JEDNODUCHÉ KINEMATICKÉ ZDÔVODNENIE MAXWELLOVHO POSUVNÉHO PRÚDU

DIONÝZ ILKOVIČ

(Prednesené v seminári pre klasickú teóriu poľa Komisie Slovenskej akadémie vied pre matematiku a fyziku dňa 19. novembra 1953)

Všetky vlastnosti elektrostatického poľa, t. j. elektrického poľa v priestore s elektrickými množstvami, ktoré sa vzhľadom na tento priestor nepohybujú, vyplývajú z *Coulombovho zákona*, podľa ktorého vektor elektrickej intenzity poľa **E** je daný výrazom:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\varrho\,d\tau}{r^3}\,\mathbf{r}, \tag{1}$$

kde ε_0 je dielektrická permitivita vákua, ϱ objemová hustota elektriny, $d\tau$ diferenciál objemu, **r** polohový vektor bodu, v ktorom vektor elektrickej intenzity poľa je **E**, vzhľadom na miesto objemového elementu $d\tau$ a r absolútna hodnota vektora **r**.

Podobne vlastnosti magnetostatického poľa, t. j. magnetického poľa v priestore s časom sa nemeniacimi elektrickými prúdmi vyplývajú z *Biotovho a Savartovho zákona*, podľa ktorého vektor magnetickej indukcie poľa, **B**, je daný výrazom:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}\,d\tau}{r^3}\times\mathbf{r}, \tag{2}$$

kde μ_0 je magnetická permeabilita vákua, **i** vektor hustoty elektrického prúdu a ostatné symboly majú podobný význam ako vo vzorci (1).

Štruktúru elektromagnetického poľa, t. j. s časom sa meniaceho elektrického poľa, ktoré je vždy aj s časom sa meniacim magnetickým poľom a naopak, vyjadrujú *Maxwellove rovnice*, ktoré napísané v znení platnom pre vákuum (a elektromagnetické pole je vždy vo vákuu medzi elementárnymi časticami hmoty) sú:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = \varrho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{i} + \frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E})}{\partial t}\right),$$

alebo ak zavedieme vektor elektrického posunutia (elektrickej indukcie) vo vákuu vzťahom $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ a vektor magnetickej intenzity poľa vo vákuu vzťahom $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}/\mu_0$,

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \varrho, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}.$$

Pri odvodzovaní týchto rovníc sa vychádza zo vzťahov platných pre elektrostatické a magnetostatické polia, vyvodených z Coulombovho a Biotovho a Savartovho zákona, avšak pri písaní Maxwellovej rovnice v našom poradí štvrtej, ktorá v prípade magnetostatického poľa je len $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{i}$, podľa Maxwella a bez dostatočného fyzikálneho zdôvodnenia sa táto rovnica doplňuje na pravej strane o tzv. *Maxwellov posuvný prúd* $\frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}$.

O veci čítame napr. v známej učebnici teoretickej fyziky G. Joos, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 2. vyd., str. 281, toto: „Indukčný zákon hovorí, že vo vákuu každá zmena magnetického silového toku, prechádzajúceho cez plochu ohraničenú krivkou C, má za následok elektrický vír, t. j. konečnú hodnotu krivkového integrálu $\oint \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{s}$ pozdĺž krivky C. Už viac raz objavená reciprocita elektrických a magnetických dejov vedie k domnienke, že aj zmena elektrického silového toku vyvoláva magnetický vír. Píšeme preto na skúšku

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

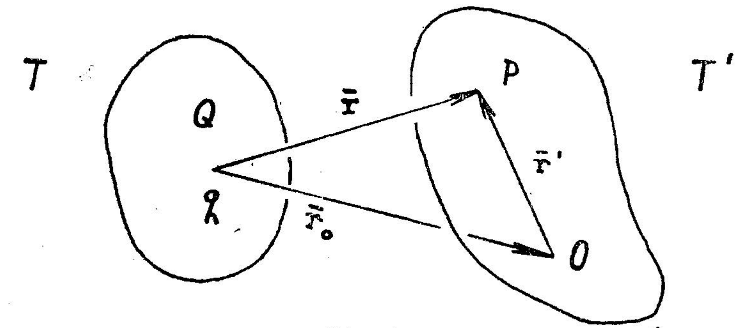
Túto rovnicu vyvodil Maxwell z predstavy, že pri vytváraní poľa objemové elementy ‚éteru' sa polarizujú podobne ako objemové elementy dielektrika." Ďalej na str. 282: „Avšak dnes, na rozdiel od Maxwella, o nejakom z elektrických nábojov vytvorenom a polarizovateľnom éteri nemožno hovoriť, takže pravý, posunutím nábojov vznikajúci ‚posuvný prúd' môžeme predpokladať len v dielektriku. Pre člen $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ chýba preto prísne zdôvodnenie aj ohľadne znamienka."

L. R. Nejman a P. L. Kalantarov v knihe *Fyzikálne základy elektrotechniky*, str. 152 slovenského prekladu píšu: „Posuvný prúd v dielektriku sa skladá z dvoch častí: z polarizačného prúdu a z posuvného prúdu vo vákuu. Tieto jeho dve zložky vyplývajú z rovnice $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}$, podľa ktorej je:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Význam druhej zložky je názorný. Zodpovedá pohybu elementárnych nábojov v atómoch a v molekulách pri ich deformácii a pri pootočení polárnych molekúl za účinku meniaceho sa vonkajšieho poľa. Pri dnešnom stave vedy názorný význam prvej zložky však nemožno podať, predsa však musíme pripustiť, že zavedenie pojmu posuvného prúdu na vystihnutie hmotného procesu, ktorý sa odohráva v elektromagnetickom poli vytvorenom v prostredí, ktoré sme nazvali vákuom, zodpovedá istej skutočnosti, keďže pomocou tohto pojmu dochádzame vždy k správnym výsledkom."

V knihe J. C. Slater a N. H. Frank *Electromagnetism*, 1947, na str. 84 čítame: „Maxwell vyslovil predpoklad, že rovnica $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ má sa správne písať $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$."



Obr. 1.

Toto je všeobecné stanovisko v súčasnej fyzikálnej literatúre, pokiaľ sa elektromagnetické pole vyšetruje bez použitia princípov relativity, ktoré sa však ako také postulujú.

V svojom článku poukazujem na to, že Maxwellov posuvný prúd $\frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}$, vystupujúci v Maxwellovej rovnici v našom poradí štvrtej, je jednoduchým kinematickým dôsledkom Coulombovho a Biotovho a Savartovho zákona, napísaných v zmysle elektrónovej teórie pre jeden bodový elektrický náboj q v tvare:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{r^3} \times \mathbf{r}. \tag{3}$$

Bodový elektrický náboj q nech sa nachádza vzhľadom na súradnicový systém S, viazaný na teleso T, v pokoji a nech splýva s geometrickým bodom tohto priestoru Q (obr. 1). V tomto priestore nech sa ľubovoľným spôsobom pohybuje teleso T', s ktorým nech je spojený súradnicový systém S'.

Vzhľadom na priestor S' je potom náboj q v relatívnom pohybe. Preto v tomto priestore je magnetické pole, v bode P, ktorý v priestore S' je pevný, o indukcii:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}_r}{r^3} \times = \mathbf{r} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{v}_r = -\mu_0 \mathbf{D}_0 \times \mathbf{v}_r,$$

kde $\mathbf{v}_r$ je rýchlosť pohybu náboja q vzhľadom na priestor S'. V tomto bode priestoru S' teda je:

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times (\mathbf{D}_0 \times \mathbf{v}_r) = -\mu_0 [\nabla . \mathbf{v}_r \mathbf{D}_0 - \nabla . \mathbf{D}_0 \mathbf{v}_r] = -\mu_0 \mathbf{v}_r . \text{grad}\,\mathbf{D}_0, \qquad (4)$$

lebo $\mathbf{v}_r$ nie je funkciou polohy bodu P vzhľadom na teleso T' a div $\mathbf{D}_0 = 0$, ak bod Q nesplýva náhodou s bodom P.

Rýchlosť $\mathbf{v}_r$ náboja q vzhľadom na priestor S' je však totožná s rýchlosťou $\mathbf{v}_p$ jeho poľa vzhľadom na tento priestor, t. j. $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_p$ a rýchlosť $\mathbf{v}_p$ spĺňa rovnicu:

$$\mathbf{v}_p . \text{grad}\,\mathbf{D}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

vyplývajúcu z rovnice $\text{d}\mathbf{D}_0 = 0$, t. j. $\text{d}\mathbf{r} . \text{grad}\,\mathbf{D}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}\text{d}t = 0$, ak v nej za $\text{d}\mathbf{r}$ volíme $\mathbf{v}_p \text{d}t$, pričom $\frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}$ je parciálna derivácia vektora $\mathbf{D}_0$ podľa času v priestore S'. Je to taká rýchlosť, ktorou ak sa pohybuje pozorovateľ v priestore S', nepozoruje v tomto priestore zmenu vektora $\mathbf{D}_0$.

Spojením rovníc (4) a (5), za použitia aj rovnosti $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_p$, máme:

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}, \qquad (6)$$

alebo keďže je $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_0$,

$$\text{rot}\,\mathbf{H}_0 = \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}. \qquad (7)$$

Ak by sa vzhľadom na priestor S' pohybovalo viac elektrických nábojov, je zrejmé, že by výsledok (7) platil nezmenene, lebo pre elektrické a magnetické polia platí zákon superpozície. Konečne, keby sme sa opierali o predstavu, že elektrické množstvo je v priestore S' spojite rozložené s objemovou hustotou ϱ a jeho rýchlosť ako funkcia polohy bodu v priestore S' je $\mathbf{v}$, namiesto rovnice (7) prevedením podobnej úvahy by sme dostali rovnicu:

$$\text{rot}\,\mathbf{H}_0 = \varrho \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}. \qquad (8)$$

Rovnica (8) je v našom poradí štvrtá Maxwellova rovnica vo formulácii Lorentzovej. Vedľa konvekčného prúdu vystupuje v nej aj Maxwellov posuvný prúd bez toho, že by sme pri jej odvodzovaní boli použili predpo-

klad rovnocennosti obidvoch týchto prúdov pre vznik magnetického poľa.

Pre úplnosť tejto úvahy pomocou podobnej kinematickej úvahy odvodíme aj tretiu Maxwellovu rovnicu, ktorá sa nazýva tiež zákonom elektromagnetickej indukcie.

Za tým účelom si predstavme, že v priestore S je teraz magnetostatické pole. Nech sa v tomto priestore pohybuje súradnicový systém S' viazaný na teleso T'. Ak nejaký elektrický náboj q je v bode P systému S' vzhľadom na tento systém v pokoji, podlieha sile, lebo sa pohybuje vzhľadom na systém S, v ktorom je magnetické pole, rýchlosťou $\mathbf{v}$. Táto sila, ako vyplýva priamo z vhodne zavedenej definície vektora magnetickej indukcie, je:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

a pre intenzitu v priestore S' jeho pohybom indukovaného elektrického poľa máme:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \qquad (9)$$

Vypočítame rotáciu vektora $\mathbf{E}$ v priestore S':

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\nabla . \mathbf{B})\mathbf{v} - (\nabla . \mathbf{v})\mathbf{B} = (\text{div}\,\mathbf{B})\mathbf{v} + \mathbf{B} . \text{grad}\,\mathbf{v} - (\text{div}\,\mathbf{v})\mathbf{B} - \mathbf{v} . \text{grad}\,\mathbf{B}.$$

Je však div $\mathbf{B} = 0$, lebo je $\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{P}$, a $\text{div}\,\mathbf{v} = \nabla . (\mathbf{v}_0 + \overline{\omega} \times \mathbf{r}') = -\nabla . (\mathbf{r}' \times \overline{\omega}) = -(\nabla \times \mathbf{r}') . \overline{\omega} = 0$. Teda:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{B} . \text{grad}\,\mathbf{v} - \mathbf{v} . \text{grad}\,\mathbf{B}. \qquad (10)$$

Ďalej je:

$$\text{grad}\,\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{v}_0 + \overline{\omega} \times \mathbf{r}') = -\nabla(\mathbf{r}' \times \overline{\omega}) = -\mathbf{I} \times \overline{\omega},$$

kde $\mathbf{I}$ je tenzor identity, lebo $\mathbf{v}_0$ nezávisí od súradníc bodu P, a

$$\mathbf{B} . \text{grad}\,\mathbf{v} = -\mathbf{B} . \mathbf{I} \times \overline{\omega} = \overline{\omega} \times \mathbf{B}. \qquad (11)$$

V priestore S je magnetické pole od času nezávislé, preto v tomto priestore je:

$$\text{d}\mathbf{B} = \text{d}\mathbf{r} . \text{grad}\,\mathbf{B}.$$

Ak za $\text{d}\mathbf{r}$ volíme $\mathbf{v}\text{d}t$, kde $\mathbf{v}$ je rýchlosť v priestore S' pevného bodu P vzhľadom na priestor S, bude:

$$\text{d}\mathbf{B} = \mathbf{v}\text{d}t . \text{grad}\,\mathbf{B}$$

značiť zmenu vektora $\mathbf{B}$ v bode P za čas $\text{d}t$ zo stanoviska pozorovateľa v priestore S, teda:

$$\left(\frac{\text{d}\mathbf{B}}{\text{d}t}\right)_a = \mathbf{v} . \text{grad}\,\mathbf{B}$$

alebo

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B}, \tag{12}$$

kde $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)_r$ je parciálna derivácia vektora **B** podľa času v priestore S'.

Dosadením výsledkov (11) a (12) do rovnice (10) dostávame

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{13}$$

Ak by sa teleso T', s ktorým je súradnicový systém S' spojený, pohybovalo vzhľadom na superpozíciu ľubovoľného počtu magnetostatických polí so zdrojmi v relatívnom pokoji v priestoroch $S_1, S_2, \ldots, S_n$ vo vzájomnom pohybe, je zrejmé, že by v priestore S', ktorý môže byť totožný aj s ktorýmkoľvek priestorom S_i, platila rovnica (13) nezmenene. Podľa tejto úvahy rovnica (13) je správna, pokiaľ zdrojmi magnetického poľa, ktoré vo všeobecnosti v každom priestore S_i je s časom sa meniacim magnetickým poľom, sú v sebe uzavreté a s časom sa nemeniace elektrické prúdy v akomkoľvek vzájomnom pohybe.

Podobnou úvahou však ľahko dokážeme, že rovnica (13) má všeobecnú platnosť. Prvotnou príčinou elektrického a magnetického poľa sú totiž vždy len elektrické náboje, ktoré sa prípadne vzhľadom na priestor, v ktorom pole skúmame, nejakým spôsobom pohybujú.

Predstavme si preto, že sa vzhľadom na priestor S', v ktorom pole vyšetrujeme, pohybuje bodový elektrický náboj q rýchlosťou $\mathbf{v}_r$. V priestore S' je potom s časom sa meniace elektrické aj magnetické pole, ktoré sa vzhľadom na tento priestor pohybuje rovnakou rýchlosťou $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_r$, pričom rýchlosť $\mathbf{v}_p$ vyhovuje vzťahu:

$$\mathbf{v}_p \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_r = 0. \tag{14}$$

V pevnom bode P priestoru S' je za týchto okolností elektrické pole o intenzite **E**, ktorá je súčtom intenzity

$$\mathbf{E}_s = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

budenej nábojom q, a intenzity

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

indukovanej pohybom priestoru S' vzhľadom na pole náboja q. Za rýchlosť **v** v poslednom vzorci treba teda teraz (v zhode s príslušnou úvahou v knihe L. R. Nejmana a P. L. Kalantarova, *Fyzikálne základy elektrotechniky*, str. 192 slovenského prekladu) písať rýchlosť $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_p$ bodu P vzhľadom na pole náboja q. Máme takto ihneď

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = \nabla \times (v \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{v}_p + \nabla \cdot \mathbf{v}_p \mathbf{B} = \mathbf{v}_p \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B},$$

lebo $\mathbf{v}_p$ nezávisí od polohy bodu P v priestore S' a div $\mathbf{B} = 0$, alebo s použitím vzťahu (14) opäť:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{15}$$

keď sme index ,,r,, pri parciálnej derivácii vektora **B** podľa času vzhľadom na priestor S' už vynechali.

Po podanom odvodení rovnice (15) musíme však vykonať revíziu odvodenia rovnice (8). Pri odvodzovaní rovnice (15) sme pre vektor intenzity elektrického poľa písali súčet:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Tento vzťah je rovnocenný so vzťahom:

$$\mathbf{D}_0 = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \varepsilon_0 \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}.$$

Podľa toho sme teda mali aj pri odvodzovaní rovnice (8) za výraz $\frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ písať nie $\mathbf{D}_0$, ale $\mathbf{D}_0 + \varepsilon_0 \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}$. Vyšetríme, aký vplyv to má na rovnicu (8). Za tým účelom píšme:

$$\mathbf{B}^* = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{v}_r,$$

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{D}_0 \times \mathbf{v}_r,$$

pričom je:

$$\mathbf{D}_0 = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \varepsilon_0 \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}.$$

Potom máme:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{D}_0 \times \mathbf{v}_r = -\mu_0 \left(\frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \varepsilon_0 \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}\right) \times \mathbf{v}_r = \mathbf{B}^* + \varepsilon_0 \mu_0 v_r^2 \mathbf{B},$$

lebo v poli pohybujúceho sa náboja vektor magnetickej indukcie poľa je na vektor rýchlosti pohybu náboja kolmý. Upravou poslednej rovnice dostávame:

$$\mathbf{B}^* = (1 - \varepsilon_0 \mu_0 v_r^2) \mathbf{B},$$

alebo, keďže — ako vieme — je $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu,

$$\mathbf{B}^* = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{B},$$

keď sme index ,,r'' v symbole rýchlosti náboja q vzhľadom na priestor S' už vynechali.

Ak sme teda pri odvodzovaní rovnice (8) výraz $\frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ považovali za úplné a presne platné vyjadrenie vektora indukcie elektrického poľa v priestore S', vzhľadom na ktorý sa náboj q pohybuje rýchlosťou v_r, dopustili sme sa chyby, ktorá pri všetkých makrofyzikálnych dejoch je zanedbateľná, lebo pri všetkých takýchto dejoch je rýchlosť pohybujúcich sa elektrických nábojov v porovnaní s rýchlosťou svetla vo vákuu veľmi malá.

Podľa našich výsledkov v našom poradí tretia Maxwellova rovnica, rovnica (15), má presnú platnosť, avšak v našom poradí štvrtá Maxwellova rovnica, rovnica (8), má len približnú platnosť, i keď to pri bežných makrofyzikálnych dejoch je bezvýznamné, lebo pri jej odvodzovaní sme sa dopustili istej chyby. V skutočnosti však všetky fyzikálne pozorovania nasvedčujú tomu, že aspoň v inerciálnych priestoroch aj rovnica (8) má presnú platnosť. Nesrovnalosť možno odstrániť len zmenou názorov na priestor a čas, čo je práve hlavným obsahom špeciálnej teórie relativity.

Došlo do redakcie 21. novembra 1953

ПРОСТОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТОКА СМЕЩЕНИЯ МАКСВЕЛЛЯ

ДИОНИЗИЙ ИЛЬКОВИЧ

Выводы

В статье рассматриваются некоторые неясности, которые встречаются в обычной физической литературе в связи с током смещения Максвелля. Дано простое обоснование этого тока в уравнениях электромагнитного поля Максвелля. В заключении показана неизбежность изменения классических взглядов на пространство и время при постройке точной теории электромагнитных процессов согласно специальной теории относительности.