# RIEŠENIE TEPELNÝCH POMEROV VO VALCI PRI NESPOJITÝCH OKRAJOVÝCH PODMIENKACH

I. NÁTER

Diferenciálna rovnica vedenia tepla v izotropnom a v homogénnom prostredí má tvar:

$$\frac{l}{\varepsilon c}\left(\Delta\vartheta + \frac{Q_0}{l}\right) = \frac{\partial\vartheta}{\partial t}, \tag{1}$$

kde význam jednotlivých symbolov je tento:

$l$ koeficient tepelnej vodivosti daného prostredia,
$\varepsilon$ špecifická hmota daného prostredia,
$c$ špecifické teplo daného prostredia,
$\vartheta$ teplota,
$Q_0$ množstvo tepla, ktoré sa vyvinie v objemovej jednotke uvažovaného prostredia za časovú jednotku,
$t$ čas.

Vo svojom príspevku obmedzím sa len na stacionárne stavy, pri ktorých ani jedna veličina nezávisí od času. V tomto prípade je rovnica (1) zjednodušená takto:

$$\Delta\vartheta + \frac{Q_0}{l} = 0. \tag{1a}$$

K tejto diferenciálnej rovnici pristupujú ešte okrajové podmienky, teplota na hraniciach uvažovaného prostredia alebo v miestach, kde sa dve prostredia vzájomne dotýkajú.

Dá sa dokázať, že problém vedenia tepla pri predpísaných okrajových podmienkach (pri stacionárnom stave) je diferenciálnou rovnicou (1a) jednoznačne určený, t. j. že neexistujú dve rozličné riešenia $\vartheta_1$ a $\vartheta_2$, ktoré by súčasne vyhovovali okrajovým podmienkam a ktoré by spĺňali diferenciálnu rovnicu (1a). (S c h a e f e r, *Einführung in die theoretische Physik II.*)

Uvediem riešenie diferenciálnej rovnice vedenia tepla pre valec, keď sa na jeho povrchu mení teplota nespojite.



## I

Hľadajme riešenie tohto problému: Valec s výškou $v$ a s polomerom $r_0$ má na svojom povrchu v jednej polovici teplotu $\vartheta_1$ v druhej $\vartheta_2$. Vo valci samom teplo nevzniká, takže v rovnici (1a) je $Q_0 = 0$. Aké bude rozloženie teploty vo valci pri stacionárnom stave? Súradnicový systém uložme tak, aby os $x$ bola totožná s osou valca a kolmé podstavy valca aby boli v rovinách $x = \pm\frac{v}{2}$. Pri takto stavanom probléme bude teplota zrejme funkciou len dvoch premenných, a to $x$ a $r = +\sqrt{y^2+z^2}$. Máme teda riešiť diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = 0. \tag{1b}$$

s okrajovými podmienkami:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a) pre } x = -\frac{v}{2} \text{ a } 0 \leqq r \leqq r_0 & & \text{má byť } \vartheta = \vartheta_1 \\ \text{b) pre } r = r_0 & \text{a } -\frac{v}{2} \leqq x < 0 & \text{má byť } \vartheta = \vartheta_1 \\ \text{c) pre } x = +\frac{v}{2} \text{ a } 0 \leqq r \leqq r_0 & & \text{má byť } \vartheta = \vartheta_2 \\ \text{d) pre } r = r_0 & \text{a } 0 < x \leqq +\frac{v}{2} & \text{má byť } \vartheta = \vartheta_2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ak hľadáme riešenie rovnice (1b) v tvare súčinu dvoch funkcií $\vartheta = X(x) \,.\, R(r)$. nájdeme toto partikulárne riešenie:

$$\vartheta = (A\,e^{-\lambda x} + B\,e^{+\lambda x})\,J_0(\lambda r) + C, \tag{3}$$

v ktorom $I_0$ je Besselova funkcia nultého radu (F r a n k — v o n  M i s e s, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I*). Pomocou vhodne volených konštánt $A$, $B$, $C$, $\lambda$ môžeme toto riešenie prispôsobiť okrajovým podmienkam.

V reze $x = 0$ bude teplota nejakou zatiaľ neznámou funkciou premennej $r$. Označme ju $\Phi(r)$ a hľadajme riešenie uvedeného problému pre $x \geqq 0$.

Okrajovú podmienku (2c) splníme, ak zvolíme:

$$C = \vartheta_2 \quad \text{a} \quad \left(A\,e^{-\lambda\frac{v}{2}} + B\,e^{+\lambda\frac{v}{2}}\right) = 0,$$

teda

$$B = -A\,\frac{e^{-\lambda\frac{v}{2}}}{e^{+\lambda\frac{v}{2}}} = -A\,e^{-\lambda v}.$$

Ak v (3) ďalej zvolíme $\lambda = \frac{\xi_\nu}{r_0}$, kde $\xi_\nu$ je nulový bod funkcie $J_0(\xi)$, splníme aj okrajovú podmienku (2d). Nech je $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots$. Všeobecné riešenie rovnice (1c) môžeme potom zostaviť takto:

$$\vartheta = \vartheta_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left[ e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{+\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)} \right] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right).$$

V reze $x = 0$ má však byť $\vartheta = \Phi(r)$ pre $0 \leq r < r_0$, teda

$$\Phi(r) - \vartheta_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left[ 1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v} \right] . J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right).$$

V poslednej rovnici použime substitúciu $u = \frac{r}{r_0}$ a označme

$$A_\nu \left[ 1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v} \right] = A'_\nu .$$

Dostávame tak rovnicu

$$\Phi(r) - \vartheta_2 = \sum A'_\nu . J_0(\xi_\nu u), \tag{4}$$

pričom $0 \leq u < 1$.

Funkcie $\sqrt{u} . J_0(\xi_1 u)$, $\sqrt{u} . J_0(\xi_2 u)$, $\sqrt{u} J_0(\xi_3 u)$, ... tvoria však v intervale $0 \leq u < 1$ ortogonálny systém a pomocou nich môžeme ľubovoľnú funkciu $\sqrt{u} . f(u)$ (ak táto vyhovuje Dirichletovej podmienke) v tomto intervale rozvinúť do nekonečného radu. Platia totiž vzťahy

$$\int_0^1 u J_0(\xi_m u) . J_0(\xi_n u) \, du = 0$$

pre $m \neq n$,

$$\int_0^1 u [J_0(\xi_\nu u)]^2 \, du = \frac{1}{2} [J_1(\xi_\nu)]^2 ,$$

kde $J_1$ je Besselova funkcia prvého radu.

Známym spôsobom môžeme teraz v (4) určiť koeficienty $A'_\nu$:

$$A'_\nu = \frac{2}{r_0^2 [J_1(\xi_\nu)]^2} \int_0^{r_0} r [\Phi(r) - \vartheta_2] . J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr.$$

Riešenie rovnice (1c) pre $0 \leq x \leq +\frac{v}{2}$ po úprave dostaneme potom v tvare:

$$\vartheta = \vartheta^{(2)} = \vartheta_2 + \frac{2}{r_0^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) [J_1(\xi_\nu)]^2} \left[ e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{+\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)} \right] \int_0^{r_0} r [\Phi(r) - \vartheta_2] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr. \tag{5a}$$



Podobným spôsobom (alebo transformáciou $x = -x$) pre $-\frac{v}{2} \leq x \leq 0$ dostaneme riešenie:

$$\vartheta = \vartheta^{(1)} = \vartheta_1 + \frac{2}{r_0^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) [J_1(\xi_\nu)]^2} \left[ e^{+\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x+v)} \right] \int_0^{r_0} r [\Phi(r) - \vartheta_1] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr. \tag{5b}$$

Ostáva ešte určiť funkciu $\Phi(r)$ tak, aby normálne zložky hustoty tepelného prúdu po oboch stranách roviny $x = 0$ boli rovnaké. Pre $x = 0$ má byť:

$$\frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial x},$$

odkiaľ dostávame podmienku:

$$\frac{2}{r_0^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) [J_1(\xi_\nu)]^2} \left[ 1 + e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v} \right] \int_0^{r_0} r [\Phi(r) - \vartheta_1] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr =$$

$$= -\frac{2}{r_0^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) [J_1(\xi_\nu)]^2} \left[ 1 + e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v} \right] \int_0^{r_0} r [\Phi(r) - \vartheta_2] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr,$$

alebo po anulovaní

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{[J_1(\xi_\nu)]^2} \int_0^{r_0} r [2\Phi(r) - (\vartheta_1 + \vartheta_2)] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right) dr = 0.$$

Túto podmienku splníme pre každé $r < r_0$, ak zvolíme:

$$\Phi(r) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}.$$

V riešeniach (5a) a (5b) môžeme potom urobiť aj integráciu, ak použijeme vzťahy:

$$x J_0(x) = \frac{d}{dx} [x J_1(x)]; \qquad J_1(0) = 0.$$

(F r a n k—v o n  M i s e s, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I.*)

Riešenie nášho problému dostaneme tak v tomto konečnom tvare:

pre $-\frac{v}{2} \leqq x \leqq 0$:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = \vartheta^{(1)} &= \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\xi_\nu\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) J_1(\xi_\nu)} \left[e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x+v)}\right]; \\ &\text{pre } 0 \leqq x \leqq \frac{v}{2}: \\ \vartheta = \vartheta^{(2)} &= \vartheta_2 + (\vartheta_1 - \vartheta_2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\xi_\nu\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) J_1(\xi_\nu)} \left[e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Toto riešenie môžeme ešte zovšeobecniť. Valec, v ktorom teplotu vyšetrujeme, nech je zložený z dvoch kusov z rozličného materiálu. Koeficient tepelnej vodivosti pre $x < 0$ nech je $l_1$, pre $x > 0$ $l_2$. Pri určovaní funkcie $\Phi(r)$ musíme potom vyjsť z podmienky:

pre $x = 0$:

$$l_1 \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial x} = l_2 \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial x}.$$

Funkcia $\Phi(r)$ potom bude:

$$\Phi(r) = \frac{l_1 \vartheta_1 + l_2 \vartheta_2}{l_1 + l_2}.$$

Riešenie takéhoto problému vedie k výsledku:

pre $-\frac{v}{2} \leqq x \leqq 0$:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = \vartheta^{(1)} &= \vartheta_1 + \frac{2 l_2 (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{l_1 + l_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\xi_\nu\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) J_1(\xi_\nu)} \left[e^{\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x+v)}\right]; \\ &\text{pre } 0 \leqq x \leqq \frac{v}{2}: \\ \vartheta = \vartheta^{(2)} &= \vartheta_2 + \frac{2 l_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{l_1 + l_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0} r\right)}{\xi_\nu\left(1 - e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} v}\right) J_1(\xi_\nu)} \left[e^{-\frac{\xi_\nu}{r_0} x} - e^{\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Tieto riešenia majú nevýhodu v tom, že teplota ako funkcia polohy je v nich vyjadrená nekonečnými radmi. Tieto rady však rovnomerne konvergujú. Pri konkrétnych výpočtoch môžeme sa obmedziť na niekoľko prvých členov.



II

V druhej časti budeme riešiť podobný problém ako v prvej, budeme však predpokladať, že vo valci samom v každej objemovej jednotke sa za časovú jednotku vyvinie množstvo tepla $Q_0$. Tak je to napr. v drôte, ktorým tečie elektrický prúd.

Najprv uvediem riešenie tohto jednoduchého prípadu: Nekonečne dlhý valec z homogénneho materiálu s polomerom $r_0$ má na svojom povrchu trvale teplotu rovnú $\vartheta_1$. V každej jeho objemovej jednotke sa za časovú jednotku vyvinie teplo $Q_0$. Pri stacionárnom stave bude teplota funkciou len premennej $r = +\sqrt{y^2 + z^2}$ (os $x$ súradnicového systému sme zasa stotožnili s osou valca). Máme teda riešiť diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} + \frac{Q_0}{l} = 0 \quad (8)$$

s okrajovou podmienkou:

$$\text{pre } r = r_0 \text{ má byť } \vartheta = \vartheta_1. \quad (9)$$

Všeobecné riešenie rovnice (8) je:

$$\vartheta = -\frac{Q_0}{4l} r^2 + B \ln r + C. \quad (10)$$

V našom prípade musí byť $B = 0$, lebo pre $r = 0$ má zostať $\vartheta$ konečné. Aby sme splnili okrajovú podmienku (9), musíme ďalej voliť:

$$C = \vartheta_1 + \frac{Q_0}{4l} r_0^2.$$

Riešením nášho problému bude potom funkcia

$$\vartheta = \vartheta_1 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2). \quad (11)$$

(F r a n k—v o n M i s e s, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik II.*)

Uvedený výsledok použijeme pri riešení zložitejšieho problému: Vo valci s výškou $v$ a s polomerom $r_0$ vznikne v každej objemovej jednotke za časovú jednotku teplo $Q_0$. Súradnicový systém voľme tak, ako v prvej časti. Okrajové podmienky nech sú:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) pre } r = r_0 \text{ a } -\frac{v}{2} \leqq x \leqq 0 \text{ nech je } \vartheta = \vartheta_1 \\ &\text{b) pre } x = -\frac{v}{2} \text{ a } r \leqq r_0 \text{ nech je } \vartheta = \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \vartheta_1 \\ &\text{c) pre } x = +\frac{v}{2} \text{ a } r \leqq r_0 \text{ nech je } \vartheta = \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \vartheta_2 \\ &\text{d) pre } r = r_0 \text{ a } 0 \leqq x \leqq \frac{v}{2} \text{ nech je } \vartheta = \vartheta_2 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

V základniach $x = \pm \frac{v}{2}$ sme predpísali takú teplotu, aká by sa v nich ustálila, keby bolo $v = \infty$.

Máme riešiť diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{Q_0}{l} = 0 \tag{13}$$

a jej všeobecné riešenie prispôsobiť okrajovým podmienkam (12). Rovnici (13) bude iste vyhovovať funkcia:

$$\vartheta = \vartheta' + \vartheta'',$$

kde $\vartheta'$ je nejaké riešenie diferenciálnej rovnice (1b) a $\vartheta''$ zasa nejaké riešenie diferenciálnej rovnice (8). Podľa (3) a (10) môžeme hneď napísať takéto riešenie:

$$\vartheta = (A\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + B\,\mathrm{e}^{+\lambda x})J_0(\lambda r) - \frac{Q_0}{4l}r^2 + C \ln r + D. \tag{14}$$

Ako v prvej časti položme aj teraz teplotu v reze $x = 0$ rovnú neznámej funkcii $\Phi(r)$ a hľadajme riešenie pre $0 \leqq x \leqq \frac{v}{2}$. Pre $r = 0$ má byť $\vartheta$ konečné, musí teda byť $C = 0$. Podmienku (12d) splníme, ak zvolíme:

$$D = \vartheta_2 + \frac{Q_0}{4l}r_0^2 \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{\xi_\nu}{r_0}.$$

Konečne voľbou $B = -A\,\mathrm{e}^{-\lambda v}$ vyhovieme podmienke (12c). Vo všeobecnom riešení

$$\vartheta = \vartheta_2 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}x} - \mathrm{e}^{\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)}\right] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right)$$

máme ešte určiť koeficienty $A_\nu$ tak, aby pre $x = 0$ a $0 \leqq r < r_0$ bolo $\vartheta = \Phi(r)$. Podľa (5a) a (5b) dostávame:

pre $-\frac{v}{2} \leqq x \leqq 0$:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta = \vartheta^{(1)} &= \vartheta_1 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \frac{2}{r_0^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right)}{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}v}\right)[J_1(\xi_\nu)]^2}\left[\mathrm{e}^{\frac{\xi_\nu}{r_0}x} - \right.\\
&\left. - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x+v)}\right] \int_0^{r_0} r\left[\Phi(r) - \vartheta_1 - \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2)\right] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right) \mathrm{d}r; \\
&\text{pre } 0 \leqq x \leqq \frac{v}{2}: \\
\vartheta = \vartheta^{(2)} &= \vartheta_2 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \frac{2}{r_0^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right)}{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}v}\right)[J_1(\xi_\nu)]^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}x} - \right.\\
&\left. - \mathrm{e}^{\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)}\right] \int_0^{r_0} r\left[\Phi(r) - \vartheta_2 - \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2)\right] J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right) \mathrm{d}r.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$



Nakoniec zasa určíme funkciu $\Phi(r)$ tak, aby pre $x = 0$ bolo

$$\frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial x}.$$

Po vykonaní derivácií dostaneme podmienku:

$$2\left[\Phi(r) - \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2)\right] - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0.$$

Teplotu v reze $x = 0$ určuje teda funkcia:

$$\Phi(r) = \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}.$$

Ak ju v tomto tvare dosadíme do (15) a zasa ako v prvej časti vykonáme integráciu, dostaneme toto konečné riešenie nášho problému:

pre $-\frac{v}{2} \leqq x \leqq 0$:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta = \vartheta^{(1)} &= \vartheta_1 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + (\vartheta_2 - \vartheta_1)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right)}{\xi_\nu\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}v}\right)J_1(\xi_\nu)}\left[\mathrm{e}^{\frac{\xi_\nu}{r_0}x} - \right.\\
&\left. - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}(x+v)}\right]; \\
&\text{pre } 0 \leqq x \leqq \frac{v}{2}: \\
\vartheta = \vartheta^{(2)} &= \vartheta_2 + \frac{Q_0}{4l}(r_0^2 - r^2) + (\vartheta_1 - \vartheta_2)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_\nu}{r_0}r\right)}{\xi_\nu\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}v}\right)J_1(\xi_\nu)}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi_\nu}{r_0}x} - \right.\\
&\left. - \mathrm{e}^{\frac{\xi_\nu}{r_0}(x-v)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Nakoniec treba ešte poznamenať, že riešenie (16) by sa zasa dalo ľahko zovšeobecniť pre ten prípad, že valec je zložený z dvoch kusov z rozličného materiálu. Toto riešenie by sa však nedalo upraviť na taký prehľadný tvar, lebo by sme v ňom nemohli vykonať integráciu.

*Došlo 15. II. 1954.*

*Katedra fyziky*
*Slovenskej vysokej školy technickej*
*v Bratislave*

LITERATÚRA

1. C. Schaefer, *Einführung in die theoretische Physik II.*
2. Frank—von Mises, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I, II.*
3. V. Stěpanov, *Kurs diferenciálních rovnic*, Praha 1950.

# РЕШЕНИЕ ТЕПЛОТНОГО РЕЖИМА В ЦИЛИНДРЕ ПРИ РАЗРЫВНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

ИВАН НАТЕР, БРАТИСЛАВА


## Выводы

В статье дано решение дифференциального уравнения распространения тепла при стационарном режиме в цилиндре, если на его поверхности в одной половинке температура $\vartheta_1$, а во второй — $\vartheta_2$. В обоих половинках температура определена самостоятельно, именно так, чтобы в общем сечении соприкосновения являлась одинаковой и равной функции $\Phi$ ($r$). Эта функция наконец определена так, чтобы по обоим сторонам рассматриваемого сечения нормальные компоненты плотности теплового тока являлись одинаковыми. В первой части рассматривается цилиндр, в котором тепло не образуется. В второй части дано более общее решение, именно если в цилиндре образуется теплота. Результатом в обоих является разложение температуры в равномерно сходящийся бесконечный ряд с применением Бесселевых функций.