ANTON KOTZIG

O ISTOM KOMBINATORICKOM PROBLÉME

1. Formulácia problému

Nech n je dané číslo celé, kladné. Označme znakom P_n množinu všetkých čísel celých kladných, menších alebo rovnajúcich sa číslu n.

Uvažujme o konečnej postupnosti čísel A $(a_1, a_2 \dots a_n)$ takej, že platí:

(α) $a_i \neq a_{i+1}$ pre všetky $i \in P_n$, pričom kladieme $a_{n+1} = a_1$;

(β) v postupnosti A sa vyskytujú najviac tri rôzne elementy.

Označme znakom M množinu všetkých tých indexov $i \in P_n$, o ktorých platí:

(γ) $a_{i-1} = a_{i+1}$ (pričom kladieme $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$).

Ukážeme na jednoduchom príklade, že množina indexov M nemôže byť ľubovoľná čiastočná množina množiny P_n.

Nech $n = 5$. Ukážeme napr., že množina indexov $\{2, 4\}$ nemôže tvoriť množinu indexov M uvažovaných vlastností. Podľa definície množiny indexov [[pozri(γ)] muselo by byť nevyhnutne: $a_1 = a_3$, $a_3 = a_5$, čiže $a_1 = a_5$, čo je spor, lebo podľa (α) muselo by byť $a_6 = a_1 \neq a_5$.

Nech je daná pevná postupnosť A $(a_1, a_2 \dots a_n)$, splňujúca podmienky (α), (β). Vyšetríme, aké vlastnosti má príslušná množina indexov M definovaná podľa (γ).

O tom platia vety:

Veta 1. *Množina M je prázdna vtedy a len vtedy, keď postupnosť A má tvar:*

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3 \dots a_1, a_2, a_3).$$

Veta 2. *Nech A je pevná postupnosť splňujúca podmienky (α), (β). Nech množina M definovaná podľa (γ) je neprázdna a jej prvky nech sú:*

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m.$$

Potom elementy množiny M splňujú vzťahy:

$$m \equiv 0 \pmod 2 \qquad (m = 2\mu), \tag{1}$$

$$n + \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} - \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} \equiv 0 \pmod 3. \tag{2}$$

Obrátene dokážeme vetu:

Veta 3. *Nech n je pevné. Nech M je neprázdna množina indexov $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, ktorá spĺňuje podmienky (1), (2). Potom k tejto množine M existuje postupnosť A $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, ktorá spĺňuje podmienky (α), (β) a u ktorej platí: (δ) $a_{i-1} = a_{i+1}$ práve vtedy, ak $i \in M$ (pritom kladieme $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$). Táto postupnosť je až na permutácie daných troch pevných prvkov a_i jednoznačne určená.*

Poznámka: Prípad vynechaný vo vete 2 a 3 (t. j. ak M je prázdna množina) doplňuje veta 1.

2. Dôkaz vety 1.

I. Dokážeme najprv, že ak postupnosť A má tvar $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3 \ldots a_1, a_2, a_3)$, t. j. ak $n \equiv 0 \pmod 3$ a platí:

$$a_i = a_j, \text{ ak } i \equiv j \pmod 3, \tag{3}$$

$$a_i \neq a_j, \text{ ak } i \not\equiv j \pmod 3, \tag{4}$$

potom je množina indexov M prázdna.

Nech totiž i je ľubovoľné číslo $\in P_n$. Podľa (3) platí:

$$a_{i-1} = a_{i+2} \text{ (kde kladieme } a_{n+i} = a_i, \ i > n-2). \tag{5}$$

Podľa (α) je však:

$$a_{i+2} \neq a_{i+1}. \tag{6}$$

Preto je (porov. (5), (6):

$$a_{i-1} \neq a_{i+1}. \tag{7}$$

Teda i nie je prvkom množiny M. Vzhľadom na to, že i bol ľubovoľný prvok množiny P_n, je zrejmé, že M je v danom prípade prázdna množina.

II. Dokážeme teraz, že množina indexov M je len vtedy prázdna,

ak A má tvar $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3 \ldots a_1, a_2, a_3)$,

t. j. ak platí $n \equiv 0 \pmod 3$ a platí (3), (4).

Nech A je ľubovoľná postupnosť $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, pri ktorej množina indexov M, definovaná podľa (γ), je prázdna. Pretože M je podľa predpokladu prázdna, znamená to, že platí:

$$a_{i-1} \neq a_{i+1} \text{ (pričom kladieme } a_{n+j} = a_j, \ j = 0,1). \tag{8}$$

Keďže platí aj (α), znamená to, že pre ľubovoľné i platí: a_{i-1}, a_i, a_{i+1} sú tri rôzne čísla. Podľa (β) v postupnosti A sa vyskytujú najviac tri rôzne elementy; z toho nevyhnutne vyplýva, že medzi členmi $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$ sú dva rovnaké prvky. Pretože trojica a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ako aj trojica a_i, a_{i+1}, a_{i+2}

(kladieme $a_{n+2} = a_2$) predstavujú tri rôzne prvky, je to len tak možné, že platí:

$$a_i = a_{i+3} \text{ pre všetky } i \in P_n \tag{9}$$

(pričom položíme $a_{n+j} = a_j$ pre $j = 1, 2, 3$).

Stačí preto ešte dokázať, že platí:

$$n \equiv 0 \pmod 3. \tag{10}$$

Predpokladajme, že existuje postupnosť A, spĺňujúca podmienku (9), pričom však $n \not\equiv 0 \pmod 3$, t. j. platí:

$$\begin{cases} a_{n-3} = a_n, \\ a_{n-2} = a_1, \\ a_{n-1} = a_2, \\ a_n \ \ = a_3. \end{cases} \tag{11}$$

Pretože je $a_n = a_3$, platí podľa (9) aj

$$a_n = a_{3i} \text{ pre všetky } i < \frac{n}{3}. \tag{12}$$

To znamená, že medzi prvkami a_{n-2}, a_{n-1}, a_n sa vyskytujú dva rovnaké prvky, čo je spor, lebo podľa (α) $a_{n-2} \neq a_{n-1} \neq a_n$ a podľa (8) $a_{n-2} \neq a_n$.

Je preto zrejmé, že $n \equiv 0 \pmod 3$ a vzhľadom na to, že platí (8) postupnosť A, ktorej množina indexov M je prázdna, musí mať nevyhnutne tvar $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2\, a_3 \ldots a_1, a_2, a_3)$.

Tým je dôkaz vety 1 vykonaný.

3. Označenie

Skôr ako prikročíme k dôkazu uvedeného tvrdenia, odvodíme si niektoré vzťahy, týkajúce sa elementov množiny indexov M, resp. P_n, ktoré nám umožnia vlastné dôkazy.

Kvôli pohodlnejšiemu vyjadrovaniu si zaveďme ešte symboly:

$$x_0 = 0, \tag{13}$$

$$x_{m+1} = n + 1. \tag{14}$$

Definujme si množiny $N_0, N_1 \ldots N_m$ ako disjunktné čiastočné množiny množiny $P_n - M$ takto:

Číslo $i \in P_n$ je prvkom množiny N_k $(k = 0, 1 \ldots m)$ vtedy a len vtedy, ak platí:

$$x_k < i < x_{k+1}. \tag{15}$$

Pre súčet množín $N = \sum_{k=0}^{m} N_k$ platí zrejme $N = P_n - M$.

Je zrejmé, že niektoré z množín N_k $(k = 0, 1 \ldots m)$ môžu byť prázdne. Ak teda označíme znakom ν_k $(k = 0, 1 \ldots m)$ počet rôznych čísel $i \in P_n$, vyhovujúcich podmienke (15), pripúšťame, že pre niektoré k môže byť $\nu_k = 0$.

Platí zrejme:

$$\nu_k = x_{k+1} - x_k - 1. \tag{16}$$

Definujme si čísla ε_i $(i = 1, 2 \dots, n)$ nasledujúcim spôsobom:

$$\varepsilon_i = 0, \text{ ak } i \in P_n - M, \tag{17}$$

$$\varepsilon_i = 1, \text{ ak } i \in M; \tag{18}$$

a pomocou čísel ε_i definujme si čísla φ_i takto:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j \qquad (i \in P_n). \tag{19}$$

Pre pohodlie si zaveďme ešte označenie:

$$\varepsilon_0 = 0, \tag{20}$$

$$\varphi_0 = 0. \tag{21}$$

O číslach φ_i platí podľa (19) — vzhľadom na to, ako sú definované čísla ε_i (17), (18):

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i \text{ pre všetky } i \in N, \tag{22}$$

$$\varphi_{i-1} + 1 = \varphi_i \text{ pre všetky } i \in M \tag{23}$$

a teda:

$$\varphi_{x_i} = i \text{ pre všetky } i = 1, 2 \dots m. \tag{24}$$

Podľa (22) je potom nevyhnutne:

$$\varphi_j = i \text{ pre všetky } j \in N_i, \tag{25}$$

čiže ak označíme znakom π_i $(i = 0, 1 \dots m)$ číslo, udávajúce koľkokrát sa v postupnosti $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ vyskytuje číslo i, platí (pozri (24), (25)):

$$\pi_0 = \nu_0 = x_1 - x_0 - 1 = x_1 - 1, \tag{26}$$

$$\pi_i = 1 + \nu_i = x_{i+1} - x_i \qquad (i = 1, 2 \dots m). \tag{27}$$

Pri dôkaze vety (2) bude nás zaujímať ešte počet párnych (resp. nepárnych) čísel v postupnosti $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$.

Pre počet párnych čísel p vyplýva za predpokladu, že m je číslo párne $(m = 2\mu)$:

$$p = \sum_{i=0}^{\mu} \pi_{2i} \tag{28}$$

a pre počet nepárnych čísel q vyplýva:

$$q = \sum_{i=0}^{\mu} \pi_{2i-1}. \tag{29}$$

Podľa (26), (27) dostávame [pozri tiež (14)]:

$$p = x_1 - 1 + x_3 - x_2 + x_5 - x_4 + \dots + x_{m+1} - x_m,$$

$$p = n + \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i}, \tag{30}$$

a pre q (vzhľadom na to, že $p + q = n$):

$$q = \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} - \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1}. \tag{31}$$

Prikročíme teraz k dôkazu vety 2.

4. Dôkaz vety 2.

Pretože v postupnosti A sa vyskytujú podľa predpokladu najviac tri rôzne elementy (označme ich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), môžeme položiť:

$$a_i = \alpha_{p_i} \text{ pre všetky } i \in P_n, \tag{32}$$

pričom p_i bude vždy jedno z čísel 1, 2, 3 a kde je zrejme

$$a_i = a_j \text{ vtedy a len vtedy, ak } p_i = p_j. \tag{33}$$

Stačí preto zaoberať sa len postupnosťou $p_1, p_2 \dots p_n$, ktorá takisto splňuje podmienky (α), (β) a ktorá má tú istú množinu indexov definovanú podľa (γ) ako postupnosť A.

Pre pohodlnejšie vyjadrovanie položme ešte:

$$p_0 = p_n, \tag{34}$$

$$p_{n+1} = p_1. \tag{35}$$

Rozoberme všetky možné prípady, ktoré sa môžu vyskytnúť, ak $p_{i-1} = p_{i+1}$ (resp. ak $p_{i-1} \neq p_{i+1}$), a všimnime si rozdiely $p_i - p_{i-1}$ a $p_{i+1} - p_i$.

Jednotlivé možnosti obsahuje *tab. 1* (resp. *tab. 2*).

Tabuľka 1

p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	Rozdiely $p_i - p_{i-1}$	Rozdiely $p_{i+1} - p_i$
2	1	2	−1	1
3	1	3	−2	2
1	2	1	1	−1
3	2	3	−1	1
1	3	1	2	−2
2	3	2	1	−1

Tabuľka 2

p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	Rozdiely $p_i - p_{i-1}$	Rozdiely $p_{i+1} - p_i$
1	2	3	1	1
1	3	2	2	−1
2	1	3	−1	2
2	3	1	1	−2
3	1	2	−2	1
3	2	1	−1	−1

Vidíme, že platí:

$$(p_i - p_{i-1}) + (p_{i+1} - p_i) \equiv 0 \pmod 3 \text{ vtedy a len vtedy, ak } p_{i-1} = p_{i+1}, \quad (36)$$

$$(p_i - p_{i-1}) - (p_{i+1} - p_i) \equiv 0 \pmod 3 \text{ vtedy a len vtedy, ak } p_{i-1} \neq p_{i+1}. \quad (37)$$

Ak si definujeme čísla ε_i $(i \in P_n)$ podľa (17), (18),

platí: $(p_i - p_{i-1}) \equiv (-1)\, \varepsilon_1\, (p_{i+1} - p_i) \pmod 3$ pre všetky $i \in P_n$, (38)

teda:

$$\left.\begin{aligned} p_2 - p_1 &\equiv [(-1)^{\varepsilon_1} \cdot (p_1 - p_0)] \pmod 3, \\ p_3 - p_2 &\equiv [(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} (p_1 - p_0)] \pmod 3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n - p_{n-1} &\equiv [(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}} (p_1 - p_0)] \pmod 3, \\ p_1 - p_n &= \\ = p_1 - p_0 &\equiv [(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n} (p_1 - p_0)] \pmod 3. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Všimnime si posledný riadok v (39). Pretože je $p_1 - p_0 \not\equiv 0 \pmod 3$ (ináč by bolo $p_1 = p_0 = p_n$, čo odporuje (α)), musí byť nevyhnutne:

$$(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n} = 1 \quad (40)$$

a teda

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \equiv 0 \pmod 2, \quad (41)$$

čiže (pozri (17), (18), v množine M je párny počet indexov, t. j.:

$$m \equiv 0 \pmod 2, \quad (42)$$

čo bolo treba dokázať, pokiaľ ide o vzťah (1).

Sčítajme teraz ľavé, ako aj pravé strany v (39). Dostaneme:

$$(p_1 - p_0)[(-1)^{\varepsilon_1} + (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \dots + (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n}] \equiv 0 \pmod 3. \quad (43)$$

Pretože $p_1 - p_0$ nie je deliteľné troma (pozri (33) a podmienku (α)), je nevyhnutne:

$$(-1)^{\varepsilon_1} + (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \dots + (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n} \equiv 0 \pmod 3. \quad (44)$$

Teda, ak nahradíme výrazy v exponentoch podľa (19):

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varphi_i} \equiv 0 \pmod 3 \quad (45)$$

alebo ak označíme znakom p (resp. znakom q) počet párnych (resp. nepárnych) čísel v postupnosti $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$, platí:

$$p - q \equiv 0 \pmod 3. \quad (46)$$

Dokázali sme už, že číslo m (udávajúce počet indexov v množine M) je párne, preto môžeme do (46) dosadiť za p, q podľa (30), (31), čím dostávame:

$$n + 2 \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} - 2 \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} \equiv 0 \pmod 3 \qquad \left(\mu = \tfrac{1}{2} m\right), \quad (47)$$

čiže:

$$n + \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} - \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} \equiv 0 \pmod 3, \quad (48)$$

čo bolo treba dokázať. (Porov. s (2)).

5. Dôkaz vety 3.

I. Nech n je pevné číslo a nech M je neprázdna množina indexov $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, ktorá spĺňuje podmienky (1), (2).

Utvorme si postupnosť čísel $b_1, b_2 \dots b_n$ definovaných vzťahmi:

$$b_1 = 0, \quad (49)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{\varphi_j} \text{ pre } i = 2, 3 \dots n, \quad (50)$$

pričom čísla φ_j $(j \in P_n)$ sú určené vzťahmi (17), (18), (19) k danej množine M.

Z toho, ako sú čísla b_i $(i \in P_n)$ určené, je zrejmé, že ide o celé čísla kladné, záporné alebo nuly. Je preto možné ku každému číslu b_i $(i \in P_n)$ nájsť číslo β_i také, že platí:

$$b_i \equiv \beta_i \pmod 3, \quad (51)$$

kde $0 < \beta_i \leq 3$ pre všetky $i \in P_n$.

Nech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sú ľubovoľné tri čísla ($\alpha_i \neq \alpha_j$, ak $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$). Tvrdím: ak utvoríme postupnosť čísel $a_1, a_2 \dots a_n$ tak, že položíme:

$$a_i = \alpha_{\beta_i} \text{ pre všetky } i \in P_n, \quad (52)$$

potom postupnosť A $(a_1, a_2 \dots a_n)$ je hľadaná postupnosť, t. j. postupnosť, ktorá spĺňuje podmienky (α), (β) a u ktorej platí (δ).

Vzhľadom na to, že sa v postupnosti A takto skonštruovanej nevyhnutne vyskytujú najviac tri rôzne elementy, stačí dokázať, že je splnená podmienka (α) a že platí (δ). Čo sa týka (α), stačí dokázať, že platí jednak:

$$\beta_i \neq \beta_{i+1} \text{ pre } i = 1, 2 \dots n - 1, \quad (53)$$

jednak:

$$\beta_n \neq \beta_1 \quad (54)$$

alebo aj [pozri (51), (52)]:

$$b_i \not\equiv b_{i+1} \pmod 3 \text{ pre } i = 1, 2, \dots n - 1) \quad (55)$$

a okrem toho:

$$b_n \not\equiv b_1 \pmod 3. \quad (56)$$

Podľa (49), (50) je však:

$$b_{i+1} = b_i + (-1)^{\varphi_i} \text{ pre všetky } i = 1, 2 \dots n - 1. \quad (57)$$

Teda (pretože je alebo $\varphi_i = 0$, alebo $\varphi_i \in P_n$) môžu nastať len tieto dve možnosti:

buď je:

$$b_{i+1} = b_i + 1, \tag{58}$$

buď je:

$$b_{i+1} = b_i - 1. \tag{59}$$

V oboch prípadoch platí nevyhnutne (55) pre všetky $i = 1, 2 \ldots n - 1$ a platí teda aj (53).

Potom však je aj [pozri (52)]:

$$a_i \neq a_{i+1} \text{ pre všetky } i = 1, 2 \ldots n - 1. \tag{60}$$

Treba ešte dokázať, že platí:

$$a_n \neq a_1. \tag{61}$$

Podľa (50) je:

$$b_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\varphi_j} \tag{62}$$

a pretože je [pozri (49)] $b_1 = 0$, stačí dokázať, že je vždy:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\varphi_j} \not\equiv 0 \pmod 3. \tag{63}$$

Pre dôkaz platnosti (63) zrejme stačí, ak dokážeme, že platí [porov. (63)]:

$$f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varphi_i} \equiv 0 \pmod 3, \tag{64}$$

pretože je podľa predpokladu $\varphi_n = m = 2\mu$ a teda $(-1)^{\varphi_n} = 1$.

Sčítancami v súčte pre f (spolu n sčítancov) je buď 1, buď -1, a to znamienko plus sa bude vyskytovať vtedy, ak φ_i je číslo párne, mínus, ak φ_i je číslo nepárne.

Podľa (30), (31) bude teda nevyhnutne platiť:

$$f = p - q = n + 2 \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} - 2 \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} \tag{65}$$

a pretože podľa predpokladu platí (2), je aj:

$$f \equiv 0 \pmod 3. \tag{66}$$

Platí preto (63) aj (61), čo bolo treba dokázať.

II. Časť tvrdenia, pokiaľ ide o splnenie podmienky (α) v nami konštruovanej postupnosti A, sme dokázali. Prikročme teraz k druhej časti tvrdenia. Treba dokázať, že u postupnosti A sostavenej podľa (52) platí (δ). Za tým účelom uvážme, že platí [pozri (49), (50)]:

$$\left.\begin{aligned}
b_3 - b_1 &= (-1)^{\varphi_1} + (-1)^{\varphi_2},\\
b_4 - b_2 &= (-1)^{\varphi_2} + (-1)^{\varphi_3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_n - b_{n-2} &= (-1)^{\varphi_{n-2}} + (-1)^{\varphi_{n-1}},\\
b_1 - b_{n-1} &= -[(-1)^{\varphi_1} + (-1)^{\varphi_2} + \ldots + (-1)^{\varphi_{n-2}}] = (-1)^{\varphi_{n-1}} +\\
&+ (-1)^{\varphi_n} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varphi_i},\\
b_2 - b_n &= (-1)^{\varphi_1} - [(-1)^{\varphi_1} + (-1)^{\varphi_2} + \ldots + (-1)^{\varphi_{n-1}}] =\\
&= (-1)^{\varphi_n} + (-1)^{\varphi_1} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varphi_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Vieme [pozri (64)], že je $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varphi_i} \equiv 0 \pmod 3$. Ďalej je zrejmé, že súčet $(-1)^x + (-1)^y$, kde x, y sú celé čísla, deliteľný je troma práve vtedy, ak $x \not\equiv y$ (mod. 2).

Pretože je však [pozri (19)] $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, 2 \ldots n - 1)$, je zrejmé, že platí:

$$\left.\begin{aligned}
b_3 - b_1 &\equiv 0 \pmod 3 \text{ práve vtedy, ak } \varepsilon_2 = 1,\\
b_4 - b_2 &\equiv 0 \pmod 3 \text{ práve vtedy, ak } \varepsilon_3 = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_1 - b_{n-1} &\equiv 0 \pmod 3 \text{ práve vtedy, ak } \varepsilon_n = 1,\\
b_2 - b_n &\equiv 0 \pmod 3 \text{ práve vtedy, ak } \varepsilon_1 = 1
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

(lebo je $(-1)^{\varphi_n} = 1$, preto musí byť $(-1)^{\varphi_1} = (-1)^{\varepsilon_1} = -1$). Teda platí $\beta_{i-1} = \beta_{i+1}$ práve vtedy, ak $\varepsilon_i = 1$, čiže ak $i \in M$.

To, pravda, znamená, že platí [pozri (52)] $a_{i-1} = a_{i+1}$ práve vtedy, ak $i \in M$, čo bolo treba dokázať.

Tým je dokázané, že nami konštruovaná postupnosť A je hľadanou postupnosťou.

III. Treba ešte dokázať, že pri danom n danou postupnosťou M, splňujúcou podmienky (1), (2), je postupnosť A okrem permutácií daných troch pevných prvkov α_1, α_2, α_3 jednoznačne určená. Prikročme k tejto záverečnej časti dôkazu.

Skonštruujme postupnosť $\bar{A}$ $(\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n)$ týmto spôsobom:

Prvý krok: položme

$$\bar{a}_1 = \alpha_{i_1}, \tag{69}$$

$$\bar{a}_2 = \alpha_{i_2}, \tag{70}$$

pričom (i_1, i_2, i_3) je nejaká pevne zvolená permutácia čísel 1, 2, 3.

Ďalšie kroky:

pri určovaní ďalších členov postupnosti $\bar{a}_i$ (kde $i = 3, 4 \ldots n$) postupujeme tak, že člena $\bar{a}_i$ ustálime podľa už ustálených členov s indexmi nižšími

$(i-2,\ i-1)$, pričom dbáme, aby postupnosť splňovala podmienky (α), (β), (δ). Teda pri ustaľovaní člena $\bar{a}_i\,(i=3, 4 \ldots n)$ požadujme, aby platilo:

$$\bar{a}_i \neq \bar{a}_{i-1} \tag{71}$$

a ďalej, aby platilo alebo:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{i-2}, \tag{72}$$

ak je $(i-1)$ elementom M, alebo

$$\bar{a}_i \neq \bar{a}_{i-2}, \tag{73}$$

ak je $i-1$ elementom $P_n - M$.

Pritom $\bar{a}_i$ bude vždy jedným z prvkov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Týmto požiadavkám je možné pri ustaľovaní ktoréhokoľvek člena postupnosti (najprv ustálime člena $\bar{a}_3$, potom $\bar{a}_4$ atď. až $\bar{a}_n$) vyhovieť len jediným spôsobom. Predpokladajme totiž, že máme určených $i-1$ členov postupnosti a určujeme práve člena $\bar{a}_i$. Rozoznávajme dva prípady:

1. keď $(i-1)$ je elementom M,
2. keď $(i-1)$ je elementom $P_n - M$.

V prvom prípade musí byť nevyhnutne $\bar{a}_i = \bar{a}_{i-2}$ [niet iných možností, ak máme splniť požiadavku (δ)] — teda člen $\bar{a}_i$ je určený jednoznačne; v druhom prípade má platiť súčasne $\bar{a}_i \neq \bar{a}_{i-1}$, $\bar{a}_i \neq \bar{a}_{i-2}$ [pričom vieme, pozri podmienku (71), že je: $\bar{a}_{i-1} \neq \bar{a}_{i-2}$]. Teda v tomto prípade $\bar{a}_{i-2}$, $\bar{a}_{i-1}$, $\bar{a}_i$ sú tri rôzne prvky.

Máme však k dispozícii len tri rôzne prvky, preto ak sú už dva z nich členmi $\bar{a}_{i-1}$, $\bar{a}_{i-2}$ dané, tretí $\bar{a}_i$ je jednoznačne určený.

Ak uvážime, že sme sa zaoberali možnosťami pri určovaní ľubovoľného člena $\bar{a}_i\,(i=3, 4 \ldots n)$ pri pevnej voľbe členov $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, je jasné, že ak má postupnosť $\bar{A}$ splňovať podmienky (α), (β), (δ), možno jej jednotlivých členov pri pevnej voľbe permutácie (i_1, i_2, i_3) stanoviť len jediným spôsobom.

Teda postupnosť $\bar{A}$ sa môže od postupnosti [určenej podľa (49) až (52)] líšiť iba permutáciou (i_1, i_2, i_3), čo bolo treba dokázať.

Tým je dôkaz vety 3 vykonaný.

Došlo dňa 15. septembra 1952.