VYJADRENIE DIVERGENCIE A ROTÁCIE VEKTORA DANÉHO VO VŠEOBECNÝCH KRIVOČIARYCH SÚRADNICIACH

Metodický príspevok

D. ILKOVIČ

Vo väčšine učebníc fyziky sa vyjadrenie divergencie vektorovej funkcie polohy bodu v priestore odvodzuje počítaním výtoku vektora z elementárneho hranola a vyjadrenie rotácie počítaním dráhových integrálov vektora pozdĺž orientovaných obvodov obdĺžnikov alebo kosodĺžnikov v súradnicových rovinách. Výpočet býva pritom vedený nepresne, neprehľadne a nepresvedčivo.

Domnievam sa, že je lepšie najprv dokázať invariantnosť Hamiltonovho diferenciálneho operátora ∇, napísaného už pomocou krivočiarych súradníc:

$$\nabla = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \mathbf{e}^3 \frac{\partial}{\partial u^3},$$

kde $\mathbf{e}^i$ sú vektory reciproké k základným vektorom $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ a u^i krivočiare súradnice bodu, vzhľadom na transformáciu súradníc, pojem divergencie a rotácie vektorovej funkcie zaviesť potom formálnym aplikovaním operátora ∇ na danú vektorovú funkciu, div $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, rot $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, a až nakoniec vyšetrovať názorný význam týchto odvodených funkcií.

V tomto článku uvádzam dôkaz invariantnosti Hamiltonovho operátora vzhľadom na transformáciu krivočiarych súradníc a podávam odvodenie vyjadrenia divergencie a rotácie vektorovej funkcie polohy bodu v priestore.

1. Dôkaz invariantnosti Hamiltonovho operátora vzhľadom na transformáciu krivočiarych súradníc. Nech u^1, u^2, u^3 sú krivočiare súradnice bodu v trojrozmernom euklidovskom priestore a u'^1, u'^2, u'^3 iné krivočiare súradnice, takže $u'^i = u'^i(u^1, u^2, u^3)$. Dôkaz invariantnosti Hamiltonovho operátora $\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, kde $\mathbf{e}^i$ sú vektory reciproké k základným vektorom $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, vzhľadom na transformáciu krivočiarych súradníc prevedieme tak, že výraz $\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ prevedieme na tvar $\nabla' = \mathbf{e}'^i \frac{\partial}{\partial u'^i}$.

Je

$$\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \mathbf{e}^i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u'^j},$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'^k} \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} = c_i^k \mathbf{e}'_k,$$

kde $c_i^k = \dfrac{\partial u'^k}{\partial u^i}$. Preto je $\mathbf{e}^i = c'^i_k \mathbf{e}'^k$,

kde c'^i_k sú redukované minory determinantu koeficientov c_i^k, lebo reciproké vektory sa transformujú kontravariantne.

Je teda skutočne

$$\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \mathbf{e}^i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u'^j} = c'^i_k \mathbf{e}'^k c_i^j \frac{\partial}{\partial u'^j} = \mathbf{e}'^k \delta_k^j \frac{\partial}{\partial u'^j} = \mathbf{e}'^j \frac{\partial}{\partial u'^j} = \nabla',$$

keďže je $c'^i_k c_i^j = \delta_k^j$.

Vo zvláštnom prípade je však $\nabla = \mathbf{i} \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \dfrac{\partial}{\partial z}$, ak súradnice x, y, z sú kartézske súradnice vzťahujúce sa na pravouhlý systém jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

2. *Výpočet div* $\mathbf{v}$. Nech je $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, kde je $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$. Potom

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot v^i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^s \frac{\partial}{\partial u^s}\right) \cdot v^i \mathbf{e}_i,$$

alebo keďže je $\mathbf{e}^1 = \dfrac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]} = \dfrac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\pm \sqrt{g}}$ atď., kde g je determinant fundamentálnych metrických veličín $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$,

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\pm\sqrt{g}} \left[(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial u^1} + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial u^2} + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial u^3} \right] \cdot v^i \mathbf{e}_i =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{g}} \left[(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \frac{\partial v^i}{\partial u^1} + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \frac{\partial v^i}{\partial u^2} + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \frac{\partial v^i}{\partial u^3} \right] \cdot \mathbf{e}_i +$$

$$+ \frac{1}{\pm\sqrt{g}} v^i \left[(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^1} + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u_2} + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^3} \right].$$

Keďže ďalej výraz $(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$ sa nerovná nule, len ak všetky tri v ňom vystupujúce indexy sú rôzne a okrem toho je

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^s} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^s \partial u^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^s} = \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial u^i},$$

je tiež

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial v^i}{\partial u^i} \right) + \frac{v^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (v^i \sqrt{g})}{\partial u^i}. \tag{1}$$

3. *Výpočet rot* $\mathbf{v}$. Nech je $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$, kde $\mathbf{e}^i$ sú vektory k vektorom $\mathbf{e}_s$ reciproké, potom je:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_i \mathbf{e}^i) = (\nabla v_i) \times \mathbf{e}^i + v_i (\nabla \times \mathbf{e}^i).$$

Dokážeme najprv, že je rot $\mathbf{e}^s = \nabla \times \mathbf{e}^s = 0$. Dôkaz vykonáme tak, že dokážeme, že tenzor grad $\nabla^s = \mathbf{c}^s$ je symetrický, lebo potom jeho vektor $\nabla \times \mathbf{e}^s$ sa nevyhnutne rovná nule. Za tým účelom nájdeme vyjadrenie kovariantnej súradnice t^s_{ij} tenzora $\nabla \mathbf{e}^s$,

$$t^s_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{e}^s) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial u^k} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial u^i} \cdot \mathbf{e}_j.$$

Pretože je $\mathbf{e}^s \cdot \mathbf{e}_j =$ konšt., je

$$\frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial u^i} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} = 0,$$

a

$$t^s_{ij} = -\mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} = -\mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j} = t^s_{ji}.$$

Tenzor $\nabla \mathbf{e}^s$ je teda symetrický, čo bolo treba dokázať.

Rotácia vektora $\mathbf{v}$ je teda len

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\nabla v_i) \times \mathbf{e}^i =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{g}} \left[(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \frac{\partial v_i}{\partial u^1} + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \frac{\partial v_i}{\partial u^2} + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \frac{\partial v_i}{\partial u^3} \right] \times \mathbf{e}^i =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial u^2} - \frac{\partial v_2}{\partial u^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u^3} - \frac{\partial v_3}{\partial u^1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2} \right) \mathbf{e}_3 \right]. \tag{2}$$

4. *Výpočet Δ S.* Pre úplnosť uvedieme ešte vyjadrenie Laplaceovej funkcie skaláru daného taktiež v sústave krivočiarych súradníc. Je

$$\operatorname{grad} S = \nabla S = \mathbf{e}^j \frac{\partial S}{\partial u^j} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \frac{\partial S}{\partial u^j} = \mathbf{e}_i g^{ij} \frac{\partial S}{\partial u^j},$$

kde $\mathbf{e}_i \mathbf{e}^i$ je tenzor identity, a teda podľa vzorca (1)

$$\nabla S = \operatorname{div} \operatorname{grad} S = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial S}{\partial u^j} \right). \tag{3}$$

Došlo 10. XI. 1953.

Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave