O OBRYSE VYPUKLÝCH PLÔCH

VÁCLAV MEDEK

Pojem obrysu plochy, jeden zo základných pojmov deskriptívnej geometrie, nebýva dosť presne vymedzený a často sa pri jeho definícii odvolávame na jeho priestorovú názornosť.

V ďalšom by som chcel podať definíciu obrysu vypuklých plôch pre premietanie z bodu S na rovinu π, ktorá neprechádza bodom S.

Pod vypuklou nadplochou v E_n budem rozumieť množinu hraničných bodov vypuklej oblasti, ktorej všetky body neležia v jedinej nadrovine. Pre $n = 3$ dostávame vypuklú plochu, pre $n = 2$ vypuklú krivku.

Vypuklú oblasť s jej vypuklou plochou budem nazývať *vypuklým telesom.*

1. Nech F je nejaké vypuklé teleso, ktoré definuje vypuklú plochu Φ ako súhrn jeho hraničných bodov. Zostrojme stredom premietania S všetky polpriamky, ktorých začiatočné body sú v bode S a obsahujú vždy aspoň jeden bod telesa F. Súhrn bodov všetkých takto vzniknutých polpriamok označme P.

Definícia 1. *Súhrnu P bodov budeme hovoriť premietacie teleso plochy Φ.*

Veta 1. *Premietacie teleso P vypuklej plochy Φ je vypuklé.*

Za účelom d ô k a z u si zvoľme dva ľubovoľné, od seba rôzne body MN telesa P. Potom polpriamka SM musí byť určená nejakým bodom A telesa F a polpriamka SN nejakým bodom B telesa F. Pretože teleso F je vypuklé, každý bod úsečky AB prislúcha telesu F. Z toho priamo vyplýva, že aj každý bod úsečky MN prislúcha telesu P, ktoré je teda vypuklé.

Definícia 2. *Ak existuje hraničná vypuklá plocha Π telesa P, budeme jej hovoriť premietacia plocha vypuklej plochy Φ.*

P o z n á m k a. Vypuklá plocha Π nemusí niekedy vôbec existovať, alebo aj keď existuje, nemusí mať spoločné body s plochou Φ. Napr. vypuklá plocha Π neexistuje nikdy, ak stred premietania S je vnútorným bodom telesa F. Plocha Π nemá spoločné body s plochou Φ napr. vtedy, ak teleso F je polpriestor a stred premietania S je jeho vonkajším bodom. Vtedy plocha Π je rovinou rovnobežnou s rovinou Φ.

Na podklade takto zavedených pojmov môžeme zaviesť pojem skutočného obrysu vypuklej plochy Φ.

Definícia 3. *Skutočným obrysom vypuklej plochy Φ pre stred premietania v bode S je prienik plochy Φ a jej premietacej plochy Π.*

Z poznámky k definícii 2 vyplýva, že skutočný obrys vypuklej plochy Φ môže mať veľmi rozmanitý tvar, resp. môže to byť aj prázdna množina. Ak napr. teleso P je kocka a stred premietania S je jedným jej vrcholom, skutočný obrys tvoria jej tri steny obsahujúce bod S. Skutočný obrys je prázdna množina vždy vtedy, ak stred premietania S je vnútorným bodom telesa F, alebo vtedy, ak premietacia plocha Π a plocha Φ majú prázdny prienik.

Zostrojme ďalej vypuklé teleso $\overline{P}$ a jeho hraničnú vypuklú plochu $\overline{\Pi}$ stredove symetrické k telesu P a ploche Π vzhľadom na stred premietania S. Potom môžeme zaviesť:

Definícia 4. *Zdanlivým obrysom vypuklej plochy Φ je súčet prienikov plôch Π a $\overline{\Pi}$ s rovinou π.*

Keby sme vzali do úvahy iba premietaciu plochu Π vypuklej plochy Φ a jej prienik s priemetňou π, dostali by sme *medzu vrhnutého tieňa* plochy Φ pri centrálnom osvetlení zo stredu v bode S.

Zdanlivý obrys vypuklej plochy môže mať veľmi rozličný tvar; závisí od vzájomnej polohy priemetne π a vypuklých telies P a $\overline{P}$. Ak teleso P nie je celým priestorom ani polpriestorom a ak priemetňa π obsahuje jeho vnútorné body, potom prienik plochy Π s priemetňou je vypuklá krivka. To isté platí aj o telese $\overline{P}$. Za uvedených predpokladov o telesách P a $\overline{P}$ môžu potom nastať celkove 3 typy zdanlivého obrysu vypuklej plochy: 1. dve vypuklé krivky (obidve telesá P a $\overline{P}$ majú s priemetňou spoločné vnútorné body), 2. jedna vypuklá krivka (práve jedno z telies P a $\overline{P}$ má s priemetňou spoločné vnútorné body), 3. prázdna množina (ani jedno z telies P a $\overline{P}$ nemá s priemetňou spoločné body).

2. Nech rovina τ je opornou rovinou premietacej plochy Π, ktorá obsahuje aspoň jeden jej bod T rôzny od bodu S. Potom ľahko dokážeme, že rovina τ obsahuje celú polpriamku ST. Predpokladajme naopak, že rovina τ obsahuje z polpriamky ST iba bod T. Potom polpriamka ST pretína rovinu τ v bode T a na polpriamke ST budú potom existovať body, ktoré ležia na jednej strane, a body, ktoré ležia na druhej strane roviny τ. Pretože celá polpriamka ST prislúcha ploche Π, nemohla by byť rovina τ jej opornou rovinou.

Predpokladajme, že zdanlivý obrys m^s plochy Φ vznikol ako rez premietacej plochy Π s rovinou π. Nech ďalej krivka k na ploche Φ má spoločný aspoň jeden bod K s jej skutočným obrysom. Potom aj krivka k^s musí mať s obrysom m^s spoločný bod K^s.

Nech τ je oporná rovina plochy Π (a teda aj plochy Φ) v bode K. Potom priesečnica t rovín τ a π musí byť opornou priamkou krivky m^s aj krivky k^s.

Tvrdenie vyplýva z toho, že krivky m^s aj k^s sú krivkami telesa P, pre ktoré je rovina τ opornou rovinou.

Za týchto predpokladov môžeme vysloviť:

Veta 2. *Ak plocha Π má v bode K jedinú opornú rovinu τ a krivka k^s má v bode K^s obyčajnú tangentu, potom touto tangentou je priesečnica t roviny τ s rovinou π.*

D ô k a z, Predpokladajme naopak, že krivka k^s má v bode K^s tangentu t' rôznu od priamky t. Potom by museli na krivke k^s v okolí bodu K^s existovať body na jednej aj druhej strane od priamky t, čo nie je možné, lebo priamka t je opornou priamkou krivky k^s.

Vetu by sme mohli snadno rozšíriť aj na ten prípad, ak zdanlivý obrys sa skladá z dvoch vypuklých kriviek, resp. ak zdanlivým obrysom je prienik plochy $\overline{\Pi}$ s rovinou π.

Veta 3. *Ak krivka k^s má v bode K^s jedinú opornú priamku t, potom aj krivka m^s má v bode K^s jedinú opornú priamku t.*

D ô k a z. Predpokladajme, že krivka m^s má v bode K^s opornú priamku t' rôznu od priamky t. Potom priamka t' by musela byť opornou priamkou aj krivky k^s, čo odporuje predpokladu.

Konštrukciu zdanlivého obrysu plochy Φ môžeme previesť napr. takto: Bodom S zostrojíme ľubovoľný sväzok rovín Σ a vyberieme z rovín sväzku len tie, ktoré majú s plochou Φ spoločný aspoň jeden bod. Nech ϱ je jedna taká rovina. Spoločné body roviny ϱ a plochy Φ môžu vytvoriť: 1. dvojrozmerný vypuklý útvar, 2. vypuklú krivku, 3. vypuklú časť priamky, 4. jeden bod.

V prvom prípade dostávame pre krivku zdanlivého obrysu jednu alebo najviac dve vypuklé časti priamky. V druhom prípade sostrojíme z bodu S oporné priamky k danej vypuklej krivke (môžu byť najviac dve) a dostávame tak pre krivku zdanlivého obrysu najviac dva body. V treťom prípade dostávame opäť najviac dve vypuklé časti priamky a v štvrtom prípade jeden bod.

Ak uvažujeme o *paralelnom premietaní* v smere s, ktorý nie je rovnobežný s priemetňou π, potom premietacie teleso P je určené navzájom rovnobežnými priamkami určenými vždy bodmi telesa F. Premietacia plocha Π je potom tiež vytvorená priamkami navzájom rovnobežnými a pretína teda priemetňu π v jednej vypuklej krivke m^s.

3. Majme dve vypuklé plochy ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$ (definované vypuklými telesami ${}^1F\,{}^2F$) a bod O. Pod súčtovou plochou $\Phi = {}^1\Phi + {}^2\Phi$ rozumieme hranicu množiny F, ktorej body dostaneme takto: Nech ${}^1A$ je ľubovoľný bod telesa ${}^1F$, ${}^2A$ ľubovoľný bod telesa ${}^2F$. Môžu nastať dva prípady:

a) body $O\,{}^1A\,{}^2A$ ležia na jednej priamke p; potom bodom telesa F bude ten bod A na priamke p, o ktorom platí $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O^1A} + \overrightarrow{O^2A}$;

b) body $O\,{}^1A\,{}^2A$ neležia na jednej priamke; potom bodom telesa F bude štvrtý vrchol A rovnobežníka $O\,{}^1A\,{}^2A\,A$ v rovine určenej bodmi $O\,{}^1A\,{}^2A$.

Veta 4. *Súčtová plocha Φ dvoch vypuklých plôch ${}^1\Phi{}^2\Phi$ je vypuklá.*

D ô k a z. Nech F je množina súčtov bodov vypuklých telies ${}^1F{}^2F$ pre počiatok sčítania v bode O. Nech AB sú dva ľubovoľné body množiny F a nech bod A vznikol ako súčet bodov ${}^1A \in {}^1F$, ${}^2A \in {}^2F$ a bod B ako súčet bodov ${}^1B \in {}^1F$, ${}^2B \in {}^2F$. Zostrojme teraz množinu M bodov, ktoré vzniknú ako súčty bodov ${}^1N^x\,{}^2N^y$, kde bod ${}^1N^x$ je ľubovoľný bod úsečky ${}^1A\,{}^1B$ a bod ${}^2N^y$ ľubovoľný bod úsečky ${}^2A\,{}^2B$. Posuňme za tým účelom úsečku ${}^2A\,{}^2B$ do takej polohy, aby bod ${}^2A$ splynul s bodom A; bod ${}^2B$ sa dostane potom do polohy ${}^2B'$ (zodpovedajúce body posunutej úsečky ${}^2A\,{}^2B$ budeme označovať čiarkou). Potom súčtom napr. bodu ${}^2N^y$ so všetkými bodmi úsečky ${}^1A\,{}^1B$ bude úsečka, ktorá vznikne z úsečky ${}^1A\,{}^1B$ takým posunutím, aby bod ${}^1A$ splynul s bodom ${}^2N^{y\prime}$. Množinu M dostaneme teda tak, že budeme posúvať úsečkou ${}^1A\,{}^1B$ tak, aby bod ${}^1A$ postupne splynul so všetkými bodmi úsečky ${}^2A'\,{}^2B'$. Množina M je teda rovnobežníkom, pre ktorý je úsečka AB uhlopriečkou. Pretože úsečka ${}^1A\,{}^1B$ prislúcha telesu ${}^1F$ a úsečka ${}^2A\,{}^2B$ telesu ${}^2F$, musí celý rovnobežník M a teda aj jeho uhlopriečka AB prislúchať telesu F a teleso F je potom vypuklé.

Podobným spôsobom definujeme sčítanie dvoch vypuklých kriviek v jednej rovine a práve tak dokážeme, že ich súčtom je opäť vypuklá krivka.

Veta 5. *Nech ${}^1m^s\,{}^2m^s$ sú vypuklé krivky zdanlivých obrysov vypuklých plôch ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$ pre paralelné premietanie, ktorého smer nie je rovnobežný s priemetňou π; potom zdanlivým obrysom súčtovej plochy $\Phi = {}^1\Phi + {}^2\Phi$ je súčtová krivka m^s kriviek ${}^1m^s\,{}^2m^s$.*

D ô k a z. Predovšetkým dokážeme, že premietacie teleso P plochy Φ je súčtom premietacích telies ${}^1P\,{}^2P$ plôch ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$. Skutočne, nech bodom A telesa F prechádza priamka a rovnobežná so smerom premietania s. Bod A nech vznikol ako súčet bodov ${}^1A\,{}^2A$ telies ${}^1F\,{}^2F$. Priamky ${}^1a\,{}^2a$ nech prechádzajú bodmi ${}^1A\,{}^2A$ rovnobežne so smerom s. Potom priamku a môžeme dostať napr. ako súčet bodu ${}^2A$ s bodmi priamky ${}^1a$. Zároveň ľahko nahliadneme, že súčtom bodov telies ${}^1P\,{}^2P$ môžeme dostať práve len body telesa P.

Premietnime ďalej bod O v smere s do roviny π do bodu O^s. Nech telesá ${}^1P\,{}^2P\,P$ pretínajú rovinu π vo vypuklých útvaroch ${}^1M^s\,{}^2M^s\,M^s$, ktorých hraničné krivky sú ${}^1m^s\,{}^2m^s\,m^s$. Zvoľme si ľubovoľný bod M^{xs} vypuklého útvaru M^s a zostrojme ním rovnobežku m^x so smerom s. Priamka m^x musí mať s telesom F spoločný aspoň jeden bod M^x; bod M^x nech vznikol ako súčet bodov ${}^1M^x\,{}^2M^x$ telies ${}^1F\,{}^2F$. Rovnobežník $O\,{}^1M^x\,{}^2M^x\,M^x$ sa premieta v smere s do roviny π ako rovnobežník $O^s\, {}^1M^{xs}\, {}^2M^{xs}\, M^{xs}$, pričom body ${}^1M^{xs}\, {}^2M^{xs}$ prislúchajú vypuklým útvarom ${}^1M^s\, {}^2M^s$. Zároveň je zrejmé, že sčítaním vypuklých útvarov ${}^1M^s\, {}^2M^s$ dostaneme práve len body vypuklého útvaru M^s. Z toho už tvrdenie našej vety vyplýva priamo.

Došlo do redakcie 15. marca 1953.

О КОНТУРЕ ВОГНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

Содержанием работы является — с дефиниторической точки зрения — уточнение понятия контура поверхности, применяемого в начертательной геометрии.