EXPLICITNÉ RIEŠENIE POHYBU SFÉRICKÉHO KYVADLA POMOCOU JACOBIHO TRANSCENDENT

J. CHRAPAN

1. ROVNICE POHYBU

Pohyb hmotného bodu viazaného na hladkú guľovú plochu v homogénnom silovom poli predstavuje sférické kyvadlo. V cylindrických súradniciach $(r;\ \varphi;\ z)$ je rovnica väzby

$$r = \sqrt{l^2 - z^2} \equiv f(z). \tag{1}$$

kde l je polomer guľovej plochy.

Polohu hmotného bodu určujú vzťahy:

$$\begin{aligned} x &= f(z) \,.\, \cos\varphi; \\ y &= f(z) \,.\, \sin\varphi; \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2}$$

Pohyb má dva stupne voľnosti, dané aplikátou z a polárnym uhlom φ. Ak os z orientujeme proti intenzite $\bar{g}$ silového poľa, kinetický potenciál L hmotného bodu hmoty m je:

$$L = \tfrac{1}{2} m \{[1 + f'(z)^2] \,.\, \dot{z}^2 + f(z)^2 \,.\, \dot{\varphi}^2\} - mgz,$$

kde je:

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Homogénne silové pole je konzervatívne, preto prvý integrál Lagrangeových pohybových rovníc pre sférické kyvadlo je integrál energie

$$\frac{1}{2} m \{[1 + f'(z)^2] \,.\, \dot{z}^2 + f(z)^2 \,.\, \dot{\varphi}^2\} + mgz = c_1'. \tag{3}$$

Druhý integrál týchto rovníc vychádza vzhľadom na to, že súradnica φ je cyklická, v tvare:

$$m \,.\, f(z)^2 \,.\, \dot{\varphi} = c_2'. \tag{4}$$

2. DIFERENCIÁLNA ROVNICA APLIKÁTY

Zo vzťahov (3), (4) a (1) dostávame diferenciálnu rovnicu:

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}\left[(l^2 - z^2)\cdot\left(\frac{c_1}{g} - z\right) - \frac{c_2^2}{2g}\right], \tag{5}$$

v ktorej je:

$$c_1 = \frac{c_1'}{m}; \qquad c_2 = \frac{c_2'}{m}.$$

Na pravej strane rovnice (5) je kubický polynóm; jeho nulové body udávajú abscisy priesečníkov kubickej paraboly

$$y = (l^2 - z^2)\left(\frac{c_1}{g} - z\right)$$

s priamkou

$$y = \frac{c_2^2}{2g}.$$

Označme ich

$$z_2 < z_1 < z_3.$$

Takto môžeme písať:

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}(z_1 - z)(z - z_2)(z_3 - z). \tag{6}$$

3. ROZBOR KUBICKEJ ROVNICE POHYBU

Pretože pre reálny pohyb musí byť:

$$\dot{z}^2 \geqq 0,$$

hodnoty aplikáty z ležia v intervale

$$z_2 \leqq z \leqq z_1.$$

Nulové body kubickej paraboly

$$y = (l^2 - z^2)\left(\frac{c_1}{g} - z\right)$$

sú totiž

$$-l < \frac{c_1}{g} < l;$$

súčasne je:

$$z_3 > l.$$

Pre jej priebeh dostaneme:

$$y' = 3z^2 - \frac{2c_1 z}{g} - l^2 = 0,$$

z čoho pre extrémne hodnoty musí byť:

$$(z_e)_{12} = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{3g}.$$

Ďalej máme:

$$[y'']_{z=z_e} = 6z_e - \frac{2c_1}{g} = \pm\frac{2\sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{g}.$$

Pre maximum platí záporné znamienko, kedy hodnota aplikáty je

$$z_{\max} = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{3g} < 0,$$

takže maximum leží v intervale

$$-l < z_{\max} < \frac{c_1}{g}.$$

Keďže poradnice priamky

$$y = \frac{c_2^2}{2g}$$

sú kladné, maximum výrazu (5) leží medzi z_2 a z_1, v dôsledku čoho sa pre reálny pohyb menia hodnoty súradnice z v intervale

$$z_2 \leqq z \leqq z_1,$$

v ktorom je:

$$z_2 < 0. \tag{7}$$

Základné symetrické funkcie koreňov kubickej rovnice $\dot{z}^2 = 0$ sú:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= \frac{c_1}{g}; \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 &= -l^2; \\ z_1z_2z_3 &= \frac{c_2^2}{2g} - l^2\frac{c_1}{g}. \end{aligned} \tag{8}$$

Z nich dostávame vzťahy:

$$\begin{aligned} (l + z_1)(l + z_2)(l + z_3) = (l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l) &= \frac{c_2^2}{2g} = \\ = -(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)&; \\ (l + z_1)(l + z_2) = -(z_1 + z_2)(z_3 - l)&; \\ (l - z_1)(l - z_2) = -(z_1 + z_2)(z_3 + l)&; \\ (l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2) = [-(z_1 + z_2)]^2(z_3^2 - l^2)&. \end{aligned} \tag{9}$$

Z druhej relácie (8) vychádza:

$$z_3 = -\frac{z_1z_2 + l^2}{z_1 + z_2}. \tag{10}$$

Pretože je:

$$z_3 > l,$$

podľa (10) musí byť:

$$z_1 + z_2 < 0,$$

resp.

$$z_1 < -z_2.$$

Vzhľadom na reláciu

$$z_1 > z_2$$

máme:

$$z_2 < z_1 < -z_2,$$

t. j.

$$|z_1| < |z_2|. \tag{11}$$

4. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE APLIKÁTY

Do diferenciálnej rovnice (6) zaveďme substitúciu

$$z_1 - z = (z_1 - z_2)\,.\,\xi^2. \tag{12}$$

Pre $\xi = 0$ je $z = z_1$; pre $\xi = 1$ je $z = z_2$. Pomocou (12) utvorme výrazy:

$$z - z_2 = (z_1 - z_2) - (z_1 - z) = (z_1 - z_2) - (z_1 - z_2)\,.\,\xi^2 = \\ = (z_1 - z_2)(1 - \xi^2);$$

$$z_3 - z = (z_3 - z_1) + (z_1 - z) = (z_3 - z_1) + (z_1 - z_2)\,.\,\xi^2 = \\ = (z_3 - z_1)\,.\left[1 + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1}\,.\,\xi^2\right].$$

Na základe nich je rovnica (6) s použitím (12)

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}(z_1 - z_2)^2\,.\,(z_3 - z_1)\,.\,\xi^2\,.\,(1 - \xi^2)\,.\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1}\,.\,\xi^2\right).$$

Derivovaním výrazu (12) vychádza:

$$-\dot{z} = (z_1 - z_2)\,.\,2\,.\,\xi\,.\,\dot{\xi}.$$

Podľa odvodených výsledkov je:

$$\dot{\xi}^2 = \frac{g}{2l^2}(z_3 - z_1)(1 - \xi^2)(1 - \varkappa^2\xi^2),$$

keď sme zaviedli označenie:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = -\varkappa^2.$$

Ďalšou úpravou máme:

$$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)}\cdot dt = \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \varkappa^2\xi^2)}}.$$

Tento výraz je Legendreov eliptický diferenciál, z ktorého vyplýva:

$$\xi = sn\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)}\,.\,t;\ \varkappa\right].$$

Modul $\varkappa$ je imaginárny

$$\varkappa = i\,\frac{\sqrt{z_1 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_1}}. \tag{13}$$

Na základe substitúcie (12) je:

$$z = z_1 - (z_1 - z_2)\,.\,sn^2\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)}\,.\,t;\ \varkappa\right].$$

Preveďme transformáciu imaginárneho modulu (13) $\varkappa = i\bar{k}$ na modul reálny

$$k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1 + \bar{k}^2}} = \frac{\sqrt{z_1 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_2}} < 1, \tag{14}$$

po malej úprave dostaneme:

$$z = z_3 - (z_3 - z_1)\,nd^2\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)}\,.\,t;\ k\right]. \tag{15}$$

Komplementárny modul k' má hodnotu

$$k' = \frac{\sqrt{z_3 - z_1}}{\sqrt{z_3 - z_2}} < 1.$$

5. PERIÓDA OSCILÁCIÍ APLIKÁTY

Rovnica (15) definuje okamžité hodnoty aplikáty hmotného bodu. Ich priebeh je daný eliptickou funkciou času. Pre $t = 0$ je $z = z_1$; ak sa argument funkcie v (15) rovná hodnote konštanty periódy K Jacobiho eliptických funkcií, aplikáta je $z = z_2$. Z tejto podmienky

$$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)}\,.\,t_1 = K$$

pre čas t_1 vychádza:

$$t_1 = \frac{Kl\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_3 - z_2)}}.$$

Súradnica z osciluje medzi krajnými hodnotami, ktoré na základe (15); (7) a (11) sú:

$$[z]_{t=0} = z_1; \quad [z]_{t=t_1} = z_2 < 0;$$

$$z_1 > z_2; \quad |z_1| < |z_2|.$$

Perióda týchto oscilácií je:

$$T = 2t_1 = \frac{2Kl\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_3 - z_2)}}. \tag{16}$$

Hmotný bod je na guľovej ploche v najvyššej polohe, keď je $z = z_1$; vtedy musí byť $t = 0$, takže čas meriame od okamihu, v ktorom je hmotný bod najvyššie. Do najnižšej polohy, pre ktorú je $z = z_2 < 0$, prejde za polovicu periódy $t_1 = \frac{T}{2}$. Po uplynutí celej periódy T hmotný bod je v svojej pôvodnej výške. V polohách $z = z_1$; $z = z_2$ hmotný bod prestáva stúpať, príp. klesať; jeho rýchlosť v smere osi z je nulová

$$[\dot{z}]_{z=z_1} = [\dot{z}]_{z=z_2} = 0.$$

6. DIFERENCIÁLNA ROVNICA POLÁRNEHO UHLA

Druhá súradnica, polárny uhol φ hmotného bodu, viazaného na guľovú plochu, je cyklická. Z druhej Lagrangeovej pohybovej rovnice sme dostali reláciu (4), z ktorej vzhľadom na (1) vychádza:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{l^2 - z^2}. \tag{17}$$

Rozkladom na parciálne zlomky máme:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{2l}\left[\frac{1}{l+z} + \frac{1}{l-z}\right].$$

Pre menovateľov môžeme vzhľadom na (12) písať:

$$l + z = (l + z_1) - (z_1 - z) = (l + z_1) - (z_1 - z_2) . \xi^2 =$$
$$= (l + z_1) . \left[1 - \frac{z_1 - z_2}{l + z_1} . \xi^2\right];$$
$$l - z = (l - z_1) + (z_1 - z) = (l - z_1) + (z_1 - z_2) . \xi^2 =$$
$$= (l - z_1) . \left[1 + \frac{z_1 - z_2}{l - z_1} . \xi^2\right].$$

Dosadením do výrazu pre $\dot{\varphi}$ bude:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{2l}\left\{\frac{1}{(l+z_1) . \left[1 - \frac{z_1 - z_2}{l + z_1} . \xi^2\right]} + \frac{1}{(l - z_1) . \left[1 + \frac{z_1 - z_2}{l - z_1} . \xi^2\right]}\right\}. \tag{18}$$

7. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE POLÁRNEHO UHLA

Substitúciami

$$\xi = sn\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)} . t; \varkappa\right] = sn\,(\eta; \varkappa);$$
$$\eta = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)} . t; \tag{19}$$
$$\frac{z_1 - z_2}{l + z_1} = \varkappa^2 . sn^2(\alpha_1; \varkappa);$$
$$\frac{z_1 - z_2}{l - z_1} = -\varkappa^2 . sn^2(\alpha_2; \varkappa) \tag{20}$$

prejde výraz (18) do tvaru:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2 . \varkappa^2}{2l(z_1 - z_2)} . \left\{\frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} - \frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)}\right\}.$$

Vzhľadom na diferenciál relácie (19) je:

$$d\varphi = \frac{c_2 . d\eta}{(z_3 - z_1)\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} . \left\{\frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} - \frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)}\right\}.$$

Integrovaním vychádza:

$$\varphi = \frac{c_2}{(z_3 - z_1)\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} . \left\{\int_0^\eta \frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} d\eta - \int_0^\eta \frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} d\eta\right\}. \tag{21}$$

Podľa (13) a (20) je:

$$sn^2(\alpha_1; \varkappa) = -\frac{z_3 - z_1}{l + z_1};$$
$$cn^2(\alpha_1; \varkappa) = \frac{l + z_3}{l + z_1};$$
$$dn^2(\alpha_1; \varkappa) = \frac{l + z_2}{l + z_1};$$
$$sn^2(\alpha_2; \varkappa) = \frac{z_3 - z_1}{l - z_1};$$
$$cn^2(\alpha_2; \varkappa) = -\frac{z_3 - l}{l - z_1};$$
$$dn^2(\alpha_2; \varkappa) = \frac{l - z_2}{l - z_1}.$$

Ďalej podľa (9) máme:

$$\frac{sn^3(\alpha_1; \varkappa)}{cn(\alpha_1; \varkappa) . dn(\alpha_1; \varkappa)} = \frac{sn^3(\alpha_2; \varkappa)}{cn(\alpha_2; \varkappa) . dn(\alpha_2; \varkappa)} =$$
$$= -i . \frac{z_3 - z_1}{c_2} . \sqrt{2g(z_3 - z_1)}.$$

Na základe týchto výsledkov rovnica (21) bude:

$$\varphi = i . \{Z_{11}(\alpha_1; \varkappa) - Z_{11}(\alpha_2; \varkappa)\} . \eta + i . \{\Omega_{01}(\eta; \alpha_1; \varkappa) - \Omega_{01}(\eta; \alpha_2; \varkappa)\}, \tag{22}$$

kde $Z_{11}(\alpha; \varkappa)$ a $\Omega_{01}(\eta; \alpha; \varkappa)$ sú Jacobiho transcendenty druhého a tretieho druhu: dzéta-funkcia a omega-funkcia. (Matematicko-fyzikálny sborník, SAVU, Bratislava II, 1952, 1—2, 24 a 27.)

8. TRANSFORMÁCIA IMAGINÁRNEHO MODULU DZÉTA-FUNKCIE

a) *Dzéta-funkcia argumentu* α_1

Modul $\varkappa = i\bar{k}$ je imaginárny (13). Aby sa výraz (22) mohol numericky vyčísliť, musíme ho transformovať na tvar s reálnym modulom. Pre dzéta-funkciu s argumentom α_1 bude:

$$Z_{11}(\alpha_1; \varkappa) = Z_{11}(\alpha_1; i\bar{k}) = Z_{11}(\alpha_1^*; k) = Z_{11}(i\beta_1; k) =$$

$$= -i\frac{cn(\beta_1; k')\, dn(\beta_1; k')}{sn(\beta_1; k')} - i\frac{\pi\beta_1}{2KK'} - i\,.\,Z_{01}(\beta_1; k') =$$

$$= -i\frac{cn(\beta_1; k')\, dn(\beta_1; k')}{sn(\beta_1; k')} - i\frac{\pi - 2KE'}{2KK'}\beta_1 - i\,.\,E(\varphi_1; k'), \qquad (23)$$

kde je $\alpha_1^* = i\beta_1$; $\varphi_1 = \arcsin[sn(\beta_1; k')]$.

Pre pôvodný argument α_1 platí:

$$dn^2(\alpha_1; \varkappa) = \frac{l + z_2}{l + z_1}.$$

Transformáciou na reálny modul prejde α_1 v hodnotu $i\beta_1$, pre ktorú je:

$$dn^2(i\beta_1; k) = \frac{1}{dn^2(\alpha_1; \varkappa)} = \frac{l + z_1}{l + z_2}.$$

Z toho ďalej máme:

$$k^2 sn^2(i\beta_1; k) = 1 - dn^2(i\beta_1; k) = -\frac{z_1 - z_2}{l + z_2},$$

$$sn^2(i\beta_1; k) = -\frac{z_3 - z_2}{l + z_2}$$

a konečne

$$cn^2(i\beta_1; k) = 1 - sn^2(i\beta_1; k) = \frac{l + z_3}{l + z_2}.$$

Jacobiho imaginárnou transformáciou je:

$$sn^2(\beta_1; k') = \frac{z_3 - z_2}{l + z_3} < 1;$$

$$cn^2(\beta_1; k') = \frac{l + z_2}{l + z_3} < 1;$$

$$dn^2(\beta_1; k') = \frac{l + z_1}{l + z_3} < 1.$$

Takto môžeme písať:

$$\varphi_1 = \arcsin[sn(\beta_1; k')] = \arcsin\frac{\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{l + z_3}}. \qquad (24)$$

Z tohto inverziou vyplýva:

$$\beta_1 = F(\varphi_1; k'); \qquad (25)$$

ďalej je:

$$\frac{cn(\beta_1; k')\,.\,dn(\beta_1; k')}{sn(\beta_1; k')} = \frac{c_2}{(l + z_3)\,.\,\sqrt{2g(z_3 - z_2)}}.$$

b) *Dzéta-funkcia argumentu* α_2

Analogicky vychádza:

$$dn^2(i\beta_2; k) = \frac{1}{dn^2(\alpha_2; \varkappa)} = \frac{l - z_1}{l - z_2};$$

$$sn^2(i\beta_2; k) = \frac{z_3 - z_2}{l - z_2};$$

$$cn^2(i\beta_2; k) = -\frac{z_3 - l}{l - z_2} = \frac{1}{cn^2(\beta_2; k')};$$

ďalej

$$cn^2(\beta_2; k') = -\frac{l - z_2}{z_3 - l} < 0;$$

$$sn^2(\beta_2; k') = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - l} > 1;$$

$$dn^2(\beta_2; k') = -\frac{l - z_1}{z_3 - l} < 0.$$

Z posledných troch vzťahov vyplýva, že argument β_2 je komplexné číslo:

$$\beta_2 = \beta + K' + iK.$$

Na základe toho platí:

$$cn^2(\beta_2; k') = -\frac{l - z_2}{z_3 - l} = -\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{1}{cn^2(\beta; k')};$$

z čoho je:

$$cn^2(\beta; k') = \frac{z_3 - l}{l - z_2}\cdot\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} < 1;$$

$$sn^2(\beta; k') = \frac{l - z_1}{l - z_2}\cdot\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} < 1;$$

$$dn^2(\beta; k') = \frac{z_1 - z_2}{l - z_2} < 1.$$

Pre dzéta-funkciu argumentu α_2 takto dostaneme:

$$Z_{11}(\alpha_2; \varkappa) = Z_{11}(\alpha_2; i\bar{k}) = Z_{11}(\alpha_2^*; k) = Z_{11}(i\beta_2; k) = Z_{00}(i\beta; k) - i\frac{\pi}{2K} =$$

$$= ik'^2\frac{sn(\beta; k')\,.\,cn(\beta; k')}{dn(\beta; k')} - i\frac{\pi}{2K} - i\frac{\pi\beta}{2KK'} - i\,.\,Z_{01}(\beta; k') =$$

$$= ik'^2\frac{sn(\beta; k')\,.\,cn(\beta; k')}{dn(\beta; k')} - i\frac{\pi}{2K} - i\frac{\pi - 2KE'}{2KK'}\beta - i\,.\,E(\varphi_2; k'), \qquad (27)$$

kde je:

$$\alpha_2^* = i\beta_2; \quad \beta_2 = \beta + K' + iK$$

a

$$\varphi_2 = \arcsin\left[sn(\beta; k')\right] = \arcsin\left[\frac{\sqrt{l - z_1}}{\sqrt{l - z_2}} \cdot \frac{\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_1}}\right]. \tag{28}$$

Inverziou vychádza:

$$\beta = F(\varphi_2; k'); \tag{29}$$

ďalej je:

$$k'^2 \cdot \frac{sn(\beta; k') \cdot cn(\beta; k')}{dn(\beta; k')} = \frac{c_2}{(l - z_2)\sqrt{2g(z_3 - z_2)}}. \tag{30}$$

9. TRANSFORMÁCIA IMAGINÁRNEHO MODULU OMEGA-FUNKCIE

a) *Omega-funkcia s parametrom* α_1

Transformovaním omega-funkcie parametra α_1 do tvaru s reálnym modulom dostaneme:

$$\Omega_{01}(\eta; \alpha_1; \varkappa) = \Omega_{01}(\eta; \alpha_1; i\bar{k}) = \Omega_{00}(\eta^*; \alpha_1^*; k) = \Omega_{00}(w; i\beta_1; k),$$

kde pre argument w platí:

$$w = \eta\sqrt{1 + \bar{k}^2} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)} \cdot l. \tag{31}$$

Pomocou nekonečných théta-súčinov vyjadríme transformovanú omega-funkciu veľmi rýchlo konvergujúcim radom

$$\Omega_{00}(w; i\beta_1; k) = i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2q^{2h-1} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta_1}{K}}{1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta_1}{K}}, \tag{32}$$

v ktorom parameter q je:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}. \tag{33}$$

b) *Omega-funkcia s parametrom* α_2

Analogicky k (9a) dostaneme:

$$\Omega_{01}(\eta; \alpha_2; \varkappa) = \Omega_{00}(w; i\beta_2; k) = \Omega_{11}(w; i\beta; k) + i\frac{\pi w}{2K} \pm i\frac{\pi}{2} =$$

$$= -i \cdot \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] + i\frac{\pi w}{2K} \pm i\frac{\pi}{2} +$$

$$+ i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2q^{2h} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1 + q^{4h} - 2q^{2h} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta}{K}} =$$

$$= i \cdot \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] + i \cdot \frac{\pi w}{2K} +$$

$$+ i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2q^{2h} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1 + q^{4h} - 2q^{2h} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta}{K}}. \tag{34}$$

Argument w a parameter q sú definované vzťahmi (31) a (33).

10. ROVNICA POLÁRNEHO UHLA

Ak dosadíme (19); (23); (27); (32) a (34) do vzťahu (22), po úprave vzhľadom na (9); (26) a (30) dostaneme rovnicu polárneho uhla:

$$\varphi = A \cdot t + B(t). \tag{35}$$

Konštanta úmernosti v prvom člene (35) je:

$$A = \frac{\sqrt{g(z_3 - z_1)}}{l\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{\sqrt{-(z_1 + z_2)(z_3^2 - l^2)}}{\sqrt{z_3 - z_2}} \cdot \left(\frac{1}{l - z_2} + \frac{1}{l + z_3}\right) - \frac{\pi}{2K} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi - 2KE'}{2KK'}(\beta_1 - \beta) + E(\varphi_1; k') - E(\varphi_2; k')\right];$$

druhý člen (35) je transcendentnou funkciou času

$$B(t) = \frac{\pi w}{2K} + \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2q^{2h-1} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta_1}{K}}{1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta_1}{K}} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2q^{2h} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1 + q^{4h} - 2q^{2h} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta}{K}}.$$

11. PRIEBEH POHYBU

Hmotný bod viazaný na hladkú guľovú plochu v homogénnom silovom poli koná sférický pohyb. Jeho okamžitú polohu určuje rovnica aplikáty (15) a rovnica polárneho uhla (35); v kartézskych súradniciach vzťahy (2) v spojení s (1). Hodnoty aplikáty oscilujú v intervale $z_2 \leqq z \leqq z_1$ s periódou, ktorú udáva relácia (16). O krajných hodnotách aplikáty platia vzťahy (7) a (11). Ak tieto hodnoty poznáme, priebeh pohybu je určený. V perióde oscilácií je:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
z	z_1	$z_3 - \sqrt{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$	z_2	$z_3 - \sqrt{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$	z_1

Tretí koreň kubickej rovnice, utvorenej anulovaním pravej strany (5), udáva výraz (10). Modul eliptickej funkcie v rovnici (15) definuje relácia (14).

Polárny uhol závisí od času podľa rovnice (35).

Výrazy $w(t)$; $B(t)$ a hodnoty polárneho uhla počas periódy oscilácií aplikáty sú:

t	$w(t)$	$B(t)$	$\varphi(t)$
0	0	0	0
$\frac{T}{2}$	K	π	$\frac{1}{2} A \cdot T + \pi$
T	$2K$	2π	$A \cdot T + 2\pi$

Polárny uhol sa v obidvoch polovíciach periódy zväčší o rovnaké časti

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_2 \varphi = \frac{1}{2} A \cdot T + \pi.$$

Pretože sa hodnota A v rovnici (35) nerovná nule, dráha nie je uzavretou krivkou. Hmotný bod sa pohybuje na guľovej ploche po neuzavretej krivke medzi dvoma rovnobežnými kružnicami, ktorých roviny sú kolmé na os z a ležia v polohách $z = z_1$; $z = z_2$.

Prvý člen rovnice (35) je lineárnou funkciou času. Koeficient úmernosti A závisí od počiatočných podmienok pohybu. Vyskytujú sa v ňom veličiny: absolútna hodnota intenzity (g) silového poľa, dĺžka l polomeru guľovej plochy, hodnoty koreňov kubickej rovnice vzťahu (5), úplný eliptický integrál (K) prvého typu, úplný komplementárny eliptický integrál (K') prvého typu, úplný komplementárny eliptický integrál (E') druhého typu, eliptické integrály (β_1); (β) prvého typu (25); (29) a eliptické integrály ($E[\varphi_1; k']$); ($E[\varphi_2; k']$) argumentov (φ_1); (φ_2), určených reláciami (24) a (28). Všetky veličiny, ktoré sa vyskytujú v konštante A, sú definované dĺžkou polomeru guľovej väzby, absolútnou hodnotou intenzity silového poľa a krajnými hodnotami aplikáty pohybu: $A(l; g; z_1; z_2)$.

Druhý člen rovnice (35) je súčtom lineárnej funkcie a transcendentných funkcií času. Výraz $w(t)$ je daný vzťahom (31) a parameter q je určený reláciou (33). Ostatné veličiny, ktoré sa v tomto člene vyskytujú, sú definované rovnakým spôsobom ako v prvom člene, takže platí:

$$B(l; g; z_1; z_2; t).$$

Ak hodnoty: l; g; z_1; z_2; t poznáme, polárny uhol môžeme na základe rovnice (35) ľahko vyčísliť.

Okamžitú absolútnu hodnotu rýchlosti hmotného bodu v smere osi z pri danej hodnote aplikáty určuje výraz (6). V krajných polohách je táto rýchlosť nulová. Keď zasahujú oscilácie aplikáty do kladnej časti osi z, takže je $z_1 > 0$, hmotný bod prechádza cez rovník ($z = 0$) guľovej väzby rýchlosťou

$$[\dot{z}]_{z=0} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{-2g z_1 z_2 z_3}.$$

Zo vzťahu (17) vzhľadom na (9) vychádza uhlová rýchlosť hmotného bodu v (horizontálnej) rovine kolmej na os z pri danej hodnote aplikáty v tvare:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{-2g(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)}}{l^2 - z^2}. \tag{36}$$

Ak je $z_1 > 0$, táto rýchlosť je rovnako veľká v polohách súmerne združených podľa roviny rovníka guľovej väzby, v ktorých je $z = \pm z'$; $z' \leqq z_1$.

V krajných polohách je uhlová rýchlosť

$$[\dot{\varphi}]_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2g(z_2 + z_3)}}{\sqrt{-(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}};$$

$$[\dot{\varphi}]_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2g(z_1 + z_3)}}{\sqrt{-(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)}}.$$

Pri $z_1 > 0$ je uhlová rýchlosť v rovníkovej polohe ($z = 0$)

$$[\dot{\varphi}]_{z=0} = \frac{\sqrt{-2g(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)}}{l^2}.$$

Medzi odvodenými hodnotami platí nerovnosť

$$[\dot{\varphi}]_{z=0} < [\dot{\varphi}]_{z=z_1} < [\dot{\varphi}]_{z=z_2}.$$

Polárny uhol sa najrýchlejšie mení pri najmenšej hodnote aplikáty; v rovníkovej polohe hmotného bodu je táto zmena najmenšia; v polohách súmerne združených podľa roviny rovníka uhlové rýchlosti sú rovnaké. Keď je maximum aplikáty hodnota záporná, uhlová rýchlosť je najmenšia v polohe najväčšej aplikáty.

Z prvej rovnice (8) vzhľadom na substitúciu zavedenú do vzťahu (5) môžeme na základe (3) určiť energiu sférického kyvadla.

12. ZVLÁŠTNE PRÍPADY POHYBU

a) *Matematické kyvadlo*

Ak je polárny uhol konštantný, podľa (4) sú korene kubickej rovnice pravej strany (5)

$$z_1 = \frac{c_1}{g} = z_0; \quad z_2 = -l; \quad z_3 = l.$$

Hmotný bod sa pohybuje po oblúku hlavnej kružnice guľovej väzby na (zvislej) rovine obsahujúcej os z a predstavuje matematické kyvadlo.
Dosadením uvedených hodnôt koreňov do (15) dostaneme rovnicu aplikáty matematického kyvadla v tvare:

$$z = l - (l - z_0) \, . \, nd^2 \left[\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; k \right].$$

Modul dosadením do (14) vychádza v hodnote

$$k = \frac{\sqrt{z_0 + l}}{\sqrt{2l}}.$$

Perióda kyvu podľa (16) je:

$$T = 2K \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}.$$

Matematické kyvadlo je špeciálnym prípadom sférického kyvadla.

b) *Kónické kyvadlo*

Keď sa hodnota aplikáty nemení, eliptická funkcia v rovnici (15) musí byť konštantná. Jej modul sa potom rovná nule. Vzhľadom na (14) preto je:

$$z_1 = z_2.$$

V tomto prípade oscilácie aplikáty nevzniknú; hmotný bod obieha okolo osi z po kružnici v (horizontálnej) rovine kolmej na aplikátu.
Podľa (17) je pri stálej hodnote aplikáty uhlová rýchlosť pohybu konštantná a na základe (36) vzhľadom na (9) je daná výrazom:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-z_1}}.$$

Pre reálny pohyb musí byť stála hodnota aplikáty záporná; hmotný bod musí byť v polohe pod rovníkovou rovinou ($z = 0$) guľovej väzby. Jeho pohyb v tomto prípade predstavuje kónické kyvadlo. Rovnica polárneho uhla je:

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-z_1}} \, . \, t + \varphi_0;$$

perióda pohybu je:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{-z_1}}{\sqrt{g}}.$$

Kónické kyvadlo je zvláštnym prípadom sférického kyvadla.

Došlo 18. IV. 1953.

Katedra fyziky
Pedagogickej fakulty Slovenskej univerzity
v Bratislave

LITERATÚRA

1. N. J. Achiezer, *Elementy teorii elliptičeskich funkcij*, Moskva—Leningrad 1948.
2. T. Levi—Civita, U. Amaldi, *Kurs teoretičeskoj mechaniki II*-1, Moskva 1951.
3. J. Chrapan, *Matematicko-fyzikálny sborník*, SAVU, *2*, 23 (1952).

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

И. ХРАПАН, БРАТИСЛАВА

Выводы

В работе выведены явные функции времени для аппликаты и полярного расстояния при движении сферического маятника, численным образом, с применением таблиц, легко вычисляемые для любого момента времени. Решение дифференциального уравнения аппликаты выражено эллиптической функцией времени и дан период колебаний аппликаты. С помощью частей периода определяются значения аппликаты в моментах после четвертых частей периода. Для краевых значений аппликаты выведены характерические неравенства.

Дифференциальное уравнение полярного расстояния решено с применением трансцендентных функций Якоби второго и третьего рода. Даны значения полярных расстояний в моментах после отдельных половин периода колебаний аппликаты.

Все результаты формулированы в видах, удобных для прямого числовоно вычисления. Наконец рассматриваются математический и конусный маятники, как специальные случаи сферического маятника.