodnoty príslušných zložiek tenzoru b_{iklm} (v. 14a), jednak výrazy pre zložky $\overline{M}_{ikl}$, ktoré vyplývajú zo vzorcov (22) a (22a). Dostávame:

$$q_1 = -\frac{9}{80}\frac{(\varkappa - 1)^2 q}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)}\frac{a^{10}}{R_2^4}(A_{111} + A_{133} - 4A_{122})$$

a v dôsledku základných vzťahov vyjadrených rovnicami (5), § 1

$$q_1 = \frac{9}{16}q\frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)}\frac{a^{10}}{R_2^4}A_{122}.$$

Zložky dipólu $\overline{q}_i$ sú:

$$\overline{q}_1 = q_1, \quad \overline{q}_2 = \overline{q}_3 = 0.$$

Potenciál dvojice dipólov q_i a $\overline{q}_i$ v bode M je:

$$V_M = \frac{2}{R_1^2}\sum_i q_i\alpha_i = \frac{9}{8}q\frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)}\cdot\frac{a^{10}}{R_1^2 R_2^4}A_{122}\alpha_1$$

a napätie na elektródach M a N v dôsledku toho je:

$$V_M - V_N = \frac{9}{4} q \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \frac{a^{10}}{R_1^2 R_2^4} A_{122} a_1 .$$

Tomuto potenciálovému rozdielu zodpovedá relatívna anomália zdanlivého špecifického odporu

$$\Delta_7 = \frac{9}{4} a^{10} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \cdot \frac{\xi A_{122} a_1}{R_1^2 R_2^4} .$$

Vychádzajúc z definície tenzoru A_{ikl} uvedenej v § 1 (vzorce 4), ľahko sa presvedčíme, že:

$$A_{122} = \frac{1}{2} A_1 (5A_2^2 - 1),$$

konečne preto dostávame:

$$\Delta_7 = a^{10} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} G_7, \tag{23}$$

kde

$$G_7 = \frac{9\xi \cos\varphi \cos\lambda}{8 R_1^2 R_2^4} (5 \sin^2\varphi - 1) = \frac{9}{8} \xi \cos\varphi \sin^4\varphi \cos\lambda \sin^2\lambda \, (5 \sin^2\varphi - 1), \tag{24}$$

je geometricky určená veličina závislá len od voľby parametra ξ.

§ 9. VZORCE PRE ZDANLIVÝ ŠPECIFICKÝ ODPOR PRI SONDOVANÍ WENNEROVOU METÓDOU

Na základe poznatkov, ku ktorým sme dospeli v § 7 a § 8, ľahko si odvodíme vzorce pre zdanlivý špecifický odpor pri sondovaní Wennerovou metódou, ak stred sondáže je v bode C (v. obr. 4), t. j. presne nad stredom uvažovanej guľovej vložky. Ak si totiž zdanlivý špecifický odpor označíme $\bar{\varrho}$, môžeme relatívnu hodnotu anomálie Δ definovať vzorcom:

$$\Delta = \frac{\bar{\varrho}}{\varrho_1} - 1$$

a ak sa obmedzíme na členy, v ktorých vystupuje nanajvýš desiata mocnina polomeru a, zrejme platí:

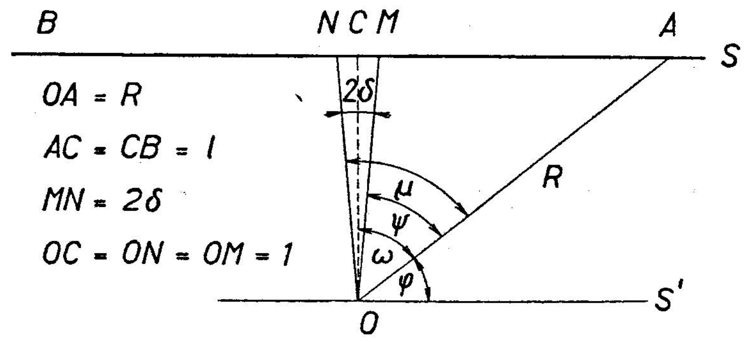
$$\Delta = \sum_{i=0}^{7} \Delta_i ,$$

pričom hodnoty Δ_i vyplývajú z príslušných rovníc oboch predchádzajúcich paragrafov. Preto môžeme pre Wennerovu schému písať vzorec:

$$\Delta = a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} F_1 + a^5 \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} F_2 + a^7 \frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3} F_3 + a^9 \frac{\varkappa - 1}{5\varkappa + 4} F_4 + $$
$$+ a^6 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot G_1 + a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} (G_3 + G_5) + a^9 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^3 G_2 +$$
$$+ a^{10} \left[\frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} (G_4 + G_7) + \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot G_6\right]. \tag{1}$$

Vychádzajúc z tejto rovnice môžeme sa najprv presvedčiť, že sa v nej uplatňuje známy princíp reciprocity, ktorý spočíva v tom, že sa hodnota zdanlivého špecifického odporu nezmení, ak premiestnime sýtne elektródy do bodov M a N a potenciálové do bodov A a B.

Tento princíp platí pre ľubovoľný z prvých štyroch členov na pravej strane rovnice 1 preto, lebo vo výrazoch (2), § 7 sa pri takomto premiestení elektród



Obr. 6

uhly ψ a μ nemenia, ako sa presvedčíme na obr. 4, a tieto výrazy sú súmerné v R_1 a R_2. Členy:

$$a^6 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 G_1, \qquad a^9 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^3 G_2, \qquad a^{10} \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot G_6$$

sa tiež nemenia, lebo výrazy pre G_1, G_2 a G_6 [v. vzorce (4a), (8) a (21), § 8] sú vo φ a λ súmerné.

Ak vo vzorci (10), § 8 píšeme λ namiesto φ a opačne, dostávame výraz:

$$3\xi \sin^4\varphi \cos\varphi \sin^2\lambda \cos\lambda .$$

Tento výraz je totožný s výrazom, ktorý sme odvodili pre G_5 [vzorec (18), § 8]. Pri tejto zámene teda G_3 predchádza v G_5 a opačne, takže hodnota výrazu

$$a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} (G_3 + G_5)$$

sa nezmení. Prevedúc tú istú zámenu vo vzorci (16a), § 8, pre G_4 dostávame výraz:

$$\frac{9}{8} \xi \cos\lambda \cos\varphi \sin^2\lambda \sin^4\varphi \, (5 \sin^2\varphi - 1),$$

ktorý sa úplne zhoduje s výrazom (24), § 8, ktorý sme odvodili pre G_7. Prechádza teda podobne ako predtým G_4 v G_7 a opačne, takže hodnota výrazu

$$a^{10} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} (G_4 + G_7)$$

zostáva tiež nezmenená. Tým sme dokázali, že sa v rovnici (1) uplatňuje princíp reciprocity.

V prípade, že materiál gule je dokonale nevodivý, kladieme v rovnici (1) $\varkappa = \infty$ a dostávame:

$$\Delta = \frac{1}{2} a^3 F_1 + \frac{1}{3} a^5 F_2 + \frac{1}{4} a^7 F_3 + a^9 \left(\frac{1}{5} F_4 + \frac{1}{8} G_2\right) + \frac{1}{4} a^6 G_1 + + \frac{1}{6} a^8 (G_3 + G_5) + a^{10} \left[\frac{1}{8}(G_4 + G_7) + \frac{1}{9} G_6\right]. \tag{1a}$$

V prípade, že hmota guľovej vložky je dokonale vodivá, je $\varkappa = 0$ a rovnica (1) nadobúda tvar:

$$\Delta = -\left\{a^3 F_1 + \frac{1}{2} a^5 F_2 + \frac{1}{3} a^7 F_3 + a^9 \left(\frac{1}{4} F_4 + G_2\right) - a^6 G_1 - \frac{1}{2} a^8 (G_3 + G_5) - - a^{10} \left[\frac{1}{3}(G_4 + G_7) + \frac{1}{4} G_6\right]\right\}. \tag{1b}$$

§ 10. ZDANLIVÝ ODPOR PRI SONDOVANÍ SCHLUMBERGEROVOU METÓDOU

Pri doterajších úvahách sme sa zameriavali prevažne na Wennerovu metódu, pri ktorej vzdialenosti elektród vyhovujú podmienke $AM = MN = NB$ $(= \xi)$. Úvahy, ktoré sme vykonali, môžeme však bez väčších ťažkostí použiť pre odvodenie teoretických vzorcov pre merania s akoukoľvek symetrickou štvorelektródovou schémou, ak stred súmernosti tejto schémy je v bode C (obr. 4) a ak všetky elektródy sú v jednej priamke. Odvodíme patričné vzorce pre dobre známu Schlumbergerovu schému, ktorá je znázornená na obr. 6, pri ktorej vzdialenosť potenciálových elektród $MN = 2\delta$ je v porovnaní so vzdialenosťou sýtnych elektród $AB = 2l$ nepatrná. Hĺbku stredu gule O pod povrchom S volíme za jednotku dĺžky kladúc $OC = 1$. Pri tejto voľbe je zrejme $\sphericalangle MON = 2\delta$.

Ak pri sýtení elektródami A a B zisťujeme na elektródach M a N potenciálový rozdiel $V_M - V_N$, zdanlivý špecifický odpor pri Schlumbergerovej schéme je:

$$\bar{\varrho} = \varrho_1 \frac{l^2 (V_M - V_N)}{4 q \delta},$$

kým pri Wennerovej schéme bolo:

$$\bar{\varrho} = \varrho_1 \cdot \frac{\xi (V_M - V_N)}{q},$$

pričom v oboch prípadoch je:

$$q = \frac{I \varrho_1}{2\pi}.$$

Preto ak chceme prejsť s Wennerovej schémy na Schlumbergerovu schému, musíme vo všetkých vzorcoch (2), § 7 pre F_1, F_2 atď. a vo vzorcoch (4a), (8), (10), (16a), (18), (21) a (24), § 8 pre $G_1, G_2, \ldots G_7$ nahradiť ξ veličinou

$$\eta = \frac{l^2}{4\delta}.$$

Vo všetkých týchto vzorcoch kladieme $R_1 = 1$ a namiesto R_2 píšeme R. Pre uhly ψ a μ, ktoré vystupujú vo vzorcoch (2), § 7, teraz platí:

$$\psi = \omega - \delta, \qquad \mu = \omega + \delta, \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Pre ľubovoľný z Legendreových polynómov P_n pri malých uhloch δ platí:

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\omega) - \delta \cdot \frac{dP_n(\cos\omega)}{d\omega}$$

a práve tak

$$P_n(\cos\mu) = P_n(\cos\omega) + \delta \cdot \frac{dP_n(\cos\omega)}{d\omega}.$$

V dôsledku toho v rovniciach (2), § 7 píšeme namiesto rozdielov $P_n(\cos\psi) - P_n(\cos\mu)$ výrazy:

$$-2\delta \frac{dP_n(\cos\omega)}{d\omega}.$$

Pre sondovanie Schlumbergerovou metódou preto veličiny F_1, F_2 atď. na rozdiel od vzorcov (2), § 7 definujeme takto:

$$F_1 = -\frac{2l^2}{R^2} \frac{dP_1(\cos\omega)}{d\omega} \qquad F_3 = -\frac{6l^2}{R^4} \frac{dP_3(\cos\omega)}{d\omega}$$

$$F_2 = -\frac{4l^2}{R^3} \frac{dP_2(\cos\omega)}{d\omega} \qquad F_4 = -\frac{8l^2}{R^5} \frac{dP_4(\cos\omega)}{d\omega} \tag{1}$$

atď.

Derivácie Legendreových polynómov, ktoré sa v týchto vzorcoch vyskytujú, sú pre numerické výpočty tabuľkované napr. u **Jahnke — Emdeho** (II. ruské vydanie, 222—223).

Uhlu λ na obr. 4 pri Schlumbergerovej schéme znázornenej na obr. 6 zodpovedá uhol $\frac{\pi}{2} - \delta$. Preto pri prechode k tejto schéme musíme v príslušných rovniciach, ktoré sme v § 8 odvodili pre $G_1, G_2, \ldots G_7$, okrem ostatných nevyhnutých zmien tiež písať:

$$\cos\lambda = \delta, \quad \sin\lambda = 1.$$

Po vykonaní všetkých potrebných zmien dostávame:

$$G_1 = \frac{1}{4} l^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \qquad G_5 = \frac{3}{4} l^2 \cos\varphi \sin^4\varphi$$

$$G_2 = \frac{1}{32} l^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \qquad G_6 = 3l^2 \cos\varphi \sin^4\varphi$$

$$G_3 = \frac{3}{4} l^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \qquad G_7 = \frac{9}{32} l^2 \cos\varphi \sin^4\varphi (5\sin^2\varphi - 1)$$

$$G_4 = \frac{9}{8} l^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \tag{2}$$

Vzorec pre relatívnu hodnotu anomálie zdanlivého špecifického odporu má ten istý tvar ako pri Wennerovej metóde, (t. j. vzorec (1), § 9), avšak na rozdiel od § 7 a § 8 pre Schlumbergerovu schému definujeme funkcie F_i a G_i vzorcami (1) a (2) tohto paragrafu.

§ 11. ZHODNOTENIE VÝSLEDKOV NA ZÁKLADE VYPOČÍTANÝCH ČÍSELNÝCH ÚDAJOV

Tab. 1. Hodnoty F_i pri sondáži Wennerovou metódou

ξ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0,2	0,0416	0,2268	0,6023	1,1540	1,8140	2,4710	3,0040
0,4	0,2287	0,9696	1,8570	2,3090	1,9870	0,9858	—0,2579
0,6	0,4678	1,4210	1,7010	0,9677	—0,0929	—0,7018	—0,6782
0,8	0,6451	1,3670	0,9245	+0,0342	—0,3540	—0,2415	—0,0692
1,0	0,7330	1,0820	0,3752	—0,1358	—0,1281	—0,0270	—0,0181
1,2	0,7489	0,7789	0,1192	—0,0833	—0,0200	—0,0042	—0,0147
1,6	0,6659	0,3599	0,0139	—0,0022	+0,0040	—0,0036	—0,0020
2,0	0,5368	0,1610	0,0000	+0,0067	0,0006	—0,0008	—0,0001
3,0	0,2825	0,0246	0,0032	0,0000	—	—	—
4,0	0,1529	0,0050	0,0012	—	—	—	—
6,0	0,0551	0,0004	0,0001	—	—	—	—
8,0	0,0251	0,0001	—	—	—	—	—
10,0	0,0134	—	—	—	—	—	—

Na konci tejto práce v tabuľke 1 uvádzam číselné hodnoty funkcií F_1, $F_2, \ldots F_7$ pri sondáži Wennerovou metódou nad stredom gule. Tieto hodnoty som vypočítal pre rozličné vzdialenosti potenciálových elektród od $\xi = 0,2$ do $\xi = 10,0$. Na základe hodnôt uvedených v tejto tabuľke možno vypočítať približné hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu pre ľubovoľné $\varkappa$ a a podľa vzorca (3), § 7.

V tabuľke 2. sú uvedené číselné hodnoty funkcií G_1, $G_2, \ldots G_7$ tiež pre

Tab. 2. Hodnoty G_i pri sondáži Wennerovou metódou

ξ	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
0,2	0,0051	0,0006	0,0154	0,0229	0,0143	0,0567	0,0193
0,4	0,0286	0,0036	0,0824	0,1177	0,0631	0,2429	0,0633
0,6	0,0585	0,0073	0,1610	0,2166	0,0969	0,3555	0,0640
0,8	0,0807	0,0101	0,2085	0,2587	0,0992	0,3418	0,0390
1,0	0,0916	0,0115	0,2199	0,2473	0,0846	0,2706	0,0171
1,2	0,0936	0,0117	0,2065	0,2074	0,0662	0,1945	0,0044
1,6	0,0832	0,0104	0,1522	0,1168	0,0369	0,0900	—0,0036
2,0	0,0671	0,0084	0,1007	0,0566	0,0201	0,0403	—0,0038
3,0	0,0353	0,0044	0,0326	0,0066	0,0050	0,0061	—0,0014
4,0	0,0191	0,0024	0,0115	0,0000	0,0016	0,0012	—0,0005
6,0	0,0069	0,0009	0,0021	—0,0004	0,0003	0,0001	—0,0001
8,0	0,0031	0,0004	0,0006	—0,0001	0,0001	—	—
10,0	0,0017	0,0002	0,0002	—0,0001	—	—	—

Wennerovu metódu. Pri použití tabuľky 1 a 2 možno preto vypočítať teoretické sondážne krivky pre túto metódu s presnosťou na členy, v ktorých vystupuje nanajvýš desiata mocnina polomeru gule a.

Tab. 3. Hodnoty F_i pri sondáži Schlumbergerovou metódou

l	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0,3	0,0467	0,2613	0,7028	0,8626	2,184	3,032	+3,757
0,6	0,2725	1,212	2,414	3,164	+2,782	+1,337	—0,9367
0,9	0,6166	1,985	2,621	+1,581	—0,5597	—2,389	—2,830
1,2	0,9067	2,230	1,753	—0,2008	—1,729	—1,723	—0,6267
1,5	1,152	2,128	0,8606	—0,9439	—1,351	—0,5864	+0,2224
1,8	1,335	1,889	+0,2536	—1,001	—0,7884	—0,0658	0,2642
2,4	1,572	1,396	—0,2730	—0,6761	—0,1972	+0,1720	0,0861
3,0	1,707	1,024	—0,3843	—0,3927	—0,0304	0,0627	0,0208
4,5	1,862	0,5264	—0,3019	—0,1104	+0,0148	0,0112	0,0002
6,0	1,922	0,3118	—0,2023	—0,0396	0,0084	0,0025	—0,0002
9,0	1,959	0,1431	—0,1007	—0,0084	0,0023	0,0003	—
12,0	1,982	0,0822	—0,0595	—0,0028	0,0008	—	—
15,0	1,989	0,0529	—0,0388	—0,0012	0,0003	—	—

Tabuľka 3 uvádza hodnoty funkcií $F_1, F_2, \ldots F_7$ pre sondovanie Schlumbergerovou metódou. Argumentom v tomto prípade je polovičná vzdialenosť sýtnych elektród l, ktorá sa mení od $l = 0,3$ do $l = 15,0$. Tabuľka 4 udáva pre tie isté hodnoty argumentu l hodnoty funkcií G_1, $G_2, \ldots G_7$. Na základe hodnôt uvedených v týchto tabuľkách možno vypočítať teoretické sondážne diagramy pre Schlumbergerovu schému pri ľubovoľných hodnotách a a $\varkappa$ podľa vzorca (1), § 9.

Po odvodení príslušných vzorcov [najmä (1), § 9.] je prirodzene prvou úlohou skúmať veľkosť anomálií pri rozličných hodnotách a a $\varkappa$ a zo získaných

Tab. 4. Hodnoty G_i pri sondáži Schlumbergerovou metódou

l	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
0,3	+0,0059	+0,0007	+0,0178	+0,0267	+0,0163	+0,0653	+0,0220
0,6	0,0341	0,0043	0,1022	0,1533	0,0752	0,3007	0,0755
0,9	0,0748	0,0094	0,2246	0,3367	0,1240	0,4961	0,0819
1,2	0,1133	0,0142	0,3402	0,5101	0,1394	0,5576	0,0548
1,5	0,1440	0,0180	0,4321	0,6480	0,1329	0,5319	0,0269
1,8	0,1669	0,0214	0,5002	0,7509	0,1180	0,4721	+0,0079
2,4	0,1965	0,0246	0,5898	0,8845	0,0872	0,3489	—0,0085
3,0	0,2134	0,0267	0,6403	0,9603	0,0640	0,2561	—0,0120
4,5	0,2328	0,0291	0,6984	1,047	0,0329	0,1315	—0,0094
6,0	0,2402	0,0300	0,7206	1,081	0,0195	0,0780	—0,0063
9,0	0,2448	0,0306	0,7347	1,102	0,0089	0,0358	—0,0031
12,0	0,2477	0,0310	0,7433	1,115	0,0051	0,0205	—0,0019
15,0	0,2488	0,0311	0,7459	1,119	0,0033	0,0132	—0,0012

výsledkov vyvodzovať uzávery čo do praktického použitia odporových metód aplikovanej geoelektriky pre zisťovanie a lokalizáciu sférických alebo približne sférických telies. Keďže najväčšie anomálie (či už kladné alebo záporné) dostávame pri $\varkappa = 0$ alebo $\varkappa = \infty$, vypočítal som rad teoretických kriviek pre tieto krajné prípady (t. j. pre guľu dokonale vodivú alebo dokonale nevodivú).

Tab. 5. Relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu vyjadrené v percentách pri odporovej sondáži podľa Wennerovej schémy $\varkappa = 0$

ξ	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$
0,2	—0,4	— 1,1	— 2,7	— 7,0	—19,6	—58,3
0,4	—2,1	— 4,8	—10,7	—22,8	—48,2	(—102,6)
0,6	—3,8	— 8,3	—16,7	—31,1	—54,7	— 90,8
0,8	—4,8	—10,2	—19,2	—33,5	—54,1	— 81,6
1,0	—5,2	—10,7	—19,1	—32,7	—50,7	— 73,2
1,2	—5,2	—10,4	—18,7	—30,5	—46,2	— 65,2
1,6	—4,4	— 8,8	—15,4	—24,6	—36,6	— 51,1
2,0	—3,5	— 6,9	—12,0	—19,0	—28,1	— 39,0
3,0	—1,8	— 3,5	— 6,1	— 9,7	—14,3	— 20,0
4,0	—1,0	— 1,9	— 3,3	— 5,2	— 7,7	— 10,9
6,0	—0,4	— 0,7	— 1,2	— 1,9	— 2,8	— 4,0
8,0	—0,2	— 0,3	— 0,5	— 0,9	— 1,3	— 1,8
10,0	—0,1	— 0,2	— 0,3	— 0,5	— 0,7	— 1,0

V tabuľke 5 sú uvedené číselné hodnoty:

$$100\left(\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_1} - 1\right),$$

t. j. relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu v percentách pri použití Wennerovej schémy a pri $\varkappa = 0$, v tabuľke 6 tie isté hodnoty pri $\varkappa = \infty$. V prvom stĺpci týchto tabuliek vystupuje argument ξ. Ostatné stĺpce

Tab. 6. Relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu vyjadrené v percentách pri odporovej sondáži podľa Wennerovej schémy $\varkappa = \infty$

ξ	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$
0,2	0,2	0,7	1,9	5,4	16,0	49,3
0,4	1,2	3,0	7,0	16,3	37,3	84,6
0,6	2,1	4,8	10,3	20,8	40,2	73,9
0,8	2,6	5,7	11,4	21,3	38,0	65,0
1,0	2,8	5,8	11,2	20,0	34,1	56,3
1,2	2,7	5,6	10,4	18,0	29,9	48,0
1,6	2,3	4,6	8,3	13,9	22,2	34,4
2,0	1,8	3,6	6,3	10,4	16,2	24,5
3,0	0,9	1,8	3,1	5,1	7,7	11,3
4,0	0,5	1,0	1,7	2,7	4,0	5,8
6,0	0,2	0,3	0,6	0,9	1,4	2,1
8,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,9
10,0	0,0	0,1	0,1	0,2	0,3	0,5

predstavujú sondážne diagramy pri rozličných hodnotách a (od 0,4 do 0,8). Príslušná hodnota a je pritom uvedená v záhlaví každého stĺpca.

Percentuálne hodnoty relatívnych anomálií zdanlivého odporu pre Schlumbergerovu metódu sú uvedené v tabuľke 7 (pre $\varkappa = 0$) a v tabuľke 8 (pre $\varkappa = \infty$). Obe tieto tabuľky sú zostavené podľa tej istej schémy ako tabuľka 6 a 7, len s tým rozdielom, že ako argument tu vystupuje v prvom stĺpci polovičná vzdialenosť sýtnych elektród l.

Tab. 7. Relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu vyjadrené v percentách pri odporovej sondáži podľa Schlumbergerovej schémy $\varkappa = 0$

l	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$
0,3	—0,0	—0,2	— 0,5	— 1,2	— 3,1	— 7,9	—22,1
0,6	—0,2	—0,9	— 2,5	— 6,0	—13,5	—29,3	—62,9
0,9	—0,5	—1,9	— 5,1	—11,3	—23,0	—43,2	—75,6
1,2	—0,8	—2,7	— 7,0	—14,9	—28,5	—49,9	—79,4
1,5	—1,0	—3,4	— 8,4	—17,5	—32,2	—53,9	—81,8
1,8	—1,1	—3,8	— 9,4	—19,2	—34,6	—56,4	—83,2
2,4	—1,3	—4,4	—10,7	—21,3	—37,2	—59,0	—84,5
3,0	—1,4	—4,7	—11,3	—22,3	—38,5	—60,2	—85,0
4,5	—1,5	—5,1	—12,1	—23,5	—40,0	—61,6	—85,6
6,0	—1,5	—5,2	—12,3	—23,9	—40,5	—62,0	—85,8
9,0	—1,6	—5,3	—12,5	—24,1	—40,8	—62,1	—85,9
12,0	—1,6	—5,3	—12,6	—24,3	—41,0	—62,5	—86,0
15,0	—1,6	—5,4	—12,6	—24,3	—41,1	—62,5	—86,0

Okrem týchto tabuliek som vypočítal tiež sondážny diagram pre prípad pomerne malého odporového kontrastu $\varkappa = 2,0$ a veľkého polomeru $a = 0,8$.

Tab. 8. Relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu vyjadrené v percentách pri odporovej sondáži podľa Schlumbergerovej schémy $\varkappa = \infty$

l	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$
0,3	0,0	+0,1	+0,2	+0,7	+2,0	+5,8	+17,4
0,6	+0,1	0,5	1,4	3,6	8,7	20,5	47,1
0,9	0,3	1,0	2,7	6,5	14,1	28,5	54,1
1,2	0,4	1,4	3,7	8,4	16,9	31,8	55,6
1,5	0,5	1,7	4,4	9,6	18,7	33,5	56,5
1,8	0,6	1,9	4,9	10,4	19,7	34,4	56,8
2,4	0,6	2,2	5,5	11,3	20,7	35,2	57,0
3,0	0,7	2,4	5,8	11,8	21,2	35,6	56,8
4,5	0,7	2,6	6,1	12,3	21,8	36,0	56,7
6,0	0,8	2,6	6,3	12,4	22,0	36,1	56,7
9,0	0,8	2,6	6,3	12,5	22,0	36,1	56,6
12,0	0,8	2,7	6,4	12,6	22,1	36,2	56,6
15,0	0,8	2,7	6,4	12,6	22,2	36,2	56,6

Číselné hodnoty tohto diagramu, ktorý je platný pre Schlumbergerovu metódu, sú zostavené v tabuľke 9.

Tab. 9. Relatívne hodnoty anomálií zdanlivého špecifického odporu pri sondáži podľa Schlumbergerovej schémy, $\varkappa = 2,0$, $a = 0,8$

l	100Δ	l	100Δ
0,3	+6,2	3,0	+21,3
0,6	17,2	4,5	21,3
0,9	19,9	6,0	21,3
1,2	20,6	9,0	21,3
1,5	21,0	12,0	21,3
1,8	21,2	15,0	21,3
2,4	21,3		

Pri numerických výpočtoch sa ukazuje, že pri hodnotách $a \geqq 0,7$ rad

$$a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} F_1 + a^5 \frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2} F_2 + a^7 \frac{\varkappa - 1}{4\varkappa + 3} F_3 + a^9 \frac{\varkappa - 1}{5\varkappa + 4} F_4 + \dots$$

nekonverguje dostatočne rýchle. K výpočtu tabuliek 5 – 9 som preto použil namiesto (1), § 9 rozšírený vzorec a zaviedol som ďalšie členy s F_5, F_6 a F_7. Tento vzorec má tvar:

$$\Delta = \sum_{n=1}^{7} a^{2n+1} \frac{\varkappa - 1}{(n+1)\varkappa + n} F_n + G,$$

kde G znamená súčet všetkých členov vo vzorci (1), § 9, v ktorých vystupujú $G_1, G_2, G_3, \dots G_7$.

Z tabuliek 5 – 9 vidieť, že anomálie spôsobené guľovou vložkou nie sú pomerne veľké. Pritom vodivá guľa uložená v slabšie vodivom prostredí spôsobuje väčšiu relatívnu anomáliu ako nevodivá guľa toho istého polomeru a uložená v tej istej hĺbke v prostredí s vysokou vodivosťou. Toto možno konštatovať pre Wennerovu, ako aj pre Schlumbergerovu schému, ak porovnáme výsledky v tabuľkách 5 a 6, resp. 7 a 8. Vodivé teleso uložené v slabo vodivom prostredí je preto vhodnejším objektom pre sledovanie odporovou metódou ako nevodivé teleso vo vodivom prostredí pri tých istých rozmeroch a geometrických pomeroch uloženia.

Pri porovnaní tabuľky 5 a 7, prípadne 6 a 8 vidíme, že Wennerova metóda pri tých istých fyzikálnych a geologických podmienkach dáva menšie hodnoty anomálií ako Schlumbergerova metóda, ktorá teda po tejto stránke je výhodnejšia, práve preto však je na všetky druhy inhomogenity uvažovaného polopriestoru citlivejšia. Tieto inhomogenity sa dajú schematizovať sférickými telesami. V praxi ide najmä o inhomogenity povrchovej oblasti. Túto okolnosť treba uvážiť tým viac, lebo z príčin, ktoré v krátkosti uvážime neskôr, sondážne krivky získané Schlumbergerovou metódou aj pri značnej povrchovej inhomogenite môžu mať hladší priebeh ako krivky získané Wennerovou metódou, a preto môžu zvádzať k nesprávnemu predpokladu, že Wennerova metóda podlieha rušivým vplyvom takejto inhomogenity vo väčšej miere.

Ide v podstate o to, že kým pri Wennerovej schéme charakter sondážnych kriviek predstavovaných v tabuľke 5 a 6 je trojvrstevný (t. j. podobný ako v prípade troch vodorovných rovinných vrstiev), zatiaľ charakter kriviek zodpovedajúcich Schlumbergerovej schéme, ako vidíme z tabuľky 7, 8 a 9, je výrazne dvojvrstevný. Napr. pri $\varkappa > 1$ Wennerov odporový diagram pri vzrastajúcom ξ najprv postupne stúpa, pri určitej hodnote ξ_{max} však dosahuje svoju najväčšiu hodnotu a potom opäť klesá, približujúc sa asymptoticky hodnote platnej pre $\xi = 0$. Naproti tomu diagram získaný za tých istých podmienok Schlumbergerovou metódou nevykazuje maximum a pri vzrastajúcom l stúpa takmer vo všetkých vypočítaných prípadoch monotónne (s výnimkou prípadov $a = 0,8$, tabuľka 8) a približuje sa asymptoticky určitej hodnote, ktorá je totožná, alebo veľmi približne rovná maximu anomálie. To isté platí aj v prípade $\varkappa < 1$, prirodzene však v opačnom zmysle.

Preto napr. pri Wennerovej metóde každá sférická (alebo približne sférická) inhomogenita povrchovej oblasti v blízkosti stredu elektródovej sústavy dáva pri dostatočných rozmeroch a pri dostatočnom odporovom kontraste na odporovom diagrame ostrý výbežok („zub“), avšak pri zväčšovaní vzdialenosti elektród vplyv inhomogenity postupne mizne. Naproti tomu pri Schlumbergerovej metóde, kde vzdialenosť potenciálových elektród zostáva za sondovania konštantná, vplyv inhomogenity vzrastá najprv pomerne rýchle, neskôr pomalšie, až do ustálenia a potom zostáva konštantný. Výbežok na odporovom diagrame buď vôbec nevzniká alebo nie je výrazný, zato však vplyv inhomogenity sa zväčšovaním vzdialenosti l medzi sýtnymi elektródami nedá odstrániť a uplatňuje sa pri dostatočne veľkom l v konštantnej miere do ľubovoľných hĺbok.

Fakt, ktorý sme tu konštatovali, možno objasniť tiež takouto elementárnou úvahou. Zo vzorcov (2), § 7 je zrejmé, že všetky hodnoty F_i pri Wennerovom usporiadaní konvergujú k nule, ak ξ vzrastá k nekonečnu a z príslušných vzorcov § 8 [(4a), (8), (10), (16), (18), (21), (24)] pri tomto usporiadaní vyplýva to isté aj pre všetky hodnoty G_i. Preto:

$$\lim_{\xi \to \infty} \Delta = 0.$$

Pri Schlumbergerovom usporiadaní je naproti tomu podľa vzorcov (1), § 10:

$$\lim_{l \to \infty} F_1 = -2 \cdot \left(\frac{dP_1(\cos\omega)}{d\omega} \right)_{\omega = \frac{\pi}{2}} = 2,$$

$$\lim_{l \to \infty} F_i = 0 \text{ ak } i \geqq 2.$$

Keďže platí, ako sa ľahko z obr. 6 presvedčíme,

$$\lim_{l \to \infty} l^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \lim_{l \to \infty} l^2 \sin^4 \varphi = 0,$$

zo vzorcov (2), § 10 dostávame:

$$\lim_{l \to \infty} G_1 = \frac{1}{4}, \quad \lim_{l \to \infty} G_2 = \frac{1}{32}, \quad \lim_{l \to \infty} G_3 = \frac{3}{4}, \quad \lim_{l \to \infty} G_4 = \frac{9}{8},$$

$$\lim_{l \to \infty} G_5 = \lim_{l \to \infty} G_6 = \lim_{l \to \infty} G_7 = 0,$$

a preto pri tomto usporiadaní je:

$$\lim_{l \to \infty} \Delta = 2a^3 \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} + \frac{a^6}{4} \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \right)^2 + \frac{3a^8}{4} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} + $$
$$+ \frac{a^9}{32} \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1} \right)^3 + \frac{9a^{10}}{8} \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} \neq 0.$$

Bolo by iste veľmi zaujímavé vyšetriť po tejto stránke tiež iné sondovacie metódy. Zdá sa totiž, že všetky metódy, pri ktorých pri sondáži postupne zväčšujeme obe vzdialenosti AB a MN tak, že $AB \to \infty$ a tiež $MN \to \infty$, chovajú sa podobne ako pri Wennerovej metóde, kým všetky ostatné metódy, pri ktorých MN (alebo AB) je konštantné alebo zostáva konečné aj pri $AB \to \infty$ ($MN \to \infty$), chovajú sa podobne ako pri Schlumbergerovej metóde.

Zaujíma nás prirodzene tiež veľkosť odporových anomálií a z praktického hľadiska zvlášť dôležitá je otázka, aký musí byť pri danej hĺbke polomer gule, aby jej odporový účinok bol na zemskom povrchu merateľný. Pravda, odporové účinky závisia pritom tiež od pomeru špecifických odporov $\varkappa$. Relatívna presnosť odporových meraní je normálne asi $\pm$ 5%. Ak chceme určitú anomáliu interpretovať, musíme nevyhnutne požadovať, aby jej veľkosť dosahovala niekoľkonásobok tejto percentuálnej hodnoty. Mienky praktikov sa čo do spodnej hranice interpretovateľnosti veľmi rozchádzajú. Ak však považujeme $\delta = 20\%$ za túto spodnú hranicu, táto je skôr príliš nízka ako príliš vysoká. Potom však výsledky výpočtov zhrnuté v tabuľke 5 a 6 ukazujú, že aj v prípade najpriaznivejších odporových kontrastov musí byť pri Wennerovej metóde pri $\varkappa = 0$ $a > 0{,}6$ a pri $\varkappa = \infty$ $a \geqq 0{,}7$. Oniečo priaznivejšie výsledky v tomto ohľade dáva Schlumbergerova metóda, kde pri $\varkappa = 0$ musí byť $a \geqq 0{,}5$ a pri $\varkappa = \infty$ $a \geqq 0{,}6$ (v tab. 7 a 8). Avšak aj pri tejto metóde musí byť napr. $a \geqq 0{,}8$, ak $\varkappa = 2$, ako vidíme z tabuľky 9.

Poloha maxima anomálie v sondážnom diagrame $(\xi, \bar{\varrho})$ pri Wennerovej metóde závisí od hodnoty polomeru a. Ak napr. $a = 0{,}4$, maximum anomálie dostávame pri $\xi \sim 1$, kým pri $a = 0{,}8$ nastáva maximum už pri $\xi \sim 0{,}6$.

Je prirodzené, že záporné anomálie môžu dosahovať nanajvýš relatívnu hodnotu -100%. Tejto hranici sa pri Schlumbergerovej metóde približuje už hodnota -86%, vypočítaná pre $\varkappa = 0$, $a = 0{,}8$.

Možno však usudzovať, že ani kladné anomálie nebudú dosahovať hranice $+100\%$, ak len povrch gule nepretína zemský povrch (teda ak $a < 1$). Vyplýva to už zo zisteného faktu, že v tomto prípade dokonale vodivá guľa v slabšie vodivom prostredí spôsobuje väčšiu zápornú relatívnu anomáliu ako je kladná anomália dokonale nevodivej gule vo vodivom prostredí pri tých istých geometrických podmienkach.

Došlo dňa 10. januára 1954.

Katedra baníckeho meračstva a geofyziky
Vysokej školy technickej,
Košice.

LITERATÚRA

1. Landau-Lifšic, Teorija poľa, 2. vyd., §§ 39—41.
2. Lipskaja, Anomaľnoje pole lokaľnoj neodnorodnosti s konečnym značeniem elektroprovodnosti. Izv. akad. nauk SSSR, No 6, 1953.
3. Zaborovskij, Zadača o sfere v teorii elektrorazviedki. Bjull. neftjanoj promyšlennosti II. 1936.
4. Huber, Die Randwertaufgabe der Geoelektrik für Kugel und Zylinder. Zschr. f. angew. Mathem. u. Mech. 10/11, 1953.

О ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СОДЕРЖАЩЕМ ШАРООБРАЗНУЮ ВКЛАДКУ С ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ПРОВОДИМОСТЬЮ

ТИБОР КОЛБЕНГАЕР

Выводы

После резюмирования основных соотношений теории поля тока и теории шаровых функций, в § 2 рассмотрена проблема поля тока в бесконечном однородном полупространстве содержащем шарообразную вкладку. Рассматриваемое поле ни-

тается точечным источником находящимся вне шара. Выведены соотвествующие соотношения для потенциала.

В § 3 теория расширена и рассмотрено питание дипольным источником. Если A_{ik}, A_{ikl}, A_{iklm}, . . . обозначают компоненты тензоров направления для соединительной центра шара и источника, определяемых выражениями 4 § 1, a_k, a_{kl}, a_{klm} — подобным образом определяемые компоненты тензоров направления для соединительной центра шара и любой точки P, то потенциал в этой точке выражается соотношениями 9 (или 10) § 3, смотря по тому, находится-ли эта точка в внешней области или внутри шара (положение изображено на рис. 1, где объясняется тоже значение величин a, R, r). В этих выражениях M_i обозначает компоненты дипольного момента источника в любой прямоугольной картезианской системе, $\varkappa$ есть отношение удельного сопротивления шара (ϱ_2) к удельному сопротивлению в внешней области (ϱ_1).

В § 4 решена таже самая проблема для случая питания квадрупольным и октапольным источниками. В случае квадрупольного питания потенциал в внешней области определен бесконечным рядом 7, в случае октапольного насыщения он определяется рядом, первый член которого приведен в соотношении 9 § 4. В этих выражениях M_{ik} или M_{ikl} обозначают компоненты момента квадрупольного или октапольного источника, значение других величин тоже самое как в § 3.

В § 5 рассматриваются отдельные члены бесконечных рядов, которые определяют потенциал в области вне шара при питании точечным, дипольным, квадрупольным или октапольным источником. Эти члены являются как потенциалы фиктивных мультипольных источников в центре шара. В § 6 рассматривается вопрос зеркаления общих мультипольных источников на плоскости.

В § 7 дано приблизительное решение проблемы теоретической кривой зондирования выражающей двуточечное насыщение в случае симметрического прямолинейного расположения электродов по системе Веннера или по любой другой системе; при этом центр измерения C расположен на земной поверхности, вертикально над центром шара. Общее положение изображено на рис. 4, где возможно найти объяснение значения некоторых величин, находящихся в соотвествующих соотношениях. Уравнениями 2, в которых P_1, P_2, P_3, . . . обозначают соответствующие полиномы Лежандра и $\xi = MN$ — расстояние потенциальных электродов, определяется прежде всего ряд функций F_i. Если $\bar{\varrho}$ обозначает кажущееся удельное сопротивление при рассматриваемом расположении, относительную аномалию кажущегося сопротивления $\Delta_0 = \bar{\varrho}\ /\varrho_1 - 1$ выражает приблизительная формула 3. § 7.

Так как эта формула представляет собой только приблизительное, иногда весьма неточное решение, в § 8 выведены более точные соотношения для метода Веннера; при этом намечён способ точного решения путём повторительного зеркаяния на плоскости, представляющей собой земную поверхность и на поверхности шара. Окончательная формула, которая, однако, опять только приблизительная, но при этом она удовлетворяет по точности всем практическим требованиям, пока $a < 0{,}9$ имеет следующий вид:

$$\Delta = \sum_{n=1}^{7} \frac{\varkappa - 1}{(n+1)\varkappa + n} a^{2n+1} F_n + a^6 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 G_1 + a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} (G_3 + G_5) +$$
$$+ a^9 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^3 G_2 + a^{10} \left[\frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} (G_4 + G_7) + \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 G_6\right],$$

где функции F_1, F_2, . . . F_7 определены выражениями 2, § 4, функции G_1, G_2, . . . G_7 определены выражениями 4a, 8, 10, 16a, 18, 21 и 24, § 8. Эта формула для относительной величины аномалии кажущегося относительного сопротивления при техже самых условиях выражает любое другое симметрическое расположение электродов, но только после изменения величины функций F_i и G_i. В § 10 определяются эти функции уравнениями 1 и 2 для расположения электродов по способу Шлумбергера. При этом значение величин вступающих в эти формулы объяснено на рис. 6. Значения этих функций для метода Веннера собраны в таблицы 1 и 2, именно для 13 разных значений $MN = \xi$ от 0,2 до 10,0. Если вставить значения данные в этих таблицах в формулу дял вычисления относительных величин аномалий кажущегося сопротивления, можно с достаточной точностью вычислять теоретические кривые зондирования для любого $a < 0{,}9$ и любого $\varkappa$. В таб. 5 и 6 вычислены эти теоретические кривые для метода Веннера применяемого в обоих предельных случаях $\varkappa = 0$ и $\varkappa = \infty$. При этом a приобретает значения 0,4, 0,5, . . ., 0,8. Для метода Шлумбергера вычислены соотвествующие кривые ($\varkappa = 0$ или-же $\varkappa = \infty$, $a = 0{,}2$, 0,3, . . ., 0,8) в таб. 7 и 8.

Таблица 9 соотвествует расположению Шлумбергера при $a = 0{,}8$, $\varkappa = 2{,}0$.

Резюмирование результатов в § 11 приводит к нескольким замечательным следствиям, из которых важнее всех:

1. Относительные значения аномалий для обоих рассматриваемых расположений (также как в случае других симметрических установок) больше при $\varkappa = 0$ (проводящий шар в плохо проводящей среде) чем при $\varkappa = \infty$ (непроводящий шар в проводящей среде).

2. При установке Шлумбергера аномалии существенно большие чем при расположении Веннера. При этом это расположение более чувствительно к любым квазисферическим неоднородностям в поверхностной области.

3. В отличие от обычного случая горизонтального наслоения в случае шарообразной вкладки рассматриваемые два метода приводят к весьма отличающимся результатам. Уже один характер кривых зондирования отличается. Между тем как применяя метод Веннера при достаточно больших a и достаточном контрасте сопротивлений $\varrho_2 : \varrho_1$ эти кривые отличаются ясно выраженным максимумом или минимумом и поэтому их характер ясно трехслойный (аналогически с горизонтальным наслоением), кривые соответствующие установке Шлумбергера монотонно возрастают ($\varkappa > 1$) или монотонно убывают ($\varkappa < 1$) и с увеличением расстояния питающих электродов асимптотически приближаются к известному верхнему или нижнему пределу и отличаются ясно выраженным двуслойным характером. Этот факт, который имеет место у всех методов, где при $AB \to \infty$ расстояние M остается конечным, вытекает в данном случае из того, что F_1, G_1, G_2, G_3, G_4 имеют предел отличающийся от нуля. С этим обстоятельством надо считаться при всех зондовых измерениях с малым расстоянием потенциальных электродов, так как неоднородности, размеры которых соизмеримы с величиной упомянутого расстояния или являются большими, загружают постоянной ошибкой все измерения до любых глубин. Эта ошибка с увеличением расстояния AB вовсе не устраняется.

4. Чтобы рассматриваемый шар вызывал достаточно большие аномалии, достигающие по крайней мере ± 20 %, должно быть тоже в предельных случаях $\varkappa = 0$ или $\varkappa = \infty$ при применении метода Шлумбергера $a \geqq 0{,}5$ или-же $a \geqq 0{,}6$, при применении метода Веннера $a \geqq 0{,}6$ или $a \geqq 0{,}7$.

DAS GEOELEKTRISCHE STROMFELD IM HOMOGENEN HALBRAUM IN ANWESENHEIT EINES KUGELFÖRMIGEN FREMDKÖRPERS

T. KOLBENHEYER, Košice

Zusammenfassung

Nach einer kurzen Rekapitulation der nötigen Sätze und Formeln aus der Theorie des Stromfeldes und der Kugelfunktionen in § 1 wird in § 2 das Problem des Feldes einer punktartigen Stromquelle im homogenen unendlichen Raume gelöst, der einen kugelförmigen Fremdkörper abweichender Leitfähigkeit einschliesst.

In § 3 wird die Theorie auf den Fall einer Dipolquelle erweitert. Bedeuten A_{ik}, A_{ikl}, A_{iklm}, ... die Komponenten der Richtungstensoren die durch Gl. 4 § 1 definiert werden und der Richtung vom Kugelmittelpunkt O zur Quelle Q entsprechen, so gilt für das Potential in einem beliebigen Punkte P Formel 9. bzw. 10. § 3 je nachdem sich dieser außerhalb oder innerhalb der betrachteten Kugel befindet. Dabei stellen a_k, a_{kl}, ... in analoger Weise definierte, der Richtung OP entsprechende Tensorkomponenten dar, während M_i die Dipolkomponenten der Quelle bedeutet. Die Situation ist in Abb. 1. veranschaulicht wo auch der Sinn der in den erwähnten Formeln auftretenden Größen a, R und r näher erklärt wird. Das Verhältnis der spezifischen Widerstände des kugelförmigen Körpers und des übrigen Raumes wird dabei mit $\varrho_2 : \varrho_1 = \varkappa$ bezeichnet.

In § 4 wird dasselbe Problem für eine Quadrupol- bzw. Oktapolquelle gelöst. Im ersten Falle wird das Potential im Aussenraum durch die Reihe 7. § 4 bestimmt, im letzteren durch eine Reihe deren erstes Glied in 9. § 4 angegeben ist. M_{ik} bzw. M_{ikl} bedeuten dabei die Komponenten der Quadrupol- bzw. Oktapolquelle, während die Bedeutung aller übrigen Größen dieselbe ist wie in § 3.

In § 5 werden die Glieder der für das Potential im Aussenraum abgeleiteten Reihen als Potentiale im Kugelmittelpunkt befindlicher fiktiver Multipolquellen gedeutet. In § 6 wird die Spiegelung beliebiger Multipolquellen an einer Ebene erörtert.

In § 7. wird eine Näherungsformel für den scheinbaren Widerstand beim Wennerschen oder einem beliebigen anderen symmetrischen Elektrodensystem abgeleitet, wobei sich der Sondierungsmittelpunkt C senkrecht über dem Kugelmittelpunkt O befindet. Zur Erklärung der hierbei auftretenden Größen und Symbole dient Abb. 4. Durch Gl. 2. § 7 wird zunächst eine Folge von Funktionen F_1, F_2, ... definiert, wobei P_1, P_2, P_3 ... die entsprechenden Legendreschen Polynome, $\xi = MN$ die Entfernung der Potentialelektroden bedeutet. Bezeichnet $\bar{\varrho}$ den scheinbaren Widerstand bei der betrachteten Elektrodenanordnung, so gilt für die relative Anomalie $\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_1} - 1 = \Delta_0$ die Näherungsformel 3. § 7.

Diese Lösung stellt jedoch nur eine ziemlich rohe Annäherung dar. Es wird daher in § 8 zunächst die Möglichkeit einer strengen Lösung durch sukzessive Spiegelungen an der Kugelfläche und der Erdoberfläche angedeutet, sodann werden genauere Formeln für die Wennersche Methode abgeleitet. Die schließliche Näherungsformel

$$\Delta = \sum_{n=1}^{7} \frac{\varkappa - 1}{(n+1)\varkappa + n} a^{2n+1} F_n + a^6 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^2 \cdot G_1 + a^8 \frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(3\varkappa + 2)} (G_3 + G_5) +$$

$$+ a^9 \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa + 1}\right)^3 G_2 + a^{10} \left[\frac{(\varkappa - 1)^2}{(2\varkappa + 1)(4\varkappa + 3)} (G_4 + G_7) + \left(\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa + 2}\right)^2 \cdot G_6\right],$$

worin F_n die in 2. § 4 definierten Funktionen bedeuteten während $G_1, G_2, \ldots G_7$ der Reihe nach durch Formeln 4a, 8, 10, 16a, 18, 21 und 24 § 8 definiert sind, dürfte allen praktischen

Anforderungen genügen sofern nur $a < 0{,}9$ ist. Bei denselben Bedingungen gilt diese Formel auch für beliebige andere symmetrische Elektrodenanordnungen, wobei jedoch die Funktionen F_n und G_n für verschiedene Schemen in verschiedener Weise definiert werden müssen. So sind z. B. in Gl. 1. und 2. § 10 die betreffenden Ausdrücke für die Schlumbergersche Anordnung angegeben, wobei die Bedeutung der hier auftretenden Größen sich aus Abb. 6. erklärt. Für die Wennersche Anordnung sind alle diese Funktionen in Tab. 1. und 2. tabelliert, wo $\xi = MN$ dreizehn verschiedene Werte (von 0,2 bis 10,0) annimt. Für die Schlumbergersche Anordnung gelten die entsprechenden Tabellen 3. und 4, wo $l = \frac{1}{2} AB$ ist und sich von 0,3 bis zu 15,0 ändert. Als Längeneinheit dient in allen betrachteten Fällen die Tiefe des Kugelmittelpunktes unter der Erdoberfläche.

Auf Grund dieser Tabellen wurden in beiden Fällen theoretische Widerstandskurven berechnet, und zwar für die extremen Fälle $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \infty$. Die entsprechenden Zahlenwerte sind für die Wennersche Methode ($a = 0{,}4$, $0{,}5$, ... $0{,}8$) in Tab. 5. und 6, für die Schlumbergersche ($a = 0{,}2$, $0{,}3$, ... $0{,}8$) in Tab. 7. und 8. zusammengestellt. Tab. 9. bezieht sich auf die Schlumbergersche Methode für den Fall $a = 0{,}8$, $\varkappa = 2{,}0$ (verhältnismäßig schwacher Widerstandskontrast).

In § 11. werden praktische Folgerungen gezogen, von denen die wichtigsten im folgenden zusammengefasst werden können:

1. Die relativen Werte der Anomalien sind für beide betrachteten Anordnungen wesentlich größer bei $\varkappa = 0$ (leitende Kugel in schlecht leitender Umgebung) als bei $\varkappa = \infty$ (schlecht leitende Kugel in gut leitender Umgebung).

2. Bei der Schlumbergerschen Anordnung sind die Relativwerte der Anomalien wesentlich höher als bei der Wennerschen. Dafür reagiert aber diese Anordnung zugleich auch viel empfindlicher auf alle quasisphärischen Inhomogenitäten in der Oberflächenzone.

3. Im Gegensatz zur horizontalen Schichtung geben im Falle des kugelförmigen Fremdkörpers beide betrachteten Methoden ziemlich verschiedene Ergebnisse. Ein grundlegender Unterschied zeigt sich schon im Charakter der theoretischen Widerstandskurven. Während bei der Wennerschen Methode die betreffenden Kurven einen ausgesprochenen Dreischichtencharakter mit einem verhältnismäßig scharfen Maximum oder Minimum (besonders bei großen a) aufweisen, ist bei der Schlumbergerschen Anordnung ihr Verlauf sehr ähnlich dem einer typischen Zweischichtenkurve, d. h. monoton steigend oder fallend mit asymptotischer Näherung zu einem bestimmten Grenzwert. Dieser Tatbestand, der für alle Anordnungen gilt wo bei wachsender Stromelektrodenentfernung ($AB \to \infty$) die Potentialelektrodenentfernung MN endlich bleibt, erklärt sich daraus, daß F_1, G_1, G_2, G_3 und G_4 einen von Null verschiedenen Grenzwert haben. Bei Sondierungsmessungen mit geringer Potentialelektrodenentfernung ist dieser Umstand besonders zu beachten, da alle oberflächennahen Inhomogenitäten deren Dimensionen mit dieser Entfernung vergleichbar sind Anomalien hervorrufen können die bei wachsender Stromelektrodenentfernung gar nicht beseitigt werden sondern sich konstant erhalten.

4. Es muß selbst in den Extremfällen $\varkappa = 0$ bzw. $\varkappa = \infty$ bei der Schlumbergerschen Anordnung $a \geqq 0{,}5$ bzw. $a \geqq 0{,}6$, bei der Wennerschen $a \geqq 0{,}6$ bzw. $a \geqq 0{,}7$ sein damit die Relativwerte der Widerstandsanomalien zumindest $\pm$ 20 % erreichen.