MAXIMÁLNE IDEÁLY A ŠTRUKTÚRA POLOGRÚP

Š. SCHWARZ, Bratislava

Pod pologrupou rozumieme neprázdnu množinu elementov $S = \{a, b, c, \ldots\}$, medzi ktorými je definované násobenie splňujúce tieto axiómy:

1. Ku každej dvojici elementov $a, b \in S$ existuje taký jediný element c, že je $a\,b = c$. Element c nazývame súčinom elementov a, b v tomto poradí.
2. Platí asociatívny zákon: $(a\,b)c = a\,(b\,c)$.

Pologrupa je teda zovšeobecnením dnes už klasického pojmu grupy, ktorý sa ukázal byť základným matematickým pojmom.

Systematické štúdium pologrúp si vyžiadaly jednak potreby abstraktnej algebry, jednak však aj iných matematických disciplín, najmä funkcionálnej analýzy. Toto je pomerne mladý odbor matematiky, ktorý — ako sa zdá — zostane aj niekoľko ďalších desaťročí stredom záujmu matematikov. Treba poznamenať, že metódy funkcionálnej analýzy našly v modernej fyzike a v rade technických disciplín celý rad aplikácií, pretože ide o zovšeobecnenie a spresnenie celých komplexov otázok klasickej matematickej analýzy.

V tejto práci budeme študovať vlastnosti pologrúp s hľadiska algebraického.

Pojem pologrupy sa objavil v rôznych matematických disciplínach už dávnejšie. Začiatok skutočne systematického štúdia teórie pologrúp s algebraického hľadiska pochádza od sovietskeho matematika Suškeviča (A. K. Сушкевич). (Soznam jeho prác z tohto odboru pozri v autorovom referáte [1], str. 112—113.) Ďalšími cennými príspevkami teóriu obohatili Rees a Clifford. (Soznam všetkých ich prác z tohto odboru pozri v autorovej práci [4], str. 300—301.)

V poslednej dobe sa štúdiom pologrúp veľmi intenzívne zaoberá leningradský matematik E. S. Ljapin (E. C. Ляпин). V prácach [1] — [5] zaviedol celý rad nových veľmi osožných pojmov. Pod jeho vplyvom bol vypracovaný rad ďalších prác mladších sovietskych autorov, z ktorých časť ešte nebola publikovaná. O ich existencii viem iba zo zprávy z konferencie o algebre a teórii čísel uverejnenej v časopise *Uspechi matematičeskich nauk* (Успехи математических наук).

Predložená práca — ako to v ďalšom ešte vyložíme — nadväzuje na poslednú autorovu prácu [5] a na práve vyšlú prácu sovietskeho matematika N. N. Vorobjeva (Н. Н. Воробьев).

Poznámka. V práci budeme užívať toto označenie. Symbol $A \subset B$ značí (na rozdiel od symbolu $A \subseteq B$), že A je *vlastnou* podmnožinou B. Súčet dvoch množín A, B budeme označovať znakom $\{A, B\}$ alebo znakom $A + B$. Rovnaký význam má symbol $\sum_\alpha A_\alpha$. Symbol $A - B$ značí rozdiel množín A, B. Znak $\emptyset$ značí prázdnu množinu. Znak $[a]$ bude značiť hlavný obojstranný ideál vytvorený elementom a. Znak $[0]$ značí nulový ideál. Význam symbolu S/M vyložíme neskôr. Ostatné označenia majú obvyklý význam.

1.

Pripomenieme najprv niektoré jednoduché fakty; ich podrobné dôkazy nájde čitateľ napr. v autorovej práci [2].

Neprázdnu podmnožinu $l \subseteq S$ nazývame ľavým ideálom z S, ak v smysle obvyklého násobenia komplexov je $Sl \subseteq l$. Pravým ideálom nazývame podmnožinu $r \subseteq S$, pre ktorú platí $rS \subseteq r$. Obojstranným ideálom nazývame množinu, ktorá je súčasne pravým aj ľavým ideálom.

Množinový súčet dvoch ľavých (pravých, obojstranných) ideálov je ľavý (pravý, obojstranný) ideál. Podobne prenik dvoch ľavých (pravých, obojstranných) ideálov (ak je tento neprázdny) je ideálom rovnakého druhu.

Pologrupa môže (ale nemusí) obsahovať element z tej vlastnosti, že pre každé $x \in S$ je $zx = xz = z$. Taký element nazývame nulovým elementom pologrupy. Existuje najviac jeden. Bez obáv z nedorozumenia budeme nulový element v ďalšom označovať znakom 0.

Celá pologrupa a nulový ideál (ak taký jestvuje) sú príkladmi obojstranných ideálov.

Ľavý (pravý) ideál pologrupy sa nazýva minimálnym ľavým (pravým) ideálom z S, ak neobsahuje vlastnú podmnožinu, ktorá je sama ľavým (pravým) ideálom z S. Pologrupa nemusí prirodzene obsahovať minimálne ľavé (pravé) ideály. Ľahko sa dokáže:

a) Prenik dvoch rôznych ľavých (pravých) minimálnych ideálov je prázdny.

b) Pologrupa má najviac jeden minimálny obojstranný ideál $\mathfrak{n}$. Množina $\mathfrak{n}$ je potom podmnožinou každého obojstranného ideálu z S a dá sa definovať tiež ako prenik všetkých obojstranných ideálov z S. Často sa nazýva Suškevičovým jadrom.

Ak má pologrupa nulový element 0, sú vety a), b) — pravda — triviálne. Nulový ideál [0] je potom totiž jediným ľavým (pravým, obojstranným) minimálnym ideálom. V tomto prípade je výhodné rozumieť pod minimálnym ideálom (podobne ako v teórii okruhov) taký ideál, ktorý okrem

nulového ideálu neobsahuje v sebe žiaden iný vlastný podideál rovnakého druhu. Potom platia tieto vety:

a) Dva rôzne minimálne ľavé (pravé) ideály majú za prenik nulový ideál [0].

b) Pologrupa môže mať viac (i nekonečne mnoho) minimálnych obojstranných ideálov.

Na celkom jednoduchom príklade sa však možno presvedčiť, že minimálny obojstranný ideál $\mathfrak{n}$ nemusí existovať. Nech je napr. $S = \{1, 2, 3 \ldots\}$ pologrupa celých kladných čísel, pričom násobením rozumejme obyčajné násobenie čísel. Potom postupnosť (obojstranných) ideálov

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots\} \supset \{4, 8, 12, \ldots\} \supset \{8, 16, 24, \ldots\} \supset \ldots$$

má zrejme prázdny prenik. Teda Suškevičovo jadro neexistuje.

Hlavným ľavým ideálom vytvoreným elementom a voláme ideál $l = \{a, Sa\}$. Hlavným pravým ideálom vytvoreným elementom a voláme pravý ideál $r = \{a, aS\}$. Hlavným obojstranným ideálom vytvoreným elementom a voláme ideál $m = [a] = \{a, aS, Sa, SaS\}$. Obecne sú prirodzene ideály l, r, m navzájom rôzne.

Pologrupa môže mať najviac jeden jednotkový element, t. j. element $e \in S$, ktorý pre každé $x \in S$ splňuje rovnicu $ex = x \cdot e = x$. Hlavný ideál (ľavý, pravý, obojstranný) vytvorený elementom e je zrejme celá pologrupa S.

Pologrupa môže mať aj viac (aj nekonečne mnoho) ľavých jednotiek, t. j. elementov $e_l \in S$, ktoré pre každé $x \in S$ splňujú vzťah $e_l x = x$. Podobne môže existovať viac (aj nekonečne mnoho) pravých jednotiek, t. j. elementov $e_r \in S$, ktoré pre každé $x \in S$ splňujú rovnicu $xe_r = x$. Ľavý ideál vytvorený pravou jednotkou e_r je zrejme celá pologrupa. (Je totiž $\{e_r, Se_r\} = \{e_r, S\} = S$.) Podobne pravý ideál vytvorený ľavou jednotkou je celá pologrupa S.

2.

Prejdime teraz k niektorým ďalším špeciálnejším pojmom, ktorých štúdium bude tvoriť bezprostredný obsah tejto práce.

Definícia 2,1. *Ideál (ľavý, pravý, obojstranný) pologrupy S nazývame maximálnym ideálom pologrupy S, ak sa nerovná celej pologrupe S, ale nie je vlastnou podmnožinou žiadneho iného ideálu rovnakého druhu.*

Pologrupa môže mať viac maximálnych (ľavých, pravých, obojstranných) ideálov. Na nasledujúcich príkladoch poukážeme na niektoré okolnosti, ktoré sa pritom môžu vyskytnúť.

Príklad 2,1. Nech S je pologrupa čísel $S = \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$. Násobením rozumejme násobenie čísel (mod 6). Hlavné ideály sú:

$$[0], [1] = [5] = S, [2] = [4] = \{0, 2, 4\}, [3] = \{0, 3\}.$$

Jediný existujúci maximálny ideál je $m = [2] + [3] = \{0, 2, 3, 4\}$. Elementy 1 a 5 nie sú v maximálnom obojstrannom ideále. Z príkladu vidieť, že nie každú pologrupu možno pokryť maximálnymi ideálmi.

P r í k l a d 2,2. Nech S je pologrupa, ktorej elementmi sú čísla $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ a násobením rozumieme násobenie (mod 12). Existujú dva maximálne (obojstranné) ideály $m_1 = \{0, 2, 4, 8\}$ a $m_2 = \{0, 4, 6, 8\}$. Ich množinovým súčtom je celá pologrupa: $\{m_1, m_2\} = S$.

P r í k l a d 2,3. Nech S je pologrupa čísel $S = \{0, 1, \ldots, 4\}$, kde pod násobením rozumieme násobenie (mod 5). Je zrejmé, že existuje jediný ideál rôzny od S, totiž [0]. Teda aj nulový ideál môže byť maximálnym.

P r í k l a d 2,4. Nech $S = \{0, a_1, a_2, a_3\}$ je pologrupa s touto multiplikačnou tabuľkou:

	0	a_1	a_2	a_3
0	0	0	0	0
a_1	0	a_1	a_2	0
a_2	0	a_1	a_2	0
a_3	0	0	0	a_3

Ľahko sa presvedčíme, že je to skutočne pologrupa (t. j. asociatívny zákon je splnený). Maximálne ľavé ideály sú: $L_1 = \{0, a_1, a_2\}$, $L_2 = \{0, a_1, a_3\}$, $L_3 = \{0, a_2, a_3\}$. Maximálne pravé ideály sú $R_1 = \{0, a_1, a_2\}$, $R_2 = \{0, a_3\}$. Tieto sú totožné s maximálnymi obojstrannými ideálmi M_1, M_2. Pri tomto príklade je $L_2 \supset R_2$, okrem toho $L_1 = M_1 = R_1$, $M_2 = R_2$.

Z toho vidieť, že sa môže stať, že maximálny obojstranný ideál je vlastnou podmnožinou nejakého širšieho maximálneho ľavého ideálu rôzneho od S. Ďalej vidieť, že sa môže stať, že maximálny pravý ideál je podmnožinou nejakého maximálneho ľavého ideálu (alebo naopak). (Nemôže sa však stať, aby nejaký maximálny ľavý ideál bol vlastnou podmnožinou nejakého širšieho maximálneho obojstranného ideálu).

Hlavným cieľom tejto práce je vyšetriť štruktúru množín $S - L$, $S - R$, $S - M$, kde L, R, M sú maximálne ľavé, pravé a obojstranné ideály pologrupy S. Ako uvidíme, táto štruktúra je za vhodných predpokladov neobyčajne zaujímavá.

Touto otázkou som sa zaoberal v práci [5]. Medzitým uverejnil V o r o b j e v prácu [1], v ktorej sú uvedené bez dôkazu niektoré vety, ktoré sa týkajú toho istého predmetu. V o r o b j e v užíva niektoré výsledky G r e e n o v e j práce [1]. V predloženej práci sa mi okrem iného podarilo dokázať základné Vorobjevove vety (najmä vety 5, 6, 7) za podstatne slabších predpokladov, pričom som sa mohol vhodnými obratmi vyhnúť vôbec znalosti inak cenných Greenových výsledkov.

Z teórie grúp je známe, že možnosť dôkazu celého radu viet je umožnená istými predpokladmi minimality pre podgrupy [najmä normálne podgrupy] danej grupy. Analogickú úlohu hrá v teórii pologrúp podmienka minimality

pre ideály. Hovoríme, že pologrupa S splňuje p o d m i e n k u m i n i m a l i t y pre ľavé ideály, ak platí toto: každá množina $\mathfrak{A}$ ľavých ideálov z S obsahuje aspoň jeden minimálny ideál, t. j. taký ideál, ktorý neobsahuje v sebe žiaden iný ideál z množiny $\mathfrak{A}$. Je známe, že táto podmienka je ekvivalentná podmienke: každá postupnosť ľavých ideálov z S tvaru $l_1 \supset l_2 \supset l_3 \supset \ldots$ má len konečný počet elementov.

G r e e n a V o r o b j e v študujú pologrupy, v ktorých je splnená podmienka minimality pre ľavé hlavné ideály. Také pologrupy V o r o b j e v volá L-pologrupami.

Ukážeme, že pre dôkaz radu viet uvedených v tejto práci vystačíme so slabšími predpokladmi. Budeme žiadať iba to, aby istá diferenčná pologrupa mala *aspoň jeden* minimálny ľavý ideál. To je podmienka podstatne všeobecnejšia, ktorú splňuje prirodzene každá L-pologrupa. Podobnú podmienku použil k štúdiu pologrúp prvý raz C l i f f o r d v práci [2] a potom niekoľko ráz autor v inej súvislosti v prácach [3] a [4].

3.

V tomto odseku uvedieme rad viet, ktoré budeme v ďalšom potrebovať. Nebudeme ich všetky odvodzovať, pretože ide zčasti o vety, ktoré možno nájsť dokázané v citovanej literatúre. Zčasti ich našiel C l i f f o r d v prácach [1] — [3] a zčasti autor v prácach [2] — [4]. Podstatným je pritom existencia aspoň jedného minimálneho ideálu.

Budeme musieť rozoznávať pologrupy s nulou a pologrupy bez nuly. Ako sme už spomenuli, pod minimálnym ideálom pologrupy s nulou budeme rozumieť ideál, ktorý okrem nulového ideálu neobsahuje v sebe žiaden iný vlastný podideál rovnakého druhu.

Veta 3,1. *Nech S je pologrupa bez nuly. Nech L je minimálny ľavý ideál z S. Nech c je ľubovoľný element, $c \in S$. Potom Lc je opäť minimálnym ľavým ideálom z S.*

D ô k a z. Pozri napr. S c h w a r z [3], veta 1,1.

Veta 3,2. *Nech S je pologrupa s nulou. Nech L je minimálny ľavý ideál z S. Nech c je ľubovoľný element, $c \in S$. Potom je $L c = [0]$, alebo je Lc minimálnym ľavým ideálom z S.*

D ô k a z. Pozri C l i f f o r d [2], lemma 2,1, alebo S c h w a r z [4], veta 1,4.

Veta 3,3. *Nech S je pologrupa bez nuly, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý ideál L. Potom $N = LS$ je jediným existujúcim minimálnym obojstranným ideálom pologrupy S.*

D ô k a z. Viď napr. S c h w a r z [3], veta 1,2.

Veta 3,4. *Nech S je pologrupa s nulou, ktorá má minimálny ľavý ideál L, pre ktorý platí $L^2 \neq [0]$. Potom $N = LS$ je jedným z minimálnych obojstranných ideálov z S, pre ktorý platí $N^2 \neq [0]$.*

Dôkaz. Pozri Clifford [3], veta 2,1 alebo Schwarz [4], odsek 4.

Vzhľadom na vety 3,1 a 3,2 obojstranný ideál N z viet 3,3 a 3,4 je teda súčtom minimálnych ľavých ideálov z S.

Definícia 3,1. *Pologrupu S nazývame zľava jednoduchou, ak rovnica $xa = b$ má riešenie $x \in S$, a to pre každú dvojicu $a, b \in S$.*

Inými slovami: zľava jednoduchá pologrupa je taká, u ktorej pre každé $a \in S$ je $Sa = S$. Teda zľava jednoduchá pologrupa je taká, v ktorej neexistuje žiadny ľavý ideál $\neq S$.

Definícia 3,2. *Pologrupu S nazývame zprava jednoduchou, ak rovnica $ax = b$ má riešenie $x \in S$, a to pre každé $a, b \in S$.*

Z elementov axiomatiky grúp plynie, že zľava a súčasne zprava jednoduchá pologrupa je grupou.

Vety 3,5—3,8 dajú niekoľko príkladov zľava jednoduchých pologrúp.

Veta 3,5. *Nech S je pologrupa bez nuly, L jej minimálny ľavý ideál. Potom L je zľava jednoduchá pologrupa.*

Dôkaz. Nech je $a \in L$. Podľa vety 3,1 je La minimálnym ľavým ideálom. Je však $La \subseteq L \cdot L = L^2 \subseteq L$. Keďže je L minimálnym ľavým ideálom, je $La = L$, č. b. t. d.

Veta 3,6. *Nech S je pologrupa s nulou, L jej minimálny ľavý ideál, pre ktorý platí $L^2 \neq [0]$. Potom možno písať:*

$$L = P + Q,\ P \cap Q = \emptyset,\ P^2 = \langle 0 \rangle,$$

kde Q je zľava jednoduchá pologrupa.

Dôkaz. Nech je a ľubovoľný element, $a \in L$. Potom je podľa vety 3,2 buď $La = [0]$, alebo $La = L$.

Označme znakom Q množinu všetkých $b \in L$, pre ktoré platí $Lb = L$. Q je pologrupa. Lebo ak je $b_1 \in Q$, $b_2 \in Q$, je tiež $Lb_1b_2 = Lb_2 = L$, t. j. $b_1b_2 \in Q$.

Znakom P označme ďalej množinu všetkých $c \in L$, pre ktoré je $Lc = \langle 0 \rangle$. P je pologrupa, lebo $c_1 \in P$, $c_2 \in P$ implikuje $Lc_1c_2 = 0 \cdot c_2 = 0$, t. j. $c_1c_2 \in P$. Zrejme je $LP = \langle 0 \rangle$, tým skôr $P^2 = \langle 0 \rangle$. Množina P je vždy neprázdna, lebo do nej patrí aspoň element 0. Množina Q je tiež neprázdna, lebo keby pre každý element $a \in L$ platilo $La = [0]$, bolo by tiež $L \cdot \sum_{a \in L} a = [0]$, t. j. $L^2 = [0]$, čo je spor s predpokladom.

Možno teda vždy písať: $L = P + Q$, $P \cap Q = \emptyset$.

Zvoľme teraz ľubovoľný element $a \in Q$. Podľa definície množiny Q je

$$La = L,$$

$$(P + Q)\, a = P + Q,$$

$$Pa + Qa = P + Q. \qquad (*)$$

Keďže je Q pologrupou, je $Qa \subseteq Q$. Ďalej tvrdím, že je $Pa \subseteq P$. Každý element $x \in Pa$ je totiž tvaru $x = c_1 a$, $c_1 \in P$. Teda je $Lx = Lc_1a = 0 \cdot a = 0$,

t. j. platí $x \in P$ a teda $Pa \subseteq P$. Keďže v rovnici (*) sú sčítanci napravo disjunktné, je nutne $Pa = P$, $Qa = Q$.

Uveďme výslovne ešte tento dôsledok vety 3,6:

Dôsledok: *Nech sú splnené predpoklady vety 3,6. Potom $L - \langle 0 \rangle$ je zľava jednoduchou pologrupou vtedy a len vtedy, ak L nemá nulových deliteľov $\neq 0$.*

Pologrupa s nulou nemôže byť zrejme nikdy zľava jednoduchou. Zato však ako dôsledok vety 3,6 dokážeme túto vetu, ktorú budeme neskôr často používať:

Veta 3,7. *Nech S je pologrupa s nulou, ktorá má viac ako dva elementy. Nech S nemá žiaden ľavý ideál $\neq$ od $[0]$ a S. Potom je $S - \langle 0 \rangle$ zľava jednoduchou pologrupou.*

Dôkaz. Vzhľadom na predpoklad je S samo jediným minimálnym ľavým ideálom z S. Podľa vety 3,6 je teda možný rozklad tvaru

$$S = P + Q,\ P \cap Q = \emptyset,\ P^2 = \langle 0 \rangle.$$

Pritom je podľa dôkazu vety 3,6 $SP = \langle 0 \rangle$. Naša veta bude dokázaná, ak ukážeme, že v tomto prípade má P nevyhnutne jediný element, t. j. $P = \langle 0 \rangle$. To vyplýva nepriamo. Keby totiž pre nejaké $0 \neq a \in S$ platilo $a \in P$, bolo by

$$S\langle 0, a \rangle = 0 \subset \langle 0, a \rangle \subset S,$$

t. j. množina $\langle 0, a \rangle$ by bola vlastným ľavým podideálom z S, čo je spor s predpokladom.

Definícia 3,3. *Pologrupu S voláme jednoduchou, ak neobsahuje žiadny obojstranný ideál rôzny od S s možnou výnimkou nulového ideálu (ak S má nulový element).*

Veta 3,8. *Nech S je jednoduchá pologrupa bez nuly, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom je S súčtom disjunktných pologrúp $S = \sum_{\alpha} L_\alpha$, kde každé L_α je zľava jednoduchou pologrupou.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [3], veta 2,1. Pologrupa S je totiž súčtom svojich minimálnych ľavých ideálov a každý z týchto ideálov je podľa vety 3,5 zľava jednoduchou pologrupou.

Veta 3,9. *Nech S je jednoduchá pologrupa s nulou, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom*

a) *buď sú všetky minimálne ľavé ideály nilpotentné a platí $S^2 = 0$,*

b) *alebo žiaden minimálny ľavý ideál nie je nilpotentný a platí $S^2 = S$.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [4], veta 4,2 a jej dôsledky.

Veta 3,10. *Nech S je jednoduchá pologrupa s nulou, ktorá má aspoň jeden ľavý ideál L, pre ktorý $L^2 \neq [0]$. Potom je S súčtom svojich minimálnych ľavých ideálov.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [4], veta 4,3.

Veta 3,11. *Nech sú splnené predpoklady vety 3,10. Potom možno písať S ako súčet dvoch disjunktných sčítancov*

$$S = \sum_{\alpha} P_\alpha + \sum_{\alpha} Q_\alpha.$$

Pritom pre $\alpha \neq \beta$ *je* $P_\alpha \cap P_\beta = \langle 0 \rangle$, $Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset$. *Ďalej je pre každé* α $P_\alpha^2 = \langle 0 \rangle$ a Q_α *je zľava jednoduchou pologrupou.*

Dôkaz. Vyplýva z vety 3,10 a z vety 3,6.

Už sme poznamenali, že pologrupa bez nuly, ktorá je zprava a zľava jednoduchá, je grupou. Z toho vyplýva:

Veta 3,12. *Nech S je pologrupa s nulou. Nech S má viac ako dva elementy. Nech nemá žiaden ľavý ani pravý ideál* $\neq [0]$ a S. *Potom je* $S - \langle 0 \rangle$ *grupou.*

Dôkaz. Podľa vety 3,7 je $S - \langle 0 \rangle$ zľava aj zprava jednoduchou pologrupou; teda je grupou.

Vzniká nakoniec otázka, či nie je možno bližšie charakterizovať štruktúru zľava jednoduchej pologrupy. To je skutočne možné v prípade, že S obsahuje idempotent. O tom platí táto veľmi zaujímavá veta:

Veta 3,13. *Zľava jednoduchá pologrupa je množinovým súčtom disjunktných izomorfných grúp vtedy a len vtedy, ak má aspoň jeden idempotent.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [3], odsek 3.

Vo vetách 3,8 a 3,11 vystupujú súčty zľava jednoduchých pologrúp. Tieto pologrupy sú spolu viazané tým, že vytvárajú jednoduchú pologrupu. Dá sa čakať, že ich štruktúry spolu nejako súvisia. To je aj pravda. Dá sa dokázať, že keď jedna z nich obsahuje idempotent, tak ho aj všetky obsahujú. Teda: $\sum_\alpha L_\alpha$ z vety 3,8 a $\sum_\alpha Q_\alpha$ z vety 3,11 sú súčtami disjunktných grúp. Nadto sa dá dokázať, že všetky v nich vystupujúce grupy sú navzájom izomorfné. O tom platia presne tieto dve vety:

Veta 3,14. *Nech S je jednoduchá pologrupa bez nuly, ktorá má aspoň jeden ľavý ideál a aspoň jeden idempotent. Potom je* $S = \sum_\alpha G_\alpha$, *kde* G_α *sú disjunktné izomorfné grupy.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [3], veta 4,1.

Veta 3,15. *Nech S je jednoduchá pologrupa s nulou, ktorá má aspoň jeden idempotent* $\neq 0$. *Nech S má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom možno písať S ako súčet dvoch disjunktných sčítancov* $S = \sum_\alpha P_\alpha + \sum_\beta G_\beta$, *kde* $P_\alpha^2 = \langle 0 \rangle$, $P_\alpha \cap P_\beta = \langle o \rangle$ a G_β *sú samé disjunktné izomorfné grupy.*

Dôkaz. Pozri Schwarz [4], veta 7,3.

V citovaných prácach je dokázané ešte toto. Existencia idempotentného elementu je iste zaručená, ak pologrupa S okrem minimálneho ľavého ideálu obsahuje ešte aspoň jeden minimálny pravý ideál. Platí teda táto veta.

Veta 3,16. *Tvrdenia vety 3,14 a 3,15 ostávajú v platnosti, ak S je jednoduchou pologrupou, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál.*

Dodatok

Všimnime si ešte ako je to s maximálnymi ideálmi v jednoduchých pologrupách.

Veľmi prehľadná je situácia u jednoduchých pologrúp, ktoré majú aspoň jeden minimálny ľavý ideál l, pre ktorý je $l^2 \neq 0$. Podľa vety 3,8 a 3,11 je S súčtom všetkých minimálnych ľavých ideálov z S, $S = \sum_\alpha l_\alpha$.

a) Ak $\alpha = 1$ a S má nulový element, je [0] jediným maximálnym ľavým ideálom z S. Ak S nemá nulu, neexistuje ani maximálny ľavý ideál.

b) Nech je $\alpha > 1$. Položme $L_\nu = \sum'_{\alpha \neq \nu} l_\alpha$, kde sčítame cez všetky α okrem $\alpha = \nu$. Je zrejmé, že množiny L_ν dávajú všetky maximálne ľavé ideály. Pre tieto platí najprv $L_\nu \subset S$. Ak však pridám k L_ν ľubovoľný element $a \in S$, a non $\in L_\nu$, t. j. $a \in l_\nu$, $a \neq 0$, potom ľavý ideál, do ktorého patrí a, obsahuje aj $(a, Sa) \subseteq (l_\nu, Sl_\nu) = l_\nu$. Keďže je l_ν minimálny ľavý ideál z S, je $(a, Sa) = l_\nu$. Teda „najmenší" ľavý ideál, ktorý obsahuje L_ν a element a, je $L_\nu + l_\nu = S$, č. b. t. d.

Pokiaľ ide o maximálne obojstranné ideály, je bezprostredne zrejmé toto:

a) Jednoduchá pologrupa bez nuly nemá maximálny obojstranný ideál

b) v jednoduchej pologrupe s nulou je [0] maximálnym obojstranným ideálom z S.

4.

V odsekoch 4 a 5 nebudeme zatiaľ činiť žiadne obmedzujúce predpoklady minimality. V tomto odseku dokážeme niekoľko viet, ktoré sa týkajú existencie jediného maximálneho ideálu v danej pologrupe.

Veta 4,1. *Nech pologrupa S má aspoň jeden maximálny ľavý ideál L. Ak existuje aspoň jeden další ideál l, ktorý neleží v L, potom je* $\langle L, l \rangle = S$.

Dôkaz. Súčet $L + l$ je opäť ľavý ideál. Keby bolo $L + l \subset S$, nebolo by L maximálnym ľavým ideálom. Teda je nevyhnutne $L + l = S$, č. b. t. d.

O pologrupe, ktorá sa dá písať ako súčet svojich ľavých ideálov ($\neq S$), budeme hovoriť, že sa dá pokryť ľavými ideálmi.

Špeciálne, ak existujú dva maximálne ľavé ideály L_1, L_2, je podľa vety 4,1 iste možno S pokryť ľavými ideálmi.

Nás budú v ďalšom často zaujímať také pologrupy, ktoré sa nedajú pokryť napr. svojimi ľavými ideálmi. Ak taká pologrupa má aspoň jeden maximálny ľavý ideál L^*, potom podľa vety 4,1 každý ľavý ideál $\neq S$ je obsažený v L^*.

Definícia 4,1. *Budeme hovoriť, že pologrupa S má maximálny ideál* L^*, *ak* L^* *je taký jediný maximálny ľavý ideál z S, v ktorom je obsažený každý iný ľavý ideál z S.*

Znak L^* (s hviezdičkou) rezervujeme výhradne pre tento prípad. (V tomto prípade sa teda S nedá pokryť ľavými ideálmi.) Podobný význam majú ideály R^*, M^*.

P o z n á m k a. Keby sme žiadali iba to, aby S malo jediný maximálny ľavý ideál L, ešte by z toho nevyhnutne nevyplývalo, že sa S nedá pokryť ľavými ideálmi. Je totiž možné, že S má jediný maximálny ľavý ideál L a okrem toho ďalší ľavý ideál l, ktorý nie je možno vnoriť do žiadneho maximálneho ľavého ideálu. Existencia ďalšieho ľavého ideálu však už stačí (podľa vety 4,1) na pokrytie S.

To ukazuje tento príklad:

P r í k l a d 4,1. Nech pologrupa S je množina, ktorej elementmi sú:

a) všetky reálne čísla $\alpha > 0$,

b) symbol ∞,

c) symbol a.

Skladanie (násobenie) nech je definované takto:

1. u čísel nech je ním obyčajné sčítanie čísel,

2. pre element ∞ nech platí $S \cdot \infty = \infty \cdot S = \infty$,

3. pre symbol a nech platí $a \cdot \alpha = \alpha \cdot a = \infty$, $a \cdot a = a$. To je zrejme komutatívna pologrupa, v ktorej ∞ je nulovým elementom. Označme znakom U_α množinu reálnych čísel $> \alpha$. Existuje jediný maximálny ideál, totiž $M = \{\infty, U_0\}$. „Najmenší" ideál, do ktorého patrí a, je $\{\infty, a\}$. Tento ideál nemožno vnoriť do žiadneho maximálneho ideálu, keďže každá množina $\{\infty, a, U_\alpha\}$ je síce ideálom, ale pre žiadne $\alpha > 0$ nie je to maximálny ideál v smysle našej definície (pre $\alpha = 0$ je ovšem $\{\infty, a, U_0\} = S$).

Vzniká otázka: za akých podmienok možno tvrdiť, že pologrupa má ideál L^* (R^*, M^*). Niekoľko typov takých pologrúp dávajú tieto vety:

Veta 4,2. *Nech S má aspoň jeden ľavý ideál $\neq S$ a okrem toho pravú jednotku. Potom existuje jediný maximálny ľavý ideál L^*.*

D ô k a z. „Najmenší" ľavý ideál, do ktorého patrí pravá jednotka e_r, je $\{e_r, Se_r\} = S$. Teda e_r nemôže patriť do žiadneho ľavého ideálu $\neq S$. Inými slovami: S nemožno pokryť ľavými ideálmi.

Podľa predpokladu existuje aspoň jeden ľavý ideál $l \subset S$. Nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých ľavých ideálov z S obsahujúcich l a neobsahujúcich e_r. Vzhľadom na inklúziu je $\mathfrak{A}$ čiastočne usporiadanou množinou. Ak $\mathfrak{B}$ je nejaká usporiadaná podmnožina elementov z $\mathfrak{A}$, spojová množina všetkých elementov z $\mathfrak{B}$ je opäť zrejme ľavým ideálom, ktorý neobsahuje e_r, teda, ktorý patrí do $\mathfrak{A}$. Podľa princípu maxima, známeho pod menom Z o r n o v o l e m m a (čo je logicky ekvivalentné známemu axiómu výberu), v $\mathfrak{A}$ existuje aspoň jeden maximálny element L^*. Toto je zrejme maximálny ľavý ideál z S, lebo pre každý ideál L, pre ktorý je $L^* \subset L$, nevyhnutne platí $e_r \in L$, t. j. $L = S$. Súčasne v $\mathfrak{A}$ existuje len jediný taký maximálny element, lebo keby existoval ďalší, napr. L_1^*, bolo by podľa vety 4,1

$\{L^*, L_1^*\} = S$, t. j. e_r by sa dalo pokryť nejakým ideálom $\neq S$, čo nie je pravda.

Podobne dokážeme:

Veta 4,3. *Nech S má aspoň jeden pravý ideál $\neq S$ a nech obsahuje ľavú jednotku e_l. Potom existuje jediný maximálny pravý ideál R^*.*

Veta 4,4. *Nech S má aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Ak má S pravú alebo ľavú jednotku, existuje jediný maximálny obojstranný ideál M^*. Nadto:*

a) *ak má S pravú jednotku e_r, existuje aj L^* a platí $M^* \subseteq L^*$;*

b) *ak má S ľavú jednotku e_l, existuje aj R^* a platí $M^* \subseteq R^*$;*

c) *ak má S obojstrannú jednotku, je $M^* \subseteq R^* \cap L^*$.*

Ostrejšie vety dostaneme, ak predpokladáme, že S má aspoň jeden m i n i m á l n y ľavý ideál.

Veta 4,5. *Nech S má aspoň jeden minimálny ľavý ideál.*

a) *Ak S má pravú jednotku e_r a nie je jednoduchou pologrupou, potom existuje L^* a M^*.*

b) *Ak S má ľavú jednotku e_l a nie je jednoduchou pologrupou, existuje R^* a M^*.*

D ô k a z. Ak S má nulový element, potom plynie veta 4,5 z vety 4,4, lebo za obojstranný ideál z vety 4,4 možno vziať nulový ideál [0]. Preto predpokladajme, že S nemá nulový element.

Podľa predpokladu existuje aspoň jeden minimálny ľavý ideál l. Podľa vety 3,3 je lS minimálnym obojstranným ideálom pologrupy S. Ak $lS = S$, je S jednoduchou pologrupou. Nech je teda v ďalšom $lS \subset S$.

a) Už sme ukázali, že e_r nemôže patriť do žiadneho ľavého ideálu $\neq S$. Teda je e_r non $\in lS$. Existencia L^* a M^* plynie teraz z vety 4,4.

b) Podobne e_l nemôže patriť do žiadneho pravého a tým menej obojstranného ideálu $\neq S$. Teda je aj e_l non $\in lS$ a veta vyplýva opäť z vety 4,4.

P o z n á m k a 1. Tvrdenia a), b) z vety 4,5 nie sú duálne, lebo pologrupa, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý ideál, nemusí mať ešte minimálny pravý ideál.

P o z n á m k a 2. Môže sa skutočne stať, že dokonca aj konečná pologrupa má pravú jednotku e_r, ale L^* a M^* neexistujú. Potom je — pravda — S nevyhnutne jednoduchou pologrupou. Príklad takej pologrupy je:

P r í k l a d 4,2. Nech je S pologrupa, ktorej elementmi sú prvky $S = \{a, b, c, d\}$ s multiplikačnou tabuľkou:

	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a
c	c	d	c	d
d	d	c	d	c

Elementy a, c sú pravými jednotkami, ideály L^* a M^* však neexistujú.

5.

V tomto odseku si odvodíme niekoľko obecných viet o pologrupách, ktoré majú ideály L^*, R^*, M^*. Hlbšie vety o takýchto pologrupách budú obsahom odseku 9.

Veta 5,1. *Nech pologrupa S má jediný maximálny ľavý ideál L^*. Nech $S - L^*$ má viac ako jeden element. Potom je $S - L^*$ pologrupou.*

D ô k a z. Nech je $a \in S - L^*$. Keďže a nie je možno pokryť maximálnym ľavým ideálom, je ľavý ideál $L = \langle a, Sa \rangle$ nevyhnutne rovný celému S. Teda je $L^* \subset \langle a, Sa \rangle = S$. Ak vynecháme z L element a, dostávame opäť ľavý ideál Sa. Tento by mohol mať poprípade menej elementov ako S; teda je $Sa \subseteq S$. Vzhľadom na to, že $S - L^*$ má viac ako jeden element, je však ešte stále $L^* \subset Sa$. Keďže však L^* je maximálnym ľavým ideálom, je nevyhnutne $Sa = S$.

Ak je naopak $a \in L^*$, je $Sa \subseteq S L^* \subseteq L^*$. Teda je $S - L^*$ presne množinou tých elementov $a \in S$, pre ktoré je $Sa = S$.

Ak sú teraz a, b dva elementy $\in S - L^*$, je $Sa = S$, $Sb = S$, teda $Sab = Sb = S$. Teda je tiež $ab \in S - L^*$, t. j. $S - L^*$ je pologrupou, č. b. t. d.

P o z n á m k a 1. Analogicky veta platí pre maximálny pravý ideál, ak taký existuje.

P o z n á m k a 2. Predpoklad, že $S - L^*$ má viac ako jeden element, je podstatný. To ukazuje tento príklad:

P r í k l a d 5,1. Nech S je pologrupa, ktorej elementmi sú čísla $S = \langle 0, 2, 4, 8 \rangle$ a pod násobením rozumieme násobenie čísel (mod 12). Množina $L^* = \langle 0, 4, 8 \rangle$ je zrejme maximálnym ideálom z S. Avšak množina $S - L^*$, ktorá pozostáva z jediného elementu $\langle 2 \rangle$, nie je pologrupou.

Veta analogická k vete 5,1 pre obojstranné ideály nekomutatívnych pologrúp neplatí. O tom sa najlepšie presvedčíme na príklade.

P r í k l a d 5,2. Majme pologrupu $S = \langle 0, a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, v ktorej násobenie je definované tabuľkou:

	0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	0
a_1	0	a_1	a_2	0	0
a_2	0	0	0	a_1	a_2
a_3	0	a_3	a_4	0	0
a_4	0	0	0	a_3	a_4

Táto pologrupa má jediný maximálny obojstranný ideál $M^* = [0]$. Je to teda príklad jednoduchej pologrupy. Množina $S - M^*$ je množina elementov $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. Tieto však netvoria pologrupu (lebo násobením dostávame aj nulu, teda z množiny vybočíme).

Zato v prípade komutatívnej pologrupy a ešte obecnejšie v prípade tzv. obojstrannej pologrupy dokážeme podstatne ostrejšiu vetu.

Definícia 5,1. *Pologrupu nazývame obojstrannou, ak každý jej ideál je obojstranný.*

P o z n á m k a. Také nekomutatívne pologrupy prirodzene existujú. Vezmime napr. ľubovoľnú výslovne nekomutatívnu grupu G. Pridajme k nej element z a definujme: a) $z^2 = z$, b) $Gz = zG = z$, c) násobením vo vnútri grupy G nech je pôvodné násobenie. Máme nekomutatívnu pologrupu, ktorá má len dva ideály, totiž $[0]$, S. Oba sú obojstranné. Ľahko možno sostrojiť aj menej triviálne príklady.

Veta 5,2. *Nech S je obojstranná pologrupa, v ktorej existuje jediný maximálny obojstranný ideál M^*. Nech $S - M^*$ má viac ako jeden element. Potom je $S - M^*$ grupou.*

P o z n á m k a v o p r e d. Neskôr dokážeme vo vete 8,5 inými prostriedkami, že táto veta platí pre ľ u b o v o ľ n ý maximálny ideál obojstrannej pologrupy.

D ô k a z. Nech je $a \in S - M^*$. Sostrojme ideál $\langle a, Sa \rangle$. Tento je podľa predpokladu obojstranný. Keďže obsahuje a, je nevyhnutne $\langle a, Sa \rangle = S$. Podobnou úvahou ako vo vete 5,1 dokážeme, že je dokonca $Sa = S$. Uvažujme ďalej ideál $\langle a, aS \rangle$. Ten je opäť obojstranný. Obsahuje a, teda je $\langle a, aS \rangle = S$ a opäť, obdobne ako vo vete 5,1, $aS = S$.

Ak je naopak $a \in M^*$, je $Sa \subseteq SM^* \subseteq M^* \subset S$, $aS \subseteq M^*S \subseteq M^* \subset S$. Teda je $S - M^*$ množinou tých a len tých elementov $a \in S$ pre ktoré platí súčasne $Sa = S$, $aS = S$.

Z toho najprv vyplýva, že $T = S - M^*$ je pologrupou. Ak sú totiž a, b dva ľubovoľné elementy $a, b \in T$, platí $Sa = aS = S$, $Sb = bS = S$. Teda $Sab = Sb = S$, $abS = aS = S$, t. j. platí aj $ab \in T$. Teda T je pologrupou.

Rovnice $Sa = aS = S$ platné pre každé $a \in T$ vyzerajú explicitne vypísané takto:

$$(M^* + T)\, a = M^* + T, \tag{1}$$

$$a\, (M^* + T) = M^* + T. \tag{2}$$

Rovnica (1) dáva $M^*a + Ta = M^* + T$. Keďže je M^* obojstranný ideál je $M^*a \subseteq M^*$. Keďže je T pologrupou, je $Ta \subseteq T$. Ďalej sú oba sčítance na pravej strane disjunktné, t. j. $M^* \cap T = \emptyset$. Teda je nevyhnutne

$$M^*a = M^*, \qquad Ta = T.$$

Podobne z rovnice (2) vyplýva:

$$aM^* = M^*, \qquad aT = T.$$

Rovnice $aT = T$, $Ta = T$ hovoria: ku každej dvojici elementov $a, b \in T$ existujú dva elementy $x, y \in T$ také, že platí $ax = b$, $ya = b$. Z elementov axiomatiky teórie grúp je známe, že pologrupa s takouto vlastnosťou je grupa. Tým je veta 5,2 dokázaná.

P o z n á m k a. Predpoklad, že $S - M^*$ má viac ako jeden element, je podstatný. To vidno hneď z príkladu 5,1.

6.

Vyložíme teraz pojem tzv. d i f e r e n č n e j p o l o g r u p y zavedenej prvý raz R e e s o m [1].

Nech S je pologrupa a M jej pevne zvolený obojstranný ideál. Zaveďme v S reláciu definovanú týmto vzťahom: $a \equiv b \pmod{M}$, ak

1. buď je $a = b$,
2. alebo je súčasne $a \in M$, $b \in M$.

Táto relácia je reflexívna, symetrická, transitívna. Je to teda ekvivalencia v obvyklom slova smysle.

Ak označíme znakmi $a, b, c, \ldots$ elementy $\in S - M$, je zrejmé, že triedy $\pmod{M}$ sú množiny

$$T_o = \{M\},\ T_a = \{a\},\ T_b = \{b\},\ \ldots$$

Táto ekvivalencia je nadto regulárna. Triedy tvoria pologrupu, v ktorej je násobenie tried definované vzťahom $T_a \odot T_b = T_c$, ak v smysle násobenia komplexov pôvodnej pologrupy je $T_a \cdot T_b \subseteq T_c$. Keďže M je obojstranný ideál, je zrejmé, že T_o má úlohu nulového elementu. Túto pologrupu tried označíme znakom $\bar{S} = S/M$ a nazveme diferenčnou pologrupou.

Z horného vyjadrenia je zrejmé, že diferenčná pologrupa $\bar{S}$ je izomorfná k množine $S - M + \bar{O}$, t. j. k množine elementov z S nepatriacich do M s novým pridaným nulovým elementom $\bar{O}$ (ktorý musíme pridať aj vtedy, ak S samo nemalo nulový element):

$$\bar{S} = S/M \cong S - M + \bar{O}.$$

V ďalšom budeme elementy pologrupy $\bar{S}$ značiť miesto znakov T_o, T_a, $T_b \ldots$ znakmi $\bar{0}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots$.

Zobrazenie $S \to \bar{S}$ je teda homomorfné zobrazenie pologrupy S na pologrupu $\bar{S}$, ktoré je definované takto:

pre $a \in S - M$ je $a \to \bar{a}$,

pre $a \in M$ je $a \to \bar{0}$.

Krátko povedané (až na príslušný izomorfizmus) uvedená konštrukcia vyzerá takto: diferenčnú pologrupu dostaneme, ak necháme splynúť všetky elementy z M v jediný element $\bar{0}$, kým ostatným elementom z S ponecháme ich pôvodný význam.

P o z n á m k a. Treba poznamenať, že náš homomorfizmus $S \to \bar{S}$ zďaleka nevyčerpáva všetky možné homomorfné zobrazenia pologrupy S na nejakú inú pologrupu $\bar{S}$. (Iné homomorfizmy pozri v prácach L j a p i n [Ляпин] [1] – [4] a M a ľ c e v [Мальцев] [1].)

Teraz odvodíme rad viet pomocného charakteru, ktoré ukážu súvislosť medzi ideálmi pologrupy S a pologrupy S/M.

Veta 6,1. *Nech m je obojstranný ideál pologrupy S. Nech l je taký ľavý ideál z S, že $m \subseteq l \subseteq S$. Potom $\bar{l} = l/m$ je ľavým ideálom pologrupy $\bar{S} = S/m$.*

D ô k a z. Predovšetkým má l/m smysel, lebo m je tiež obojstranným ideálom v l. Pri homomorfizme $S \to \bar{S}$ prejde každý vzťah $al \subseteq l$ do vzťahu $\bar{a}\bar{l} \subseteq \bar{l}$. Keďže u nás vzťah $al \subseteq l$ platí pre každé $a \in S$, platí aj $\bar{a}\bar{l} \subseteq \bar{l}$ pre každé $\bar{a} \in \bar{S}$. Teda $\bar{l}$ je ľavým ideálom z $\bar{S}$.

P o z n á m k a. Analogická veta platí pre pravý ideál r, ktorý vyhovuje vzťahu $m \subseteq r \subseteq S$ a pre obojstranný ideál m_1, ktorý vyhovuje vzťahu $m \subseteq m_1 \subseteq S$. Podobnú poznámku u ďalších viet už nebudeme výslovne uvádzať.

Veta 6,2. *Nech m je obojstranný ideál z S. Nech $S \to \bar{S}$ je zobrazenie S na diferenčnú pologrupu S/m. Nech $\bar{l}$ je ľavý ideál z $\bar{S}$. Potom množina elementov l z S, ktoré v spomínanom homomorfizme prejdú do $\bar{l}$, je ľavý ideál z S (ktorý obsahuje v sebe m).*

D ô k a z. Nech v homomorfizme $S \to \bar{S}$ odpovedá elementu $a \to \bar{a}$. Tvrdím, že je $al \subseteq l$, pre každé $a \in S$. Keby tomu tak nebolo, existovala by aspoň jedna dvojica $a_1 \in S$, $c_1 \in l$ taká, že by bolo $a_1 c_1$ non $\in l$. Teda by bolo $\bar{a}_1 \bar{c}_1$ non $\in \bar{l}$ a tým skôr $a_1 \bar{l}$ non $\in \bar{l}$. To by značilo, že $\bar{l}$ nie je ľavým ideálom z $\bar{S}$, čo je spor s predpokladom. Množina m patrí do l, lebo nulový element $\in \bar{S}$ nevyhnutne patrí do $\bar{l}$.

Veta 6,3. *Nech m je obojstranný ideál pologrupy S. Nech L je nejaký taký maximálny ľavý ideál pologrupy S, že je $m \subseteq L \subset S$. Potom $\bar{L} = L/m$ je maximálnym ľavým ideálom z $\bar{S} = S/m$.*

D ô k a z. Podľa vety 6,1 je $\bar{L}$ ľavým ideálom z $\bar{S}$. Usudzujme nepriamo. Nech existuje ľavý ideál $\bar{L}_1$, $\bar{L} \subset \bar{L}_1 \subset \bar{S}$. Podľa vety 6,2 je množina elementov $L_1 \subset S$, ktoré sa v homomorfizme $S \to \bar{S}$ zobrazia do $\bar{L}_1$, ľavým ideálom. Pritom je $L \subset L_1$ (lebo množina obrazov $\bar{L}_1 - \bar{L}$ je neprázdna) a $L_1 \subset S$ (keďže aj množina obrazov $\bar{S} - \bar{L}_1$ je neprázdna). Teda L_1 je ľavým ideálom z S, t. j. L nie je maximálnym ľavým ideálom z S. To je spor s predpokladom.

Pomocou viet 6,1–6,3 sa analogicky dokáže:

Veta 6,4. *Nech m je obojstranným ideálom z S. Nech $S \to \bar{S}$ je homomorfným zobrazením S na diferenčnú pologrupu S/m. Nech $\bar{L}$ je maximálnym ľavým ideálom z $\bar{S}$. Potom množina $L \subset S$, ktorá v spomínanom homomorfizme sa zobrazí do $\bar{L}$, je maximálny ľavý ideál z S (ktorý obsahuje v sebe m).*

Vety 6,1–6,4 budeme v ďalšom aplikovať predovšetkým na prípad, že m je nejaký maximálny obojstranný ideál z S.

Veta 6,5. *Nech M je maximálny obojstranný ideál pologrupy S. Potom S/M je jednoduchou pologrupou.*

D ô k a z. Nepriamo. Keby $\bar{S} = S/M$ malo obojstranný ideál $\bar{M}_1$, $\bar{0} \subset \bar{M}_1 \subset \bar{S}$ podľa vety 6,2 by to znamenalo, že v S existuje taký obojstranný ideál M_1, že je $M \subset M_1 \subset S$. To je ale spor s predpokladom, že M je maximálnym obojstranným ideálom z S.

Veta 6.6. *Nech M je maximálny obojstranný ideál z S. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Potom pre diferenčnú pologrupu S/M nemôže platiť $(S/M)^2 = \bar{0}$.*

D ô k a z. Nepriamo. Predpokladajme, že platí $\bar{S}^2 = (S/M)^2 = \bar{0}$. Pre pôvodnú pologrupu to znamená, že je $(S - M)^2 \subseteq M$. Označme elementy $\in S - M$ znakmi $u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\nu, \ldots$ Označme ďalej $U_\nu = S - M - u_\nu$. Keďže existujú aspoň dva rôzne elementy u_ν, je $S - M \supset U_\nu \neq \emptyset$ a existujú teda aspoň dve rôzne množiny U_ν.

Uvažujme množiny $M + U_\nu \supset M$. Tvrdíme, že $M + U_\nu$ je obojstranným ideálom z S. Je totiž:

$$S(M + U_\nu) = SM + SU_\nu \subseteq M + [(MU_\nu) + (S - M)\,U_\nu] \subseteq M + [M + \\ + (S - M)(S - M)] \subseteq M + (S - M)^2 \subseteq M + M \subset M + U_\nu.$$

Podobne je $(M + U_\nu) \cdot S \subset M + U_\nu$.

Keďže je $M \subset M + U_\nu \subset S$, to by znamenalo, že M nie je maximálnym obojstranným ideálom z S. To je však spor s predpokladom.

P o z n á m k a. Príklad 5,1 ukazuje, že predpoklad: $S - M$ má viac ako jeden element, je podstatný. Nech je, ako v uvedenom príklade, $S = \{0, 2, 4, 8\}$ a násobením rozumejme násobenie čísel (mod 12). Maximálny obojstranný ideál je $M^* = \{0, 4, 8\}$. Diferenčná pologrupa S/M^* je pologrupa $\bar{S} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, ktorej multiplikačná tabuľka vyzerá takto:

	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Teda je $\bar{S}^2 = \bar{0}$.

7.

Úlohou odsekov 7—10 je teraz dokázať rad viet o štruktúre množín $S - L$, $S - M$, kde $L\,(M)$ je maximálny ľavý (príp. obojstranný) ideál pologrupy S.

V odseku 7 budeme študovať štruktúru $S - M$ za predpokladu, že M je ktorýkoľvek z maximálnych obojstranných ideálov.

V odseku 8 budeme študovať prípad, že M je taký maximálny obojstranný ideál, ku ktorému existuje najviac jeden maximálny ľavý ideál L, ktorý obsahuje v sebe M.

V odseku 9 budeme podrobnejšie študovať štruktúru množín $S - L^*$, $S - M^*$ študovaných už v odseku 5.

V odseku 10 preberieme niekoľko ďalších špeciálnych prípadov.

Veta 7,1. *Nech M je maximálny obojstranný ideál z S. Nech S/M má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom, ak $S - M$ je pologrupou, je $S - M$ súčtom disjunktných zľava jednoduchých pologrúp.*

D ô k a z. Ak $S - M$ je pologrupou, to znamená, že $\bar{S} = S/M$ je pologrupou s nulou $\bar{0}$, v ktorej žiaden element $\neq \bar{0}$ nie je nulovým deliteľom. T. j. $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ implikuje buď $\bar{a} = \bar{0}$, alebo $\bar{b} = \bar{0}$. Je teda iste $\bar{S}^2 \neq 0$. Podľa vety 3,9 a 3,10 je $\bar{S}$ súčtom disjunktných minimálnych ľavých ideálov. $\bar{S} = S/M = \sum_\alpha \bar{l}_\alpha$. Podľa vety 3,11 je $\bar{l}_\alpha = \bar{P}_\alpha + \bar{Q}_\alpha$, $\bar{P}_\alpha^2 = \{\bar{0}\}$, $\bar{P}_\alpha \cap \bar{Q}_\alpha = \emptyset$ kde každé $\bar{Q}_\alpha$ je zľava jednoduché. Teda je $\bar{S} = \sum_\alpha \bar{P}_\alpha + \sum_\alpha \bar{Q}_\alpha$. Keďže nulový deliteľ neexistuje, je nevyhnutne pre každé α $\bar{P}_\alpha = \{\bar{0}\}$. Teda $\bar{S} - \bar{0} = \sum_\alpha \bar{Q}_\alpha$, kde každé $\bar{Q}_\alpha$ je zľava jednoduché. Keďže $\bar{S} - \bar{0}$ je izomorfné k $S - M$, veta je dokázaná.

Veta 7,2. *Nech M je maximálny obojstranný ideál pologrupy S. Nech S/M má aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál. Ak $S - M$ je pologrupou, možno písať:*

$$S = M + \sum_i G^{(i)}, \quad M \cap \sum_i G^{(i)} = \emptyset,$$

kde $G^{(i)}$ sú samé disjunktné izomorfné grupy.

D ô k a z. Ako u vety 7,1 je $\bar{S} = \sum_\alpha \bar{Q}_\alpha$, kde $\bar{Q}_\alpha$ sú minimálne ľavé ideály z $\bar{S}$ (ktoré majú za spoločný element iba $\bar{0}$). Podľa vety 3,16 možno v tomto prípade každé $\bar{Q}_\alpha$ písať v tvare $\bar{Q}_\alpha = \{\bar{0}\} + \sum_\alpha G_\alpha$, kde G_α sú disjunktné izomorfné grupy. Pritom podľa vety 3,15 aj grupy vystupujúce v rôznych $\bar{Q}_\alpha$ sú spolu izomorfné. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok 7,2. *Nech M je maximálny obojstranný ideál konečnej pologrupy S. Ak $S - M$ je pologrupou, $S - M$ je dokonca súčtom disjunktných izomorfných grúp.*

Užívajúc vetu 3,14 celkom analogicky dokážeme:

Veta 7,3. *Nech M je maximálny obojstranný ideál pologrupy S. Nech $S - M$ je pologrupa. Nech S/M má aspoň jeden minimálny ľavý ideál a aspoň jeden idempotent. Potom je $S - M$ súčtom disjunktných izomorfných grúp.*

Dôsledok 7,3. *Nech M je maximálny obojstranný ideál periodickej*[1] *pologrupy S. Nech S/M má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Ak $S - M$ je pologrupou, $S - M$ je dokonca súčtom disjunktných izomorfných grúp.*

[1] Periodickou pologrupou rozumieme takú (vo všeobecnosti nekonečnú) pologrupu, v ktorej každá postupnosť $a, a^2, a^3, \ldots$ má len konečný počet rôznych elementov.

8.

Veta 8,1. *Nech M je maximálny obojstranný ideál z S. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Nech S/M má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Nech existuje n a j v i a c jeden maximálny ľavý ideál L, ktorý spĺňuje vzťah $M \subseteqq L \subset S$. Potom je:*

a) $M = L$,

b) *$S - L$ je zľava jednoduchou pologrupou.*

P o z n á m k a v o p r e d. Veta teda hovorí, že za týchto predpokladov neexistuje vôbec žiaden maximálny ľavý ideál $L \supset M$.

D ô k a z. Podľa vety 6,5 je $\overline{S} = S/M$ jednoduchou pologrupou. Podľa vety 6,6 je $(\overline{S})^2 \neq \overline{0}$. Podľa predpokladu existuje aspoň jeden minimálny ľavý ideál z $\overline{S}$. Podľa vety 3,10 teda $\overline{S}$ je súčtom minimálnych ľavých ideálov z $\overline{S}$, $\overline{S} = \sum_{\alpha} \overline{l}_\alpha$.

Tvrdím, že na pravej strane poslednej rovnice môže byť jediný sčítanec rôzny od nulového ideálu. To dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že na pravej strane sú aspoň dva sčítance od nulového ideálu rôzne. Označme $\overline{L}_\nu = \sum'_{\alpha, \alpha \neq \nu} \overline{l}_\alpha$. Nech L_ν je množina elementov $\in S$, ktorá pri homomorfizme $S \to \overline{S}$ je originálom množiny L_ν. L_ν je zrejme ľavým ideálom a platí $M \subset L_\nu \subset S$. Podľa dodatku k odseku 3 je každé $\overline{L}_\nu$ maximálnym ľavým ideálom pologrupy $\overline{S}$. Podľa vety 6,4 je L_ν maximálnym ľavým ideálom z S. Keďže existujú aspoň dve také rôzne množiny L_ν, máme spor s predpokladom existencie najviac jedného takého maximálneho ľavého ideálu L, pre ktorý platí $M \subseteqq L \subset S$.

Je teda $S/M = \overline{l}$, kde $\overline{l}$ je jediný existujúci minimálny ľavý ideál z S/M. Inými slovami: S/M je pologrupa, ktorá nemá žiaden iný ľavý ideál ako $\overline{0}$ a S/M samo.

Podľa predpokladu je $M \subseteqq L \subset S$. Podľa vety 6,1 je L/M ľavým ideálom z S/M. Keďže je $L/M \subset S/M$, je nevyhnutne $L/M = \overline{0}$, t. j. $L = M$. Teda za našich predpokladov maximálny ľavý ideál L je dokonca totožný s maximálnym obojstranným ideálom M.

Podľa vety 3,7 je teraz $S/M - \{\overline{0}\} = \overline{S} - \{\overline{0}\}$ zľava jednoduchou pologrupou. Pre pôvodnú pologrupu to teda znamená, že je $S = M + S_1$, kde $M \cap S_1 = \emptyset$ a S_1 je zľava jednoduchá pologrupa. Tým je veta 8,1 dokázaná.

Veta 8,2. *Nech M je maximálny obojstranný ideál pologrupy S. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Nech S/M má aspoň jeden minimálny pravý a aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Nech existuje najviac jeden maximálny ľavý ideál L spĺňujúci $M \subseteqq L \subset S$ a najviac jeden maximálny pravý ideál spĺňujúci $M \subseteqq R \subset S$. Potom*

a) $M = R = L$,

b) *$S - M$ je grupou.*

D ô k a z. Podľa vety 8,1 je $S - M$ zľava jednoduchou pologrupou. Podľa vety duálnej k vete 8,1 je však tiež $M = R$ a $S - M$ je tiež zprava jednoduchou pologrupou. Teda $S - M$ je grupou, č. b. t. d.

Slabšou formuláciou vety 8,1 je táto pozoruhodná veta:

Veta 8,3. *Nech M je taký maximálny obojstranný ideál pologrupy S, ktorý nie je obsažený ako vlastná podmnožina v žiadnom ľavom ideáli $\neq S$. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Potom je $S = M + Q$, kde $M \cap Q = \emptyset$ a Q je zľava jednoduchá pologrupa.*

P o z n á m k a v o p r e d. Ak teda v o p r e d predpokladáme, že neexistuje *vôbec žiaden* ľavý ideál L, pre ktorý by platilo $S \supset L \supset M$, možno obmedzujúci predpoklad o S/M vynechať.

D ô k a z. Keďže neexistuje taký ľavý ideál L, pre ktorý by platilo $M \subset L \subset S$, podľa vety 6,2 to znamená, že diferenčná pologrupa S/M nemá žiaden ľavý ideál $\neq \overline{0}$ a $\neq \overline{S}$. Podľa vety 3,7 je $S/M - \{\overline{0}\}$ zľava jednoduchou pologrupou. Pre pôvodnú pologrupu to znamená, že $S - M$ je zľava jednoduchou pologrupou, č. b. t. d.

Analogicky sa dokáže:

Veta 8,4. *Nech M je taký maximálny obojstranný ideál pologrupy S, ktorý nie je obsažený ako vlastná podmnožina v žiadnom ľavom alebo pravom ideáli $\neq S$. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Potom možno písať $S = M + G$, kde $M \cap G = \emptyset$ a G je grupa.*

Aplikujme vetu 8,4 na obojstranné pologrupy zavedené definíciou 5,1. Tu medzi maximálnymi ľavými, pravými a obojstrannými ideálmi niet rozdiel. Z vety 8,4 vyplýva teda toto podstatné zostrenie vety 5,2.

Veta 8,5. *Nech M je ľubovoľný maximálny ideál obojstrannej pologrupy S. Nech $S - M$ má viac ako jeden element. Potom $S - M$ je grupou.*

9.

Rad zaujímavých viet dostaneme v prípade, ak pologrupa má jediný maximálny ľavý (pravý, obojstranný) ideál L^* (R^*, M^*). V odseku 4 sme našli niekoľko podmienok, keď tento prípad iste nastane. V odseku 5 sme už získali prvú informáciu o štruktúre množín $S - L^*$, $S - R^*$, príp. $S - M^*$.

Ďalšia veta je podstatným zovšeobecnením vety 8, a z práce S c h w a r z [5].

Veta 9,1. *Nech v pologrupe S existuje L^*. Nech S má aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Potom existuje aj M^* (a je — pravda — $M^* \subseteqq L^*$.).*

D ô k a z. Označme znakom F množinu tých $b \in S$, pre ktoré je $\{b, Sb, bS, SbS\} = S$. Množina F je neprázdna. Ak je totiž $a \in S - L^*$, je podľa

3*

dôkazu vety 5,1 $\langle a, Sa \rangle = S$. Teda tým skôr je $\langle a, Sa, aS, SaS \rangle = S$. Preto je dokonca $F \supseteq S - L^*$.

Ďalej je iste $F \subset S$, lebo podľa predpokladu existuje aspoň jeden obojstranný ideál m a pre $b \in m$ je $\langle b, Sb, bS, SbS \rangle \subseteq m \neq S$.

V ďalšom nám pôjde o to, nájsť nejaký taký, „najširší" obojstranný ideál M, pre ktorý platí $M \cap F = \emptyset$.

Uvažujme množinu $\mathfrak{A}$ všetkých obojstranných ideálov z S, ktoré obsahujú m, ktoré nepretínajú F. Táto množina je neprázdna. Ak $m \subset m_\alpha \subset m_\beta \ldots$ je ľubovoľná v smysle inklúzie usporiadaná množina elementov z $\mathfrak{A}$, potom spojová množina týchto elementov z $\mathfrak{A}$ patrí opäť do $\mathfrak{A}$. Podľa Zornovej lemmy z toho vyplýva, že v $\mathfrak{A}$ existuje aspoň jeden maximálny element M. To znamená: existuje taký obojstranný ideál M, ktorý má tieto vlastnosti:

a) $M \cap F = \emptyset$,

b) pre každé $M' \supset M$ je $M' \cap F \neq \emptyset$.

Kedže M je aj ľavým ideálom, je — pravda — $M \subseteq L^*$.

Tvrdím teraz, že je $F = S - M$. Podľa definície množiny F je $F \subseteq S - M$. Že nemôže byť $F \subset S - M$, dokážeme nepriamo. Nech existuje aspoň jeden element $b \in S - M$, b non $\in F$. Potom ideál $M_1 = M + \langle b, Sb, bS, SbS \rangle$ je obojstranným ideálom z S a keďže je b non $\in M$, bolo by $M_1 \supset M$.

Teda by bolo $M_1 \cap F \neq \emptyset$. Nech je $c \in M_1 \cap F$. Potom na jednej strane (keďže je $c \in M_1$) je $\langle c, Sc, cS, ScS \rangle \subseteq M_1$. Na druhej strane (keďže je $c \in F$) je $\langle c, Sc, cS, ScS \rangle = S$. Teda je $S = M_1$. Keďže b nepatrí do F, je $M_2 = \langle b, Sb, bS, SbS \rangle \neq S$. Súčasne je však M_2 (ako ľavý ideál) $\subseteq L^*$. Teda $M_1 = M + M_2 \subseteq \langle L^* + L^* \rangle = L^* \subset S$, $M_1 \subset S$. To je spor. Preto je vskutku $S - M = F$.

Kedže pre každé $b \in S - M$ je $\langle b, Sb, bS, SbS \rangle = S$ a každé $b \in M$ je $\langle b, Sb, bS, SbS \rangle \subseteq M$, z dôkazu vidieť, že M je maximálnym obojstranným deálom z S. Teda je $M = M^*$. Existencia M^* je dokázaná.

Veta 9,2. *Nech v pologrupe S existuje L^* a nech S má aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Nech $S - L^*$ má viac ako jeden element. Nech diferenčná pologrupa S/M^* má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom:*

a) *L^* je súčasne maximálnym obojstranným ideálom z S, t. j. $L^* = M^*$.*

b) *$S - L^*$ je zľava jednoduchou pologrupou.*

D ô k a z. Existencia M^* vyplýva z predošlej vety. Keďže je $M^* \subseteq L^* \subset S$ a existuje iba jediný maximálny ľavý ideál vôbec, sú splnené predpoklady vety 8,1. Znenie našej vety je jej bezprostredným dôsledkom.

Veta 9,3. *Nech v pologrupe S existuje R^* a L^*. Nech existuje aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Nech $S - L^*$ a $S - R^*$ majú viac ako jeden element. Nech diferenčná pologrupa S/M^* má aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál. Potom*

a) $L^* = R^* = M^*$, b) *$S - M^*$ je grupa.*

D ô k a z. Vyplýva z vety 9,2 a z vety k nej duálnej.

Predpoklad o S/M^* je veľmi všeobecný. Napriek tomu sa vynoruje otázka, či opustením tohto predpokladu nie je možno dostať vety analogické k uvedeným. Vo všeobecnosti nie. Zato v prípade periodických pologrúp možno dokázať tieto vety:

Veta 9,4. *Nech v periodickej pologrupe S existuje L^*. Potom existuje aj M^* a platí:*

a) *$L^* = M^*$.*

b) *Ak $S - M^*$ má viac ako jeden element, je $S - M^*$ zľava jednoduchá pologrupa, ktorá je súčtom disjunktných izomorfných grúp.*

Veta 9,5. *Nech v periodickej pologrupe S existuje L^* a R^*. Potom existuje aj M^* a platí:*

a) *$R^* = L^* = M^*$.*

b) *Ak $S - M^*$ má viac ako jeden element, $S - M^*$ je grupou.*

Dôkazy viet 9,4 a 9,5 sú malou modifikáciou viet 6a, 6b z práce Schwarz [5], a preto ich nebudeme obšírne dokazovať.

10.

Vety analogické k vetám 9,4 a 9,5 dostaneme, ak predpokladáme existenciu pravej, príp. obojstrannej jednotky.

Veta 10,1. *Nech pologrupa S má pravú jednotku e_r. Nech S má aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Nech S/M^* má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom je $S - L^*$ súčtom disjunktných izomorfných grúp.*

D ô k a z. Ak $S - L^*$ má jediný element, je týmto nevyhnutne e_r. Tento element sám osebe tvorí grupu. Môžeme sa teda obmedziť na prípad, že $S - L^*$ má viac ako jeden element. V tomto prípade je $S - L^*$ pologrupou podľa vety 5,1.

Podľa vety 4,4 existuje L^* a M^* a platí $M^* \subseteq L^*$. Podľa vety 9,2 je $L^* = M^*$ a $S - L^*$ je zľava jednoduchou pologrupou. Keďže je $e_r \in S - L^*$, táto zľava jednoduchá pologrupa má idempotent. Teda podľa vety 3,13 je $S - L^*$ súčtom disjunktných izomorfných grúp.

Veta 10,2. *Nech pologrupa má obojstrannú jednotku e. Nech má aspoň jeden obojstranný ideál $\neq S$. Nech S/M^* má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Potom je $S - M^*$ grupou.*

D ô k a z. Podľa vety 4,4 existujú za našich predpokladov ideály M^*, R^*, L^* a platí $M^* \subseteq R^* \cap L^*$. Diferenčná pologrupa S/M^* je jednoduchá pologrupa s nulou, majúca obojstrannú jednotku e. Keďže existuje aspoň jeden minimálny ľavý ideál z S/M^*, je S/M^* podľa vety 3,12 grupa s nulou. Teda je $S - M^*$ grupou, č. b. t. d.

Výsledok vety 10,1 možno formulovať aj takto:

Veta 10,1a. *Nech pologrupa S má pravú jednotku e_r. Potom existuje L^* a M^* a platí:*

a) *buď* $L^* = M^*$ *a* $S - M^*$ *je zľava jednoduchou pologrupou, ktorá je súčtom izomorfných grúp,*

b) *alebo jednoduchá pologrupa* S/M^* *nemá žiaden minimálny ľavý ideál.*

Podobne ako v odseku 9 možno dostať analogické vety, ak vynecháme predpoklad o S/M^*, zato však uvažujeme len špeciálne periodické pologrupy.

V celej práci sme v zásade predpokladali, že diferenčná pologrupa S/M^* má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. Ukázali sme, že v periodickej pologrupe možno tento predpoklad opustiť. Vzniká problém, aké vety dostaneme, ak tento predpoklad opustíme aj vo všeobecnej pologrupe. Tento problém v podstate vedie k štúdiu jednoduchých pologrúp, ktoré nemajú žiaden minimálny ľavý (pravý) ideál. To bude predmetom inej práce.

LITERATÚRA

Clifford A. H., [1] A system arising from a weakened set of group postulates, Ann. of Math. **34** (1933), 865—871.

[2] Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. Math. **70** (1948), 521—526.

[3] Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. Math. **71** (1949), 834—844.

Green J. A., [1] On the structure of semigroups, Ann. of Math. **54** (1951), 163 až 172.

Ľapin J. S., [1] Jadra gomomorfizmov associativnych sistem, Mat. Sbornik, **20** (1947), 497—514.

[2] Normaľnyje kompleksy associativnych sistem, Izv. Ak. Nauk SSSR, seria matem., **14** (1950), 179—192.

[3] Prostyje kommutativnyje associativnyje sistemy, Izv. Ak. Nauk SSSR, seria matem., **14** (1950), 275—282.

[4] Poluprostyje kommutativnyje associativnyje sistemy, Izv. Ak. Nauk SSSR, seria matem., **14** (1950), 367—380.

[5] Associativnyje sistemy vsech častičnych preobrazovanij, DAN, **88** (1953) 13—15.

Maľcev A. I., [1] Simmetričeskie gruppoidy, Mat. Sbornik, **31** (1952), 137—151.

Rees D., [1] On semigroups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **36** (1940), 387—400.

Schwarz Š., [1] O zovšeobecneniach pojmu grupy, Časopis pěst. mat. fyz. **74** (1949), 95—113.

[2] Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fakulty SU, 6 (1943), 1—64.

[3] Struktura prostych polugrupp bez nuľa, Čechoslovackij matematičeskij žurnal, t. 1 (76), 1951, 51—65.

[4] O polugruppach, imejuščich jadro, Čechoslovackij matematičeskij žurnal, t. 1 (76), 1951, 259—301.

[5] Maksimaľnyje idealy v teorii polugrupp, Čechoslovackij matematičeskij žurnal, t. 3 (78), 1953, 139—153.

Vorobiov N. N., [1] Ob idealach associativnych sistem, DAN SSSR, **83**, No 5 (1952), 641—643.

Došlo do redakcie 15. III. 1953.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ И СТРУКТУРА ПОЛУГРУПП

ШВАРЦ Ш.

Выводы

Под полугруппой мы подразумеваем множество S элементов, замкнутое относительно некоторой ассоциативной однозначной операции.

Целью настоящей статьи является изучение структуры множеств S — L, S — M, где L, M — максимальный левый и двусторонний идеал полугруппы S.

В статье изучены например условия, для которых S — L является суммой непересекающихся изоморфных групп.

Аналогично получены общие условия, для которых S — M является группой.

Некоторые результаты нашей статьи будут опубликованы на русском языке в Чехословацком математическом журнале, т. 3 (78).