# POZNÁMKA K REPREZENTÁCII SVÄZU POMOCOU ROZKLADOV MNOŽINY

M. KOLIBIAR

Nech $S$ je sväz definovaný na množine $M$. Sväzové operácie označíme znakmi $\cap$, $\cup$. Ak $R$, $R'$ sú rozklady množiny $M$, $R \leqq R'$ bude značiť, že rozklad $R$ je zjemnením rozkladu $R'$. Znakom $R \cap R'$ ($R \cup R'$) označíme najväčšie spoločné zjemnenie (najmenší spoločný zákryt) rozkladov $R$, $R'$.[1] Množina všetkých rozkladov množiny $M$ s operáciami najväčšieho spoločného zjemnenia a najmenšieho spoločného zákrytu je úplný sväz, ktorý označíme $\mathfrak{S}$. Ak prvky $x$, $y \in M$ patria do tej istej triedy rozkladu $R$ množiny $M$, budeme písať $x \equiv y\ (R)$.

V tejto poznámke ukážeme, že sväz $\mathfrak{S}$ obsahuje podmnožinu $X$, ktorá je izomorfná so sväzom $S$ vzhľadom na *jednu* sväzovú operáciu. Ak sväz $S$ je distributívny, podmnožina $X$ tvorí podsväz sväzu $\mathfrak{S}$, izomorfný so sväzom $S$ (vzhľadom na *obe* operácie).

**1.** Nech $a \in S$. Pre prvky $x$, $y \in S$ položme $x \equiv y$ vtedy a len vtedy, keď $a \cup x = a \cup y$. Relácia $\equiv$ je zrejme reflexívna, symetrická a tranzitívna, definuje teda rozklad množiny $M$. Tento rozklad označíme $R^a$. Množinu všetkých rozkladov $R^a$, kde $a \in S$, označíme $X$.

Vzťah $a \equiv x\ (R^a)$ platí vtedy a len vtedy, keď $a = a \cup a = a \cup x$, t. j. $x \leqq a$. Z toho vyplýva, že jednou triedou rozkladu $R^a$ je hlavný ideál skladajúci sa z prvkov $x \leqq a$.

**1.1.** *Pre* $a, b \in S$ je $R^a \cup R^b = R^{a \cup b}$.

D ô k a z. Nech pre prvky $x$, $y \in S$ platí $x \equiv y\ (R^a)$. Potom $a \cup x = a \cup y$. Odtiaľ vyplýva $(a \cup b) \cup x = (a \cup b) \cup y$, t. j. $x \equiv y\ (R^{a \cup b})$. Teda $R^a \leqq R^{a \cup b}$. Podobne sa dokáže $R^b \leqq R^{a \cup b}$. Odtiaľ vyplýva $R^a \cup R^b \leqq R^{a \cup b}$.

**2.** Nech pre prvky $x$, $y \in S$ platí $x \equiv y\ (R^{a \cup b})$. Potom $a \cup b \cup x = a \cup b \cup y$. Z rovností $a \cup x = a \cup (a \cup x)$, $b \cup (a \cup x) = b \cup (a \cup b \cup x) = b \cup (a \cup b \cup y)$, $a \cup (a \cup b \cup y) = a \cup (b \cup y)$, $b \cup (b \cup y) = b \cup y$ vyplýva po rade: $x \equiv a \cup x\ (R^a)$, $a \cup x \equiv a \cup b \cup y\ (R^b)$, $a \cup b \cup y \equiv b \cup y\ (R^a)$, $b \cup y \equiv y\ (R^b)$. Odtiaľ vyplýva $x \equiv y\ (R^a \cup R^b)$. Teda $R^{a \cup b} \leqq R^a \cup R^b$ a dôkaz je ukončený.

[1] Názvy zjemnenie, najmenší spoločný zákryt a najväčšie spoločné zjemnenie rozkladov používame v zhode s prácou [1].

**1.2.** Uvažujme o zobrazení $\varphi$ množiny $M$ na množinu $X$, ktoré prvku $a \in M$ priraďuje prvok $R^a \in X$. Toto zobrazenie je prosté. Ak totiž $a$, $b$ sú dva rozdielne prvky sväzu $S$, jednou triedou rozkladu $R^a$ je množina prvkov $X$ sväzu $S$, pre ktoré platí $x \leqq a$, jednou triedou rozkladu $R^b$ je množina prvkov $x$, pre ktoré platí $x \leqq b$. Tieto triedy nie sú disjunktné (obsahujú prvok $a \cap b$) a sú zrejme rozdielne, teda rozklady $R^a$, $R^b$ sú rozdielne.

Z 1.1 vyplýva, že zobrazenie $\varphi$ je vzhľadom na operáciu $\cup$ izomorfizmus.

**2.** Nech $S$ je *distributívny* sväz.

**2.1.** *Pre* $a, b \in S$ platí $R^a \cap R^b = R^{a \cap b}$.

D ô k a z. 1. Nech $x \equiv y\ (R^{a\cap b})\ (x, y \in S)$. Potom $(a \cap b) \cup x = (a \cap b) \cup y$. Odtiaľ vyplýva $a \cup x = a \cup y$, $b \cup x = b \cup y$, t. j. $x \equiv y\ (R^a)$, $x \equiv y\ (R^b)$, teda $x \equiv y\ (R^a \cap R^b)$. Platí teda $R^{a\cap b} \leqq R^a \cap R^b$.

2. Nech $x \equiv y\ (R^a \cap R^b)$. Potom $x \equiv y\ (R^a)$, $x \equiv y\ (R^b)$, t. j. $a \cup x = a \cup y$, $b \cup x = b \cup y$. Odtiaľ vyplýva $(a \cap b) \cup x = (a \cup x) \cap (b \cup x) = (a \cup y) \cap (b \cup y) = (a \cap b) \cup y$, t. j. $x \equiv y\ (R^{a\cap b})$. Teda $R^a \cap R^b \leqq R^{a\cap b}$ a tvrdenie je dokázané.

**2.2.** Z 1.1 a 2.1 vyplýva, že ak $S$ je distributívny sväz, platí $R^a \cup R^b = R^{a\cup b}$, $R^a \cap R^b = R^{a\cap b}$. To značí, že množina $X$ je podsväz sväzu $\mathfrak{S}$, izomorfný so sväzom $S$.

*Došlo 25. II. 1954.*

*Katedra matematiky*
*Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity*
*v Bratislave*

## LITERATÚRA

1. O. B o r ů v k a, *Theorie rozkladů v množině.* Spisy vydávané Prírodovedeckou fakultou univerzity v Brne, 278 (1946).

## ПРИМЕЧАНИЕ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ СТРУКТУРЫ ПУТЕМ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

М. КОЛИБЯР, БРАТИСЛАВА

### Выводы

Пусть $S$-структура, определенная на множестве $M$. С каждым элементом $a \in S$ поставим в соответствие разбиение $R^a$ множества $M$, определенное этим образом: Элементы $x$, $y \in S$ принадлежать в тотже самый класс разбиения $R^a$ тогда и только тогда, если $a \cup x = a \cup y$.

Содержанием примечания является доказательство положений:

Подмножество $X$ структуры $\mathfrak{S}$ всех разбиений множества $M$, состоящее из разбиений $R^a$ $(a \in S)$, является изоморфным с структурой $S$ имея ввиду одную структурную операцию. Если структура $S$ дистрибутивная, множество $X$ образует подструктуру структуры $\mathfrak{S}$, изоморфную с структурой $S$.