O NĚKTERÝCH PROJEKTIVNÍCH INVARIANTECH PLOCHY

F. VYČICHLO, Praha

V následujících řádcích ukážeme, jak souvisí známé projektivní diferenciální invarianty plochy, závislé na okolí různých řádů bodu, s algebraickou plochou, která aproximuje vyšetřovanou analytickou plochu v bodě. Z rovnic projektivních kovariantů, které odvodíme na základě geometrických definic, je ihned patrný řád okolí bodu plochy, na němž je kovariant závislý.

Zvolme uvažovaný bod plochy za souřadnicový vrchol O_4, vrcholy O_1 a O_2 zvolme na asymptotických tečnách plochy, které procházejí bodem O_4. Algebraická plocha Π, která aproximuje danou plochu Φ o rovnici

$$\frac{x_3}{x_4} = F\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right),$$

kde F je regulární funkce v okolí O_4, v bodě O_4 až do okolí n-tého řádu včetně, bude mít rovnici

$$x_4^{n-1} x_3 + x_4^{n-2} p_2 + \ldots + p_n = 0, \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned} p_2 &= b x_1 x_2, \\ p_3 &= a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^3, \\ p_4 &= \alpha_1 x_1^4 + \beta_1 x_1^3 x_2 + \ldots + \alpha_2 x_2^4. \end{aligned}$$

Tuto rovnici dostaneme, napíšeme-li pro danou plochu Taylorův rozvoj pro okolí bodu O_4 a uvažujeme o prvních n členech.

Definice 1. *Buď α tečná rovina plochy $\Pi\,(\Phi)$ v bodě O_4 a k buď průsečná kubika roviny α s kubickou polární plochou bodu O_4 k ploše Π. Spojnice bodu O_4 s inflexními body kubiky k nazýváme Darbouxovými tečnami plochy $\Pi\,(\Phi)$.*[1]

Věta 1. *Darbouxovy tečny plochy Π v bodě O_4 vyhovují rovnici*

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 = 0. \tag{2}$$

D ů k a z: Kubická polární plocha plochy Π pro bod O_4 má rovnici

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\, x_4^2 x_3 + (n-2)\, x_4 p_2 + p_3 = 0. \tag{3}$$

[1] F u b i n i—Č e c h: *Introduction á la géométrie projective différentielle des surfaces*, 1931, str. 53.

Průsečná kubika této polární plochy s rovinou tečnou $x_3 = 0$ je

$$(n-2)\, b x_1 x_2 x_4 + a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^3 = 0. \tag{4}$$

Inflexní přímka této kubiky má rovnici

$$(n-2)\, b x_4 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0. \tag{5}$$

Z posledních dvou rovnic plyne výsledek.

Věta 2. *Protněme plochu Π kvadratickou plochou tak, aby průsečná křivka měla v bodě O_4 trojnásobný bod, jehož dvě tečny splývají s přímkou*

$$x_1 - k x_2 = 0. \tag{6a}$$

Potom zbývající tečna má rovnici

$$k^2 a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0. \tag{6b}$$

Mezi přímkami (6a), (6b) *procházejícími bodem O_4 je tedy příbuznost* (1, 2). *Samodružné přímky této příbuznosti jsou tečny Darbouxovy.*

D ů k a z: Rovnice kvadratické plochy, která se dotýká plochy Π v bodě O_4 jest

$$x_3 x_4 - q_2 = 0. \tag{7}$$

Vyloučíme-li x_4 ze (7) a (1), dostaneme rovnici průmětu průsečné křivky z bodu O_4. Poněvadž průsečná křivka l má v bodě O_4 trojnásobný bod, rozpadne se průmět l^* v přímku $x_3 = 0$ a v další křivku. Musí tedy býti

$$p_2 + q_2 = x_3 (\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3). \tag{8}$$

Rovnice tečen v trojnásobném bodě křivky l v O_4 je tedy

$$a_1 x_1^3 + (b_1 - \lambda b)\, x_1^2 x_2 + (b_2 - \mu b)\, x_1 x_2^2 + a_2 x_2^3 = 0. \tag{9}$$

Podmínka, aby dvě z těchto přímek splynuly s přímkou $x_1 = k x_2$, je

$$b_1 - \lambda b = \frac{-2 a_1 k^3 + a_2}{k^2}, \quad b_2 - \mu b = \frac{a_1 k^3 - 2 a_2}{k}. \tag{10}$$

Dosazením (10) do (9) vyplývá

$$(k^2 a_1 x_1 + a_2 x_2)(x_1 - k x_2)^2 = 0.$$

Rovnice (6b) je tím odvozena. Přímka (6a) splyne s (6b), když a jen když $a_1 k^3 + a_2 = 0$.

Definice 2. *Kvadratická plocha, která plochu $\Pi(\Phi)$ protíná v křivce mající v bodě O_4 trojnásobný bod s tečnami Darbouxovými, se jmenuje Darbouxova kvadrika plochy $\Pi(\Phi)$ v bodě O_4.*[2]

Věta 3. *Darbouxovy kvadriky plochy $\Pi(\Phi)$ v bodě O_4 tvoří svazek, jehož rovnice je:*

$$b\,(x_3 x_4 + b x_1 x_2) - x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \nu x_3) = 0. \tag{11}$$

[2] Viz [1].

D ů k a z: Aby rovnice (9) vyjadřovala tečny Darbouxovy, je nutno a stačí, aby platilo

$$b_1 - \lambda b = 0, \quad b_2 - \mu b = 0. \tag{12}$$

Rovnice (12) s rovnicemi (8) a (7) dávají rovnici hledanou (11).

Věta 4. *Buď dána algebraická křivka rovnicí*

$$x_3^{n-1} x_2 + x_3^{n-2} r_2 + x_3^{n-3} r_3 + \ldots + r_n = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} r_2 &= m x_1^2 + n x_1 x_2 + p x_2^2, \\ r_3 &= M_1 x_1^3 + N_1 x_1^2 x_2 + N_2 x_1 x_2^2 + M_2 x_2^3, \\ r_4 &= \mu_1 x_1^4 + \ldots + \mu_2 x_2^4. \end{aligned} \tag{13}$$

. . . .

Rovnice kuželosečky, která má s křivkou v bodě O_3 pětibodový styk, je

$$x_2 x_3 - A x_1^2 - B x_1 x_2 - C x_2^2 = 0, \tag{14}$$

kde

$$A = -m, \quad B = -n + \frac{M_1}{m}, \quad C = -p + \frac{N_1}{m} - n\frac{M_1}{m^2} + \frac{M_1^2}{m^3} - \frac{\mu_1}{m^2}. \tag{15}$$

D ů k a z: Kuželosečku, která v bodě O_3 se dotýká křivky (13), lze vyjádřit parametricky takto:

$$x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = A + Bt + Ct^2. \tag{16}$$

Dosadíme-li výrazy (16) do (13), dostaneme rovnici pro parametry průsečíků. Pro pětibodový styk v O_3 musí výsledná rovnice mít nulové výrazy při t^2, t^3 a t^4. Tím dostaneme tři rovnice pro A, B, C, jichž řešením jsou výrazy (15), které jsme uvedli ve větě.

Věta 5. *Označme t tečnu v bodě O_4 plochy $\Pi(\Phi)$, která je různá od tečny asymptotické. Proložme tečnou t rovinu α a sestrojme v ní kuželosečku, která má v bodě O_4 pětibodový styk (styk čtvrtého řádu) s řezem plochy rovinou α. Otáčí-li se rovina α kolem osy t, vyplňují kuželosečky t. zv. Moutardovou kvadriku v bodě O_4 příslušnou tečně t.*[3]

Je-li rovnice plochy Π

$$x_4^{n-1} x_3 + x_4^{n-2} P_2 + x_4^{n-3} P_3 + \ldots + P_n = 0, \tag{17}$$

kde

$$P_2 = x_1^2 v_{20} + x_1 v_{21} + v_{22}, \quad P_3 = x_1^3 v_{30} + x_1^2 v_{31} + x_1 v_{32} + v_{33},$$
$$P_4 = x_1^4 v_{40} + \ldots, \ \ldots$$

pak rovnice Moutardovy kvadriky v bodě O_4, která přísluší k tečně $O_1 O_4$, je

$$x_4 x_3 + x_1^2 v_{20} + x_1 \left(v_{21} - \frac{v_{30}}{v_{20}} x_3 \right) + \left(v_{22} - \frac{v_{20} v_{31} - v_{30} v_{21}}{v_{20}^2} x_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{v_{20} v_{40} - v_{30}^2}{v_{20}^3} x_3^2 \right) = 0. \tag{18}$$

[3] F u b i n i—Č e c h: loc. cit. str. 111.

D ů k a z: Protněme plochu Π o rovnici (17) rovinou

$$x_3 - \lambda x_2 = 0. \tag{19}$$

Průsečná křivka má rovnici

$$\lambda x_4^{n-1} x_2 + x_4^{n-2}[x_1^2 v_{20} + x_1 x_2 v_{21}(1,\lambda) + x_2^2 v_{22}(1,\lambda)] + x_4^{n-3}[x_1^3 v_{30} + x_1^2 x_2 v_{31}(1,\lambda) + \dots] + x_4^{n-4}[x_1^4 v_{40} + \dots] + \dots = 0. \tag{20}$$

Poněvadž přímka $O_4 O_1$ není asymptotická, je $v_{20} \neq 0$.

Rovnice kuželosečky, která má s křivkou (20) pětibodový styk, je podle věty 4

$$x_4 x_2 = -x_1^2 \frac{v_{20}}{\lambda} + x_1 x_2 \left[-\frac{v_{21}(1,\lambda)}{\lambda} + \frac{v_{30}}{v_{20}}\right] + x_2^2\left[-\frac{v_{32}(1,\lambda)}{\lambda} + \frac{v_{31}(1,\lambda)}{v_{20}} - \frac{v_{30} v_{21}(1,\lambda)}{v_{20}^2} + \frac{v_{30}}{v_{20}^3}\lambda - \frac{v_{40}}{v_{20}^2}\lambda\right]. \tag{21}$$

Eliminujeme-li λ z rovnic (19) a (21), dostaneme rovnici (18).

Věta 6. *Moutardova kvadrika plochy Π v bodě O_4 příslušná tečně t protíná plochu Π v křivce, která má v bodě O_4 trojnásobný bod, jehož dvě tečny splývají s přímkou t.*

D ů k a z: Rovnici (18) Moutardovy kvadriky plochy π určené rovnicí (17) pišme ve tvaru

$$x_3 x_5 - Q_2 = 0.$$

Průsečná křivka má průmět z bodu O_4, splňující rovnici

$$Q_2^{n-2}(P_2 + Q_2) + Q_2^{n-3} P_3 x_3 + \dots + P_n x_3^{n-2} = 0, \tag{22}$$

při tom je:

$$P_2 + Q_2 = x_3\left[\frac{v_{30}}{v_{20}} x_1 + \frac{v_{20} v_{31} - v_{30} v_{21}}{v_{20}^2} - \frac{v_{20} v_{40} - v_{30}^2}{v_{20}^3} x_3\right].$$

Průmět (22) se tedy rozpadá v přímku $x_3 = 0$ a v další součást a tedy O_4 je trojnásobný bod křivky. Rovnice tečen v bodě O_4 je:

$$-P_2(x_1, x_2, 0)\left[\frac{v_{30}}{v_{20}} x_1 + \frac{v_{20} v_{31}(x_2, 0) - v_{30} v_{21}(x_2, 0)}{v_{20}^2}\right] + P_3(x_1, x_2, 0) = 0. \tag{23}$$

Je-li

$$P_2(x_1, x_2, 0) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2,$$

$$P_3(x_1, x_2, 0) = A_1 x_1^3 + B_1 x_1^2 x_2 + B_2 x_1 x_2^2 + A_2 x_2^3$$

a asymptotické tečny v bodě O_4 jsou harmonicky sdružené k souřadnicovým hranám $O_1 O_4$, $O_2 O_4$, pak $b = 0$ a rovnice (23) bude:

$$(-a x_1^2 - c x_2^2)\left(\frac{A_1}{a} x_1 + \frac{B_1}{a} x_2^2\right) + A_1 x_1^3 + B_1 x_1^2 x_2 + B_2 x_1 x_2^2 + A_2 x_2^3 = 0,$$

nebo

$$x_2^2[x_1(aB_2 - cA_1) - x_2(cB_1 - aA_2)] = 0.$$

Definice 3. *Buď α tečná rovina plochy Π v bodě O_4. Každému bodu M roviny α přísluší vzhledem k Moutardově kvadrice bodu O_4 a tečně O_4M (resp. tečně O_4M' konjugované k tečně O_4M) polární rovina μ. Toto přiřazení nazýváme korespondencí Moutardovou* (resp. Segreho).[4]

Věta 7. *Body roviny α, jimž v korespondenci Moutardově* (Segreho) *přísluší jejich polární roviny k Darbouxovým kvadrikám, leží na Darbouxových tečnách bodu O_4.*

D ů k a z: Plochu Π opět určíme rovnicí (1). Přímku O_4M označme t, k ní konjugovanou označme t_1. Jejich rovnice jsou $x_1 = \pm k x_2$, při tom znamení + platí pro přímku t. Moutardovu kvadriku k tečně t (t_1) označme Q_t (Q_{t_1}). Kvadrika Q_t (Q_{t_1}) protíná podle věty 6 plochu Π v křivce, která má v bodě O_4 trojnásobný bod, jehož dvě tečny splynou s přímkou t (t_1). Podle důkazu věty 2 patří Q_t (Q_{t_1}) do svazku ploch

$$x_4 x_3 + b x_1 x_2 - x_3(\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3) = 0,$$

kde

$$b_1 - \lambda b = \frac{\mp 2a_1 k^3 + a_2}{k^2}, \quad b_2 - \mu b = \frac{a_1 k^3 \mp 2a_2}{k}. \tag{24}$$

Bod M ($k y_2$, y_2, 0, y_4) má vzhledem ke kvadrice Q_t (Q_{t_1}) polární rovinu

$$k y_2(b x_2 - \lambda x_3) + y_2(b x_1 - \mu x_3) + y_4 x_3 = 0 \tag{25}$$

a vzhledem ke kvadrikám Darbouxovým určeným větou 3 má polární rovinu

$$k y_2(b^2 x_2 - b_1 x_3) + y_2(b^2 x_1 - b_2 x_3) + b y_4 x_3 = 0. \tag{26}$$

Vyjádříme-li, aby rovnice (25) a (26) představovaly tutéž rovinu, dostaneme

$$k(b\lambda - b_1) + b\mu - b_2 = 0.$$

Po dosazení za λ a μ z rovnice (24) dostaneme:

$$a_1 k^3 + a_2 = 0,$$

což znamená, že bod M leží na Darbouxově tečně.

Definice 4. *Označme k_π (k_φ) průsečnou křivku plochy $\Pi(\Phi)$ s tečnou rovinou α bodu O_4. Racionální kubika k_3, která má v bodě O_4 dvojnásobný bod a s každou větví křivky k_π (k_φ) v bodě O_4 čtyrbodový* (třetího řádu) *styk, se nazývá Strazzeriho kubika plochy $\Pi(\Phi)$ v bodě O_4. Inflexní přímka kubiky k_3 se jmenuje druhá hrana Greenova plochy $\Pi(\Phi)$ v bodě O_4. Přímka polárně sdružená k této přímce vzhledem k Darbouxovým kvadrikám se jmenuje první hrana Greenova.*[5]

[4] F u b i n i—Č e c h, loc. cit. str. 109 a další.
[5] F u b i n i—Č e c h, loc. cit. str. 100.

Věta 8. *Rovnice Strazzeriho kubiky plochy Π určené rovnicí* (1) *v bodě O_4 je:*

$$x_1x_2x_4 + \frac{a_1}{b}x_1^3 + \left(\frac{b_1}{b} - \frac{\alpha_1}{a_1}\right)x_1^2x_2 + \left(\frac{b_2}{b} - \frac{\alpha_2}{a_2}\right)x_1x_2^2 + \frac{a_2}{b}x_2^3 = 0. \quad (27)$$

Rovnice druhé hrany Greenovy je tedy

$$x_4 + \left(\frac{b_1}{b} - \frac{\alpha_1}{a_1}\right)x_1 + \left(\frac{b_2}{b} - \frac{\alpha_2}{a_2}\right)x_2 = 0. \quad (28)$$

Důkaz: Rovina $x_3 = 0$ seče plochu π v křivce

$$bx_4^{n-2}x_1x_2 + x_4^{n-3}p_3(x_1, x_2) + \ldots + p_n(x_1, x_2) = 0. \quad (29)$$

Kubika k_3, která má O_4 za bod dvojnásobný s tečnami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, má rovnici

$$x_4x_1x_2 - (A_1x_1^3 + B_1x_1^2x_2 + B_2x_1x_2^2 + A_2x_2^3) = 0, \quad (30a)$$

nebo rovnice parametrické

$$x_1 = t,\ x_2 = t^2,\ x_4 = A_1 + B_1t + B_2t^2 + A_2t^3. \quad (30b)$$

Dosadíme-li (30b) do rovnice (29), dostaneme rovnici pro parametry průsečných bodů:

$$t^3(A_1b + a_1)A_1^{n-3} + t^4[(n-2)A_1B_1b + (n-3)B_1a_1 + A_1b_1 +$$
$$+ \alpha_1]A_1^{n-4} \ldots + t^{3n-4}[(n-2)A_2B_2b + (n-3)B_2a_2 + A_2b_2 +$$
$$+ \alpha_2]A_2^{n-4} + t^{3n-3}(A_2b + a_2)A_2^{n-3} = 0. \quad (31)$$

Aby kubika (30a) měla s každou větví křivky (29) v bodě O_4 čtyrbodový styk, je nutné a stačí, aby koeficienty při t^3, t^4, t^{3n-4}, t^{3n-3} v rovnici (31) byly rovny nule. Z těchto rovnic určíme A_1, A_2, B_1, B_2 a dostaneme rovnici (27).

Věta 9. *Označme k_π (k_Φ) průsečnou křivku plochy $\Pi(\Phi)$ s tečnou rovinou α bodu O_4. Označme dále k_π^i (k_Φ^i) větev k_π křivky (k_Φ), jež se dotýká asymptotické tečny t_i a konečně označme c_i kuželosečku, která má alespoň čtyrbodový* (třetího řádu) *styk s větví k_π^i (k_Φ^i). Sestrojme póly P_i přímek t_j ($j \neq i = 1,2$) vzhledem ke kuželosečkám c_i. Potom platí: Přímka P_1P_2 je druhá hrana Greenova plochy $\Pi(\Phi)$ v bodě O_4.*

Důkaz: Plocha Π buď dána rovnicí (1). Průsečná křivka k_π má rovnici (29). Označme $t_1 \equiv x_2 = 0$, $t_2 \equiv x_1 = 0$.

Kuželosečka c_1 má rovnici

$$x_2x_4 = -\frac{a_1}{b}x_1^2 + \left(-\frac{b_1}{b} + \frac{\alpha_1}{a_1}\right)x_1x_2 + \gamma x_2^2$$

a kuželosečka c_2 má rovnici

$$x_1x_4 = -\frac{a_2}{b}x_2^2 + \left(-\frac{b_2}{b} + \frac{\alpha_2}{a_2}\right)x_1x_2 + \gamma_1x_1^2.$$

Póly přímek t_1 a t_2 mají souřadnice

$$P_1\left[y_1 : y_2 : y_4 = 1 : 0 : \left(-\frac{b_1}{b} + \frac{\alpha_1}{a_1}\right)\right],\quad P_2\left[z_1 : z_2 : z_4 = 0 : 1 : \left(-\frac{b_2}{b} + \frac{\alpha_2}{a_2}\right)\right].$$

Přímka P_1P_2 má rovnici

$$x_4 + \left(\frac{b_1}{b} - \frac{\alpha_1}{a_1}x_1\right) + \left(\frac{b_2}{b} - \frac{\alpha_2}{a_2}\right)x_2 = 0,$$

což je rovnice (28).

Došlo do redakcie 3. IV. 1953.

О НЕКОТОРЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ИНВАРИАНТАХ ПЛОСКОСТОЙ

ВЫЧИХЛО Ф.

Выводы

В статье выведены известные дифференциальные инварианты поверхности, их свойства и соотношения между ними (например касательные Дарбу, квадрики Мутарда, кубики Стразери, грани Грина).

Автор проводит апроксимацию рассматриваемой аналитической поверхности в точке алгебраической поверхностью. Алгебраические проективные свойства вспомагательной поверхности доставляют проективные коварианты исследуемой поверхности. Коварианты определены геометрически и определены их уравнения, из которых явный порядок окрестности точки поверхности, от которой ковариант зависим.