MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS

Ročník III 1953 Číslo 3—4

O DIREKTNOM SÚČINE POLOGRÚP

JÁN IVAN, BRATISLAVA

(Došlo dňa 15. IX. 1953)

Cieľom tohto článku je vyšetrovanie vlastností direktného súčinu pologrúp a rozkladu jednoduchých pologrúp na direktný súčin iných pologrúp.

Najprv uvedieme niektoré základné definície a vety z teórie pologrúp (S c h w a r z [1]).

Pologrupou nazývame každú neprázdnu množinu elementov $a, b, c, \ldots,$ ktorá je uzavretá vzhľadom na nejakú jednoznačnú asociatívnu operáciu (násobenie): $(ab)\,c = a\,(bc)$.

Neprázdnu podmnožinu L pologrupy S nazývame *ľavým ideálom* pologrupy S, ak je splnený vzťah $SL \subseteq L$, t. j. pre ľubovoľné $s \in S$, $l \in L$ platí $sl \in L$. *Pravým ideálom* nazývame podmnožinu R, ktorá spĺňuje podmienku $RS \subseteq S$. *Obojstranným ideálom* nazývame podmnožinu M, ktorá je súčasne ľavým aj pravým ídeálom pologrupy S, t. j. spĺňuje podmienky $SM \subseteq M$, $MS \subseteq M$.

Prenik (ak je neprázdny) aj súčet dvoch ľavých (pravých, obojstranných) ideálov je ľavý (pravý, obojstranný) ideál.

Pologrupa S môže (ale nemusí) obsahovať element z, ktorý má túto vlastnosť: $z \cdot a = a \cdot z = z$ pre každé $a \in S$. Takýto element nazývame *nulou* pologrupy. Pologrupa môže obsahovať najviac jednu nulu.

Ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy S nazývame *minimálnym ideálom* pologrupy S, ak neobsahuje v sebe ako vlastnú podmnožinu už žiadny iný ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy S.

Pologrupa zrejme nemusí obsahovať minimálne ľavé (pravé, obojstranné) ideály.

Dva rôzne ľavé (pravé) minimálne ideály majú prázdny prenik. Pologrupa môže mať najviac jeden minimálny obojstranný ideál.

Nula (ak existuje) je pri našej definícii minimality zrejme jediným existujúcim minimálnym ľavým (pravým, obojstranným) ideálom. V prípade pologrúp s nulou budú teda niektoré vety, hovoriace o minimálnych ideáloch, triviálne.

Pologrupu S, ktorá neobsahuje žiadny obojstranný ideál $M \neq S$, budeme nazývať *jednoduchou pologrupou*.

Teraz dokážeme tri jednoduché vety o minimálnych ideáloch, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Veta 1: *Ľavý ideál L pologrupy S je minimálny vtedy a len vtedy, ak v ňom rovnica $xa = b$ má riešenie pre každé $a \in L$, $b \in L$.*

D ô k a z: Nech L je minimálny ľavý ideál pologrupy S. Vezmime ľubovoľný element $a \in L$. Iste platí:

$$La \subseteq L.$$

Množina La je zrejme tiež ľavým ideálom pologrupy S. Keďže podľa predpokladu ideál L je minimálny, musí platiť:

$$La = L.$$

To znamená: ku každému $a \in L$, $b \in L$ existuje také $x \in L$, že $xa = b$.

Naopak, nech L je ľavý ideál pologrupy S, v ktorom má rovnica $xa = b$ riešenie $x \in L$ pre každé $a \in L$, $b \in L$. Potom je isté pre každé $a \in L$

$$La \supseteq L.$$

Teda je

$$L \subseteq La \subseteq L^2.$$

Keďže je však vždy $L^2 \subseteq L$, je

$$L \subseteq La \subseteq L,$$

t. j.

$$La = L.$$

Predpokladajme, že L nie je minimálny ideál. To znamená, že pologrupa S obsahuje ešte nejaký ľavý ideál $L' \subset L$. Ak $a' \in L'$, potom

$$Sa' \subseteq L'$$

a tým skôr

$$La' \subseteq L'.$$

Ale keďže $a' \in L$, je

$$La' = L.$$

Z toho vyplýva

$$L \subseteq L',$$

čo je spor s predpokladom, že $L' \subset L$. Teda L je minimálny ľavý ideál.

Práve tak sa dokáže:

Veta 1a: *Pravý ideál R pologrupy S je minimálny vtedy a len vtedy, ak v ňom rovnica $ay = b$ má riešenie pre každé $a \in R$, $b \in R$.*

Pre obojstranné ideály platí:

Veta 1b: *Obojstranný ideál M pologrupy S je minimálny vtedy a len vtedy, ak v ňom rovnica $xay = b$ má riešenie pre každé $a \in M$, $b \in M$.*

D ô k a z: Nech M je minimálny obojstranný ideál pologrupy S. Vezmime ľubovoľný element $a \in M$. Pretože M je obojstranný ideál, platí:

$$Ma \subseteq M, \quad aM \subseteq M,$$

teda

$$MaM \subseteq M.$$

Množina MaM je zrejme tiež obojstranný ideál v S. Keďže podľa predpokladu M je minimálny obojstranný ideál, musí platiť:

$$MaM = M.$$

To znamená: ku každej dvojici $a \in M$, $b \in M$ existujú také $x \in M$, $y \in M$, že $xay = b$.

Naopak, nech v obojstrannom ideáli M má rovnica $xay = b$ riešenie pre každé $a \in M$, $b \in M$. To znamená, že pre každé $a \in M$ je

$$MaM \supseteq M.$$

Teda ďalej je

$$M \subseteq MaM \subseteq M^3 \subseteq M,$$

preto je

$$MaM = M.$$

Predpokladajme, že ideál M nie je minimálny. Teda S obsahuje ešte nejaký obojstranný ideál $M' \subset M$. Vezmime ľubovoľný element $a' \in M'$. Platí:

$$Sa' \subseteq M', \quad a'S \subseteq M',$$

teda aj

$$Sa'S \subseteq M'$$

a tým skôr

$$Ma'M \subseteq M'.$$

Ale pretože $M' \subset M$, je $a' \in M$ a teda

$$Ma'M = M,$$

čiže

$$M \subseteq M'.$$

To odporuje predpokladu, že $M' \subset M$. Teda M je minimálny obojstranný ideál pologrupy S.

Definícia: *Nech $S_1 = \{ a_\alpha \}$, $S_2 = \{ b_\beta \}$,* kde *α, β prebiehajú nejaké množiny indexov, sú dve pologrupy. Direktným súčinom týchto pologrúp budeme nazývať množinu S všetkých usporiadaných dvojíc (a_α, b_β), kde a_α prebieha všetky prvky z S_1 a b_β všetky prvky z S_2. Píšeme: $S = S_1 \times S_2$. V tejto množine definujeme násobenie takto:*

$$(a_\alpha, b_\beta) \cdot (a_\gamma, b_\delta) = (a_\alpha a_\gamma, b_\beta b_\delta).$$

Z tejto definície vyplýva hneď:

Veta 2: *Direktný súčin dvoch pologrúp je pologrupa.*

Naskytá sa teraz otázka, ktoré vlastnosti pologrúp sa zachovávajú pri tvorení direktných súčinov a ďalej, aké vlastnosti direktného súčinu sa dajú odvodiť z vlastností jednotlivých faktorov. Nasledujúce vety dávajú na niektoré takéto otázky odpoveď.

Veta 3: *Nech pre* $i = 1,2$ *je* L_i (R_i, M_i) *ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy* S_i. *Potom* $L = L_1 \times L_2$ $(R = R_1 \times R_2, M = M_1 \times M_2)$ *je ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy* $S = S_1 \times S_2$.

Dôkaz: Nech M_1, M_2 sú obojstranné ideály pologrúp $S_1 = \{a_\alpha\}$, $S_2 = \{b_\beta\}$. Označme:

$$M_1 = \{a'_\mu\},\ M_2 = \{b'_\nu\}.$$

μ, ν tu prebiehajú isté podmnožiny množín indexov $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$.

Pre ľubovoľné $(a_\alpha, b_\beta) \in S$ a $(a'_\mu, b'_\nu) \in M = M_1 \times M_2$ platí:

$$(a_\alpha, b_\beta)(a'_\mu, b'_\nu) = (a_\alpha a'_\mu, b_\beta b'_\nu) \in M, \qquad (1)$$

pretože $a_\alpha a'_\mu \in M_1$, $b_\beta b'_\nu \in M_2$.

Súčasne je

$$(a'_\mu, b'_\nu)(a_\alpha, b_\beta) = (a'_\mu a_\alpha, b'_\nu b_\beta) \in M, \qquad (2)$$

pretože $a'_\mu a_\alpha \in M_1$, $b'_\nu b_\beta \in M_2$.

Vzťahy (1), (2) hovoria, že množina $M = M_1 \times M_2$ je súčasne ľavým aj pravým ideálom, teda obojstranným ideálom pologrupy $S = S_1 \times S_2$. Tým je veta pre prípad obojstranných ideálov dokázaná.

Pre ľavé a pravé ideály dokážeme vetu úplne analogicky.

Veta 4a: *Nech* S_i $(i = 1,2)$ *sú dve pologrupy, z ktorých každá má minimálny obojstranný ideál* M_i; *potom*

1. aj direktný súčin $S = S_1 \times S_2$ *má minimálny obojstranný ideál* M,

2. platí $M = M_1 \times M_2$.

Dôkaz: Direktný súčin $M = M_1 \times M_2$ je podľa vety 3 obojstranným ideálom pologrupy $S = S_1 \times S_2$. Treba ešte dokázať, že je minimálny. Na základe vety 1b stačí dokázať, že k ľubovoľným $(a'_\mu, b'_\nu) \in M$, $(a'_\varrho, b'_\sigma) \in M$ existujú také $(a'_\xi, b'_\xi) \in M$ a $(a'_\eta, b'_\eta) \in M$, že

$$(a'_\xi, b'_\xi)(a'_\mu, b'_\nu)(a'_\eta, b'_\eta) = (a'_\varrho, b'_\sigma). \qquad (3)$$

Ukážeme, že také prvky v M skutočne existujú. Podľa predpokladu sú ideály M_1, M_2 minimálne. Teda podľa vety 1b k ľubovoľným $a'_\mu \in M_1$, $a'_\varrho \in M_1$ existujú také $a'_\xi \in M_1$, $a'_\eta \in M_1$, že

$$a'_\xi a'_\mu a'_\eta = a'_\varrho$$

a k ľubovoľným $b'_\nu \in M_2$, $b_\sigma \in M_2$ existujú také $b'_\xi \in M_2$, $b'_\eta \in M_2$, že

$$b'_\xi b'_\nu b'_\eta = b'_\sigma.$$

Teda (a'_ξ, b'_ξ), (a'_η, b'_η) sú z M a iste vyhovujú rovnici (3), č. b. t. d.

Analogicky dokážeme (použitím vety 1):

Veta 4b: *Nech* S_i $(i = 1,2)$ *sú dve pologrupy, z ktorých každá má aspoň jeden minimálny ľavý ideál* L_i. *Potom*

1. aj direktný súčin $S = S_1 \times S_2$ *má aspoň jeden minimálny ľavý ideál,*

2. ideál $L = L_1 \times L_2$ *je minimálny ľavý ideál pologrupy* S.

Podobne znie veta pre minimálne pravé ideály.

Poznámka: Je známe (Schwarz [2]), že pologrupa S bez nuly, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý (pravý) ideál, má aj (jediný) minimálny obojstranný ideál M. Tento minimálny obojstranný ideál M je množinovým súčtom všetkých minimálnych ľavých ideálov L_α danej pologrupy: $M = \sum_\alpha L_\alpha$.

Z toho na základe viet 4a, 4b vyplýva táto veta:

Veta 4c: *Nech sú splnené predpoklady vety 4b. Potom:*

1. Pologrupa $S = S_1 \times S_2$ *má minimálny obojstranný ideál* M.

2. Platí $M = \sum_\alpha L_\alpha \times \sum_\beta L_\beta$, *kde* L_α, *resp.* L_β *prebieha všetky minimálne ideály pologrupy* S_1, *resp.* S_2.

Podobne znie veta aj pre minimálne pravé ideály.

Veta 5a: *Nech* S *je pologrupa, ktorá sa dá písať ako direktný súčin dvoch pologrúp,* $S = S_1 \times S_2$. *Nech* S *má minimálny obojstranný ideál* M. *Potom*

1. aj obidve pologrupy S_1, S_2 *majú minimálny obojstranný ideál* M_1, *resp.* M_2,

2. platí $M = M_1 \times M_2$.

Dôkaz: Nech M je minimálny obojstranný ideál pologrupy S,

$$M = \{(a'_\mu, b'_\nu)\}.$$

Prvky a'_μ tvoria nejakú množinu $M_1 \subseteq S_1$ a prvky b'_ν nejakú množinu $M_2 \subseteq S_2$.

Ak $a'_\varkappa \in M_1$ $a'_\varrho \in M_1$, potom M iste obsahuje dvojicu typu $(a'_\varkappa, b'_\lambda)$ a dvojicu typu (a'_ϱ, b'_σ), kde b'_λ, b'_σ sú niektoré prvky z M_2. Keďže M je minimálny obojstranný ideál v S, existujú podľa vety 1b také prvky $(a'_x, b'_x) \in M$, $(a'_y, b'_y) \in M$, že

$$(a'_x, b'_x)(a'_\varkappa, b'_\lambda)(a'_y, b'_y) = (a'_\varrho, b'_\sigma),$$

t. j.

$$a'_x a_\varkappa a'_y = a'_\varrho,\ b'_x b'_\lambda b'_y = b'. \qquad (4)$$

Prvý zo vzťahov (4) hovorí: Množina M_1 splňuje predpoklad vety 1b, t. j. ku každej dvojici $a'_\varkappa \in M_1$, $a'_\varrho \in M_1$ existujú také $a'_x \in M_1$, $a'_y \in M_1$, že $a'_x a'_\varkappa a'_y = a'_\varrho$. Práve tak dokážeme, že túto vlastnosť má aj množina M_2.

Teraz dokážeme, že $M \supseteq M_1 \times M_2$, t. j. že M obsahuje všetky možné dvojice (a'_μ, b'_ν).

Nech a'_μ je ľubovoľný element z M_1 a b'_ν ľubovoľný element z M_2. Potom M iste obsahuje aspoň jednu dvojicu typu (a'_μ, b'_λ), kde b'_λ je niektorý element z M_2. Podľa práve dokázaného ku $a'_\mu \in M_1$ existujú také $a'_\xi \in M_1$, $a'_\eta \in M_1$, že

$$a'_\xi a'_\mu a'_\eta = a'_\mu$$

a ku $b'_\lambda \in M_2$, $b'_\nu \in M_2$ existujú také $b'_\xi \in M_2$, $b'_\eta \in M_2$, že

$$b' \, b'_\lambda b'_\eta = b'_\nu.$$

Keďže $(a'_\mu, b'_\lambda) \in M$, je:

$$(a'_\xi, b'_\xi)\,(a'_\mu, b'_\lambda)\,(a'_\eta, b'_\eta) \in M.$$

Pretože ale súčin na ľavej strane sa rovná (a'_μ, b'), je:

$$(a'_\mu, b'_\nu) \in M.$$

Tým je dokázané, že $M \supseteq M_1 \times M_2$.

Ostáva ešte dokázať, že M_1 je minimálny obojstranný ideál pologrupy S_1 a M_2 pologrupy S_2. Tým bude zároveň dokázané (vzhľadom na vetu 4a), že je práve

$$M = M_1 \times M_2.$$

Najprv dokážeme, že sú to obojstranné ideály. Keďže M je obojstranný ideál, platí:

$$SM \subseteq M, \quad MS \subseteq M.$$

To znamená, že pre ľubovoľné $(a_\alpha, b_\beta) \in S$ a ľubovoľné $(a'_\mu, b'_\nu) \in M$ platí

$$(a_\alpha, b_\beta)\,(a'_\mu, b'_\nu) = (a_\alpha a'_\mu, b_\beta b'_\nu) \in M, \quad (a'_\mu, b'_\nu)\,(a_\alpha, b_\beta) = (a'_\mu a_\alpha, b'_\nu b_\beta) \in M,$$

t. j.

$$a_\alpha a'_\mu \in M_1, \quad a'_\mu a_\alpha \in M_1,$$
$$b_\beta b'_\nu \in M_2, \quad b'_\nu b_\beta \in M_2,$$

čiže

$$S_1 M_1 \subseteq M_1, \quad M_1 S_1 \subseteq M_1,$$
$$S_2 M_2 \subseteq M_2, \quad M_2 S_2 \subseteq M_2.$$

To však znamená, že M_1 je súčasne ľavý aj pravý, teda obojstranný ideál pologrupy S_1. Podobne M_2 je obojstranný ideál pologrupy S_2.

Tieto ideály sú zrejme minimálne, lebo ako sme dokázali, spĺňujú predpoklad vety 1b. Tým je veta úplne dokázaná.

Analogicky sa dokáže:

Veta 5b: *Nech S je pologrupa, ktorá sa dá písať ako direktný súčin dvoch pologrúp, $S = S_1 \times S_2$. Nech S má aspoň jeden minimálny ľavý ideál L. Potom:*

1. obe pologrupy S_1, S_2 majú tiež aspoň jeden minimálny ľavý ideál L_1, resp. L_2,

2. každý minimálny ľavý ideál L pologrupy S sa dá písať ako direktný súčin $L = L_1 \times L_2$, kde L_1 je istý minimálny ľavý ideál z S_1 a L_2 istý minimálny ľavý ideál z S_2.

Podobne znie veta pre pravé ideály.

P o z n á m k a: Vety 5a, 5b sú obrátením vety 4a a 4b. Na príklade sa dá dokázať, že veta 3 sa nedá všeobecne obrátiť, t. j. predpoklad minimality vo vetách 5a, 5b je podstatný.

Pre konečné pologrupy vyplýva priamo z dokázaných viet:

Veta 6: *Nech S_1, S_2 sú dve konečné pologrupy. Ak pologrupa S_1 obsahuje n_1 a pologrupa S_2 n_2 minimálnych ľavých (pravých) ideálov, potom ich direktný súčin $S = S_1 \times S_2$ obsahuje $n = n_1 \cdot n_2$ minimálnych ľavých (pravých) ideálov.*

Veta 7: *Direktný súčin dvoch jednoduchých pologrúp je jednoduchá pologrupa.*

D ô k a z: Nech S_1, S_2 sú jednoduché pologrupy.

Dokážeme, že $S = S_1 \times S_2$ je jednoduchá pologrupa. Predpokladajme opak: nech S nie je jednoduchá pologrupa. Teda obsahuje aspoň jeden vlastný obojstranný ideál $M \subset S$:

$$M = \{(a'_\mu, b'_\nu)\}.$$

Elementy a'_μ tvoria nejakú množinu $M_1 \subseteq S_1$ a elementy b'_ν množinu $M_2 \subseteq S_2$. V dôkaze vety 5a sme ukázali, že množina M_1 je obojstranným ideálom pologrupy S_1 a množina M_2 pologrupy S_2. Keďže je $M \subset S$, musí byť buď $M_1 \subset S_1$, alebo $M_2 \subset S_2$, alebo oboje súčasne. To je však spor s predpokladom o jednoduchosti faktorov. Teda $S = S_1 \times S_2$ je jednoduchá pologrupa, č. b. t. d.

Veta 8: *Ak jednoduchá pologrupa S sa dá rozložiť na direktný súčin dvoch pologrúp, potom tieto pologrupy sú nevyhnutne jednoduché.*

D ô k a z: Nech S je jednoduchá pologrupa a nech $S = S_1 \times S_2$. Dokážeme, že aj pologrupy S_1, S_2 sú jednoduché. Dokážeme to zase nepriamo. Keby aspoň jedna z nich, napr. S_1 nebola jednoduchá, obsahovala by aspoň jeden vlastný obojstranný ideál $M_1 \subset S_1$. Podľa vety 3 direktný súčin $M_1 \times S_2$ by bol obojstranný ideál pologrupy $S = S_1 \times S_2$. Zrejme by bolo $M_1 \times S_1 \subset S_1 \times S_2 = S$. To však odporuje predpokladu, že S je jednoduchá pologrupa. Teda obidve pologrupy S_1, S_2 sú jednoduché, č. b. t. d.

Lemma: *Každá pologrupa S, ktorá nie je grupou, obsahuje aspoň jeden ľavý alebo pravý ideál $\neq S$.*

D ô k a z: Nech S je pologrupa, avšak nie grupa (teda S obsahuje aspoň dva rôzne elementy). Keď S nemá žiadny ľavý ideál $L \neq S$, to značí, že pre každé $a \in S$ je ľavý ideál Sa rovný S, teda $Sa = S$. To znamená, že v S má rovnica $xa = b$ riešenie pre každé $a \in S$, $b \in S$. Podobne ak pologrupa S nemá ani žiadny pravý ideál $R \neq S$, má v nej rovnica $ay = b$ riešenie pre každé $a \in S$, $b \in S$. Pre množinu S teda okrem predpokladu asociativity platí aj možnosť obojstranného delenia. Podľa známych axióm teórie grúp (pozri napr. K u r o š [1]) je množina takýchto vlastností grupou.

Veta 9: *Ak grupa G sa dá rozložiť na direktný súčin pologrúp, potom tieto pologrupy sú nevyhnutne grupy.*

D ô k a z: Nech $G = S_1 \times S_2$. Keby aspoň jedna z pologrúp S_1, S_2, napr. S_1, nebola grupou, podľa práve dokázanej pomocnej vety by obsahovala aspoň jeden vlastný ideál, napr. ľavý $L_1 \subset S_1$. Podľa vety 3 direktný súčin $L_1 \times S_2$ by bol vlastným ľavým ideálom grupy G. To však nie je možné, lebo grupa zrejme neobsahuje vlastný ideál.

V ďalšom sa budeme zaoberať jednoduchými pologrupami bez nuly, ktoré obsahujú aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál. O takýchto pologrupách vieme (S c h w a r z [2]), že sú množivým súčtom navzájom izomorfných disjunktných grúp. Každá z týchto grúp je prenikom niektorého minimálneho ľavého s niektorým minimálnym pravým ideálom. Grupu, ktorá je s týmito grupami izomorfná, budeme volať *grupovým komponentom* pologrupy S.

Podľa vety 4b a vety 7 aj direktný súčin takýchto pologrúp je jednoduchá pologrupa bez nuly a obsahuje aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál, teda je tiež množinovým súčtom izomorfných grúp. Je otázne, či aj grupový komponent pologrupy $S = S_1 \times S_2$ bude izomorfný direktnému súčinu grupových komponentov pologrúp S_1, S_2. Kladnú odpoveď na túto otázku dáva táto veta:

Veta 10: *Nech S_1, S_2 sú jednoduché pologrupy bez nuly, z ktorých každá má aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál. Nech G_1 je grupový komponent pologrupy S_1 a G_2 pologrupy S_2. Potom ich direktný súčin $G = G_1 \times G_2$ je izomorfný grupovému komponentu pologrupy $S = S_1 \times S_2$.*

D ô k a z: Nech $G_1 = L_i' \cap R_j'$, $G_2 = L_k'' \cap R_l''$, kde L_i', R_j' sú minimálne ideály v S_1 a L_k'', R_l'' minimálne ideály v S_2. Z vety 4b vieme, že $L = L_i' \times L_k''$ je minimálny ľavý a $R = R_j' \times R_l''$ minimálny pravý ideál v pologrupe $S = S_1 \times S_2$. Stačí dokázať, že $L \cap R = G_1 \times G_2 = G$.

Nech (a, b) je ľubovoľný element z G, $(a, b) \in G$, teda $a \in G_1$, $b \in G_2$, t. j.

$$a \in L_i' \cap R_j', \quad b \in L_k'' \cap R_l''.$$

Teda

$$a \in L_i', \quad b \in L_k''$$
$$a \in R_j', \quad b \in R_l''.$$

To však znamená, že:

$$(a, b) \in L_i' \times L_k'' = L$$

a zároveň

$$(a, b) \in R_j' \times R_l'' = R.$$

Teda $(a, b) \in L \cap R$. Tým sme dokázali, že:

$$G \subseteq L \cap R. \tag{5}$$

Naopak, nech (a, b) je ľubovoľný element z $L \cap R$, $(a, b) \in L \cap R$. Potom je:

$$(a, b) \in L = L_i' \times L_k'',$$
$$(a, b) \in R = R_j' \times R_l''.$$

Z toho vyplýva, že:

$$a \in L_i', \quad b \in L_k''$$

a zároveň

$$a \in R_j', \quad b \in R_l''.$$

To však znamená, že:

$$a \in L_i' \cap R_j' = G_1, \quad b \in L_k'' \cap R_l'' = G_2.$$

Teda $(a, b) \in G_1 \times G_2 = G$ a teda platí:

$$L \cap R \subseteq G. \tag{6}$$

Zo vzťahov (5), (6) vyplýva:

$$G = L \cap R, \text{ č. b. t. d.}$$

Priamym dôsledkom tejto vety je:

Veta 11: *Nech S_1, S_2 sú konečné jednoduché pologrupy bez nuly. Nech prvá z nich je množinovým súčtom g a druhá množinovým súčtom g_2 grúp. Potom ich direktný súčin $S = S_1 \times S_2$ je množinovým súčtom $g = g_1 g_2$ navzájom izomorfných, disjunktných grúp.*

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava

L i t e r a t ú r a

S c h w a r z Št.: [1] Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave, č. 6 (1943), 1—64.

Ш в а р ц Шт.: [2] Структура простых полугрупп без нуля, Чехословацкий математический журнал, т. 1 (76), 1951, 51—65.

К у р о ш А. Г.: [1] Теория групп, 2. изд. 1953.

О ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОЛУГРУПП

Я. ИВАН

ВЫВОДЫ

В настоящей статье исследуются некоторые свойства прямого произведения полугрупп, именно простых полугрупп без нуля. При этом полугруппа называется *простой* если она не имеет отличных от неё самой двусторонних идеалов. Между прочим доказываются например следующие теоремы:

A: Пусть S_i $(i = 1,2)$ две полугруппы, из которых каждая имеет по меньшей мере один минимальный левый идеал L_i. Потом

1. прямое произведение $S = S_1 \times S_2$ имеет тоже по меньшей мере один минимальный левый идеал,

2. идеал $L = L_1 \times L_2$ является минимальным левым идеалом полугруппы S.

Б: Пусть S полугруппа, которую можно писать как прямое произведение двух полугрупп $S = S_1 \times S_2$. Пусть S имеет по меньшей мере один минимальный левый идеал L. Потом

1. обе полугруппы S_1, S_2 имеют тоже по меньшей мере один минимальный левый идеал L_1, или же L_2,

2. каждый минимальный левый идеал L полугруппы S можно писать как прямое произведение $L = L_1 \times L_2$, где L минимальный левый идеал полугруппы S_1 а L_2 минимальный левый идеал полугруппы S_2.

В: Прямое произведение двух простых полугрупп является тоже простой полугруппой.

Г: Если простая полугруппа S разложимая в прямое произведение двух полугрупп, то эти полугруппы необходимо простые.

Остальные теоремы имеют более специальный характер.