VLADIMÍR KNICHAL

O KIRCHHOFFOVÝCH ZÁKONECH

§ 1. Úvod

Úkolem tohoto článku je podat matematický důkaz existence a unicity řešení soustavy lineárních rovnic, na kterou vede řešení fysikální úlohy zhruba formulované takto:

Do dané elektrické sítě jsou v jistých místech vloženy ohmické odpory o dané velikosti, kondensátory o dané kapacitě, indukční cívky o dané indukčnosti, které event. také vzájemně na sebe působí danou vzájemnou indukčností, kromě toho jsou v některých místech vloženy zdroje elektrické energie v podobě harmonické elektromotorické síly o dané kruhové frekvenci ω, o dané amplitudě a o daných vzájemných fázových posunutích. O kruhové frekvenci budeme předpokládat, že je u všech vsunutých zdrojů stejná, což mimochodem řečeno není žádné podstatné omezení, neboť obecný případ dostaneme, vzhledem k lineárnosti tohoto systému prostou superposicí našich případů zvláštních, kde ω je všude stejné. Úkolem je určit (harmonické) proudy a jejich fázová posunutí vzhledem k daným napětím v jednotlivých větvích sítě.[1]

Chtěl bych napřed říci několik slov o účelu a nutnosti takového matematického důkazu. Často se totiž setkáváme s názorem, že existenční důkazy a důkazy unicity řešení nějakého fysikálního nebo technického problému jsou zbytečné.

Existence řešení je prý zřejmá proto, že všem matematickým veličinám, které vystupují v daných vztazích, ve skutečném světě odpovídají veličiny fysikální, které můžeme změřit, a že tedy naměřené veličiny, odpovídající neznámým veličinám matematickým v dané soustavě vztahů, udávají nám vlastně matematické řešení daného problému.

Unicita, t. zn. jednoznačnost řešení, je prý zřejmá proto, že za daných podmínek fysikální soustava, odpovídající danému matematickému problému, „naběhne" na docela určitý fysikální děj nebo stav a že jednotlivé fysikální veličiny, vyskytující se při tomto ději nebo při tomto stavu

[1] Matematický důkaz existence a unicity zmíněného systému lineárních rovnic v případě stejnosměrných proudů a v případě, že jsou vsunuty do sítě pouze ohmické odpory, je uveden na př. v knize D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936, 139. Metoda tam uvedená se nehodí na obecný případ zde probíraný.

a odpovídající neznámým v tomto matematickém problému, jsou s libovolnou přesností jednoznačně zjistitelné, nebo si to aspoň v idealisovaném případě můžeme tak představit.

Rozeberme tyto dvě věci trochu podrobněji na příkladě Kirchhoffových zákonů.

E x i s t e n c e. Kirchhoffovy vztahy se odvozují zpravidla z časoprostorových diferenciálních rovnic Maxwellových, které vyjadřují vztahy mezi silami elektrickými, magnetickými, elektrickým proudem a elektromagnetickými konstantami materiálu. To znamená, chtěl-li bych napsat vztahy mezi proudy probíhajícími v jistých bodech dané elektrické sítě a ostatními danými veličinami, určujícími stav sítě, musel bych sestavit Maxwellovy rovnice pro prostor, do něhož jsou vložena jistá tuhá tělesa daného tvaru a o daných rozměrech (vodiče, isolátory), jejichž poloha se eventuálně mění (rotující kotva). Přechod ke Kirchhoffovým zákonům provedeme jistou idealisací. Mimo jiné si představujeme proudovodiče nekonečně tenké, napojené na sebe v ideálních bodech (uzlech sítě). Přechod od skutečné sítě k ideální se však provádí jistým limitním procesem, při čemž výsledek tohoto limitního procesu není fysikálně realisovatelný. Nemůžeme tedy jen tak beze všeho prohlásit, že i v tomto idealisovaném případě řešení existuje, neboť těmi proudovodiči „přece" jisté proudy procházejí.

Jeden takový příklad, kde by byl mnohý fysik ochoten podobný limitní proces uznat za správný, zde uvedu. Představme si nějakou „rozumnou" plochu P, ohraničující jistou část prostoru. Na povrchu této plochy si představme rozložená malá tělíska, od sebe vzájemně isolovaná a každé z nich elektricky nabité na jistý potenciál. Můžeme pak změřit v každém místě prostoru hodnotu potenciálu, který bude vyhovovat známé Laplaceově rovnici a přitom bude na povrchu tělísek nabývat předepsané hodnoty. Představme si přitom, že rozdíly potenciálu pro dvě blízká tělíska budou malé. Zvětšujme nyní počet tělísek, zmenšujme však jejich vzájemnou vzdálenost na ploše tak, aby nám v limitě jejich potenciály daly spojitě se měnící funkci na dané ploše. Poněvadž při tomto limitním procesu existuje v každém jeho stavu potenciální funkce v prostoru, nabývající na povrchu tělísek dosti hustě rozložených po povrchu plochy předepsané hodnoty, a poněvadž tyto hodnoty blíží se neomezeně předepsané spojité funkci, dalo by se týmž právem jako v limitním procesu Kirchhoffově čekat, že bude vždy i v limitním případě existovat potenciální funkce v prostoru (vyhovující Laplaceově rovnici), která na ploše P nabývá předepsané hodnoty.

Avšak dá se dokázat,[1] že i pro plochy velmi rozumné, jednoduché a realisovatelné tomu tak vždy není.

[1] O. D. K e l l o g g, *Foundations of Potential Theory*, Berlin 1929, 334, 10.

U n i c i t a. Kdežto v případě existence řešení se přece jen do určité míry můžeme odvolávat na jistý fysikální „cit", daleko horší je věc s unicitou řešení. Neprovádění důkazů unicity natropí velmi mnoho hrubých chyb v literatuře technické a fysikální. Jak známo, jsou dva Kirchhoffovy zákony. Jeden mluví o obvodech v síti a vede k sestavení první serie lineárních vztahů mezi proudy a vnucenými elektromotorickými silami, druhý mluví o uzlech v síti a vede k sestavení druhé serie lineárních rovnic mezi proudy do uzlu přitékajícími a z uzlu odtékajícími.

Dejme tomu, že by byly objeveny jen vztahy prvé a že by vystihovaly skutečnost naprosto přesně. Soustava by řešení měla, neboť naměřené proudy těmto vztahům vyhovují. Snadno bychom se přesvědčili, že těmito vztahy by proudy v jednotlivých větvích nebyly určeny jednoznačně. Kdybychom tedy našli „nějaké" řešení této soustavy, nemuselo by to být ještě řešení, které odpovídá skutečnému fysikálnímu případu. Fysik namítne: No ovšem, vždyť jsme nepoužili „všechny" vztahy, které mezi těmito fysikálními veličinami platí. Co však tu znamená slůvko „všechny". Zdá se, že jedině možná odpověď je právě tato: Některé fysikální veličiny jsou v případě dané sítě libovolně volitelné (elektromotorické síly, odpory, kapacity, atd.). Z důvodů fysikálních víme, že proudy jsou již těmito veličinami určeny. Použití „všech" vztahů může značit jedině použití takového počtu a takových vztahů, aby proudy byly jimi *jednoznačně* určeny.

Z toho vyplývá naprostá nutnost přesvědčit se o tom, že existuje pouze jediné možné řešení soustavy Kirchhoffových rovnic. Ze žádného způsobu odvození Kirchhoffových zákonů není patrno, že kromě těchto vztahů neplatí mezi uvedenými veličinami žádné další vztahy. Dokážeme-li však unicitu řešení těchto základních vztahů podle proudů, víme, že v podstatě žádné další vztahy mezi těmito veličinami nemohou platit, přesněji řečeno, všechny ostatní vztahy musí být (vystihují-li uvedené vztahy fysikální realitu přesně) matematickým důsledkem těchto základních vztahů.

Matematicky běží při těchto důkazech existence a unicity v podstatě o důkaz, že jistý determinant je různý od nuly. Kdyby tato okolnost byla opravdu tak zcela intuitivně zřejmá, pak by patrně i matematický důkaz této věci, aspoň v případě nejjednodušších sítí, byl snadný. Čtenář však v § 5 pozná, že tato okolnost vůbec není aritmeticky zřejmá, naopak, že se spíše na prvý pohled zdá, že nebude těžké sestrojit příklad opaku. Uvidíme také v § 5, že z tohoto důsledku plynou velmi zajímavé elementární aritmeticko-topologické vztahy.

Z předcházejícího odstavce je patrno, že jde zde o důkaz čistě matematické poučky, i když má fysikální interpretaci. V mnohých fysikálních knihách[1] jsou často takové poučky dokazovány polofysikálním způsobem,

[1] Viz na př. i velmi pěknou knihu W. C a u e r, *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Leipzig 1941.

t. zn. k jejich důkazu se používají podstatně fysikální představy. Domnívám se však, že ryze matematické poučky mají být dokazovány způsobem ryze matematickým.

§ 2. Základní úmluvy a matematické formulace Kirchhoffových zákonů

I. Budu předpokládat, že víme, co to je *proud*, *elektromotorická síla* zdroje, *odpor* proudovodiče, *indukčnost* proudovodiče, *vzájemná indukčnost* dvou různých orientovaných proudovodičů a *kapacita* kondensátoru. Víme, že vzájemná indukčnost dvou orientovaných proudovodičů nezávisí na jejich pořadí, změní však znamení, změníme-li orientaci jednoho z nich.

II. Harmonickým napětím zdroje E, resp. *harmonickým proudem I*, budeme nazývat napětí, resp. proud, jehož časový průběh je dán vztahem

$$E = E_0 \cos(\omega t + \alpha_0), \tag{1}$$

resp.

$$I = I_0 \cos(\omega' t + \beta_0), \tag{2}$$

kde $I_0 \geq 0$, $E_0 \geq 0$, $\omega > 0$, $\omega' > 0$, α_0, β_0 jsou reálné konstanty, t čas, měřený od jistého okamžiku, který v celé další úvaze budeme považovat za pevný. Je jasné, že časovým průběhem nenulového napětí jsou konstanty E_0, ω, α_0 jednoznačně určeny (α_0 až na celistvý násobek 2π). E_0 nazýváme *amplitudou* a ω *kruhovou frekvencí* (stručně frekvencí) napětí a argument $\omega t + \alpha_0$ nazýváme *fází* napětí v daném okamžiku (α_0 je t. zv. fáze počáteční). Napětí E můžeme si představit jako reálnou část komplexního čísla $\mathfrak{E} = E_0 e^{i(\omega t + \alpha_0)}$, kde e je základ přirozených logaritmů a i imaginární jednotka. Z předešlého je patrno, že číslo $\mathfrak{E}$ (komplexní velikost dané elektromotorické síly v daném okamžiku) je jednoznačně určeno. Položíme-li $\mathfrak{E}_0 = E_0 e^{i\alpha_0}$, lze též psát $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$. V dalším budou kruhové frekvence všech vyskytujících se napětí stejné, totiž $\omega > 0$. Bude tedy průběh napětí jednoznačně charakterisován komplexním číslem $\mathfrak{E}_0$. Jeho absolutní velikost bude maximální napětí a jeho argument počáteční fáze. Číslo $\mathfrak{E}_0$ budeme nazývat *komplexní hodnotou napětí* a nebude-li obav z nedorozumění, stručně *napětím*. Úplně analogicky lze vše zavést i pro harmonický proud. Jeho komplexní vyjádření bude dáno vztahem $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 e^{i\omega' t}$, kde $\mathfrak{J}_0$ je *komplexní hodnota proudu.*

III. Představme si proudovodič, který má jistý ohmický odpor R, jistou indukčnost L a do něhož jsou eventuálně zapojeny kondensátory o kapacitách C_1, $C_2 \ldots$ Přiřaďme mu komplexní číslo

$$\mathfrak{R} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \ldots,$$

které budeme nazývat *(komplexním) odporem (impedancí)* proudovodiče (nejsou-li do něho zapojeny kondensátory, vypadnou ovšem z $\mathfrak{R}$ příslušné

členy). Poznamenejme již teď, že ohmický odpor R je vždy číslo kladné, že tedy *impedance má vždy reálnou část kladnou.*

IV. Dvěma různým orientovaným proudovodičům, které mají vzájemnou indukčnost L' (tato nezávisí na pořadí proudovodičů), přiřaďme komplexní číslo $\mathfrak{R}' = i\omega L'$, které budeme nazývat *vzájemným (komplexním) odporem (impedancí)* této dvojice proudovodičů.

V. Orientovaný proudovodič s jistým ohmickým odporem, s jistou indukčností, do kterého jsou eventuálně zapojeny kondensátory, nazýváme *větví.*

Budiž dána soustava větví v_1, $v_2 \ldots v_m$. Nechť $\mathfrak{R}_1$ je (komplexní) odpor větve v_1, $\mathfrak{R}_j$ pro $j = 2, 3 \ldots, m$ vzájemný odpor dvojice v_1, v_j. Prochází-li větví v_j ($j = 1, 2 \ldots m$) harmonický (komplexní) proud $\mathfrak{J}_j$, budeme *potenciálním spádem větve* v_1 (v soustavě $\{v_j\}$) nazývat komplexní číslo

$$\mathfrak{R}_1\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{R}_2\mathfrak{J}_2 + \ldots + \mathfrak{R}_m\mathfrak{J}_m. \tag{3}$$

Je jasné, že změnou orientace větve v_1 se nezmění hodnoty $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3 \ldots, \mathfrak{J}_m$ vůbec, naproti tomu změní znaménko $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3 \ldots \mathfrak{R}_m$. Změnou orientace na př. větve v_2 změní znaménko $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{J}_2$, kdežto všechny ostatní hodnoty zůstanou beze změny. Potenciální spád větve v_1 změní tedy znaménko při změně orientace větve v_1, nezmění se však při změně orientace kterékoliv jiné větve.

VI. Soustavu proudovodičů, jejichž konce jsou (event.) nějak pospojovány, do nichž jsou (event.) na různá místa vloženy zdroje elektromotorické síly, a které jinak nemají styčných míst, budeme nazývat *elektrickou sítí* (stručně sítí). Koncové body jednotlivých proudovodičů (které event. jsou koncovými body také jiných proudovodičů), budeme nazývati *uzly sítě.* Za uzel sítě tudíž pokládáme i osamělý konec proudovodiče, který tedy nikam „nevede", i event. bod, z něhož vycházejí právě dva proudovodiče. Nic však v tomto posledním případě nebrání tomu, abychom oba stýkající se proudovodiče nepočítali za proudovodič jediný (v tom případě však uzel, který je rozhraničuje, zmizí). Síť se může tedy v tomto obecnějším pojetí skládat i z několika samostatných nesouvislých celků.

VII. V dalším orientujme pevně, libovolným způsobem jednotlivé proudovodiče dané sítě. Čtenář si laskavě sám v dalším všimne, že výsledky řešení příslušných rovnic nebudou na této volbě záviset.

Elektromotorickou sílu, vloženou do nějaké větve, budeme pokládat za kladnou, jestliže má (ponechána sama o sobě) „snahu" vyvolat ve větvi proud kladného směru.

VIII. Označme znakem R_ϱ ($\varrho = 1 \ldots r$) jednotlivé větve o (komplexním) odporu $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho}$, dále znakem S_σ ($\sigma = 1 \ldots s$) jednotlivé uzly (index ϱ nebo ϱ' bude vždy probíhat hodnoty $1 \ldots r$, index σ hodnoty $1 \ldots s$, index ν, který se později vyskytne, hodnoty $1 \ldots n$). Znakem $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}$ (pro

$\varrho \neq \varrho'$) označme vzájemný (komplexní) odpor větví $R_\varrho\, R_{\varrho'}$. Je ovšem $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} = \mathfrak{R}_{\varrho'\varrho}$. Elektromotorickou sílu vloženou do větve R_ϱ označme $\mathfrak{E}_\varrho$ a proud jí protékající $\mathfrak{J}_\varrho$.

IX. Přiřadíme-li každé větvi R_ϱ jisté celé číslo c_ϱ, mluvíme o *síťovém komplexu K*. Můžeme si takový komplex představit na př. jako soustavu všech větví R_ϱ, z nichž každou „proběhneme" v kladném smyslu c_ϱ-krát (je-li c_ϱ záporné, tedy vlastně ve smyslu obráceném). Vystupují tedy zde čísla c_ϱ vlastně jako „násobnosti" jednotlivých větví. V snadno srozumitelné symbolice píšeme pak

$$K = c_1 R_1 + c_2 R_2 + \ldots + c_r R_r.$$

Na př. komplex $-R_1$ značí vlastně větev R_1 obráceně orientovanou, komplex $-2\,R_1 + R_3 - R_4$ značí komplex sestávající z opačně orientované větve R_1 dvakrát počítané, z větve R_3 a z opačně orientované větve R_4. Nic nestojí v cestě dalšímu zobecnění, totiž *připustit za c_ϱ libovolná čísla (po případě i komplexní). Můžeme tak učinit*, není to však nutné.

Podobně, přiřadíme-li každému uzlu S_σ jisté číslo d_σ, mluvíme o *uzlovém komplexu*

$$L = \sum_{\sigma=1}^{s} d_\sigma S_\sigma.$$

X. Nechť větev R (t. zn. orientovaný proudovodič) má počáteční bod A a koncový bod B, t. zn. nechť je orientovaný ve směru od A do B. Pak *hranicí* $\dot{R}$ této větve nazýváme uzlový komplex sestavený z krajních bodů A, B, při čemž bod B bereme s násobností 1, bod A s násobností -1, tedy $\dot{R} = B - A$.

Hranicí síťového komplexu $K = \sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$ budeme pak nazývat uzlový komplex $\dot{K} = \sum_\varrho c_\varrho \dot{R}_\varrho$ v snadno srozumitelné symbolice.

Příklad. Mějme síť sestavenou z větví R_1, R_2, R_3. Nechť větev R_1 resp. R_2, R_3 probíhá od bodu S_2 do S_3, resp. od S_3 do S_1, resp. od S_1 do S_2. Budiž $K = R_1 - 2\,R_3$. Pak $\dot{K} = \dot{R}_1 - 2\,\dot{R}_3 = (S_3 - S_2) - 2\,(S_2 - S_1) = 2\,S_1 - 3\,S_2 + S_3$.

Nebo je-li $K = R_1 + R_2 + R_3$, pak $\dot{K} = (S_3 - S_2) + (S_1 - S_3) + (S_2 - S_1) = 0$.

XI. Síťový komplex K nazýváme *cyklem*, když $\dot{K} = 0$. Tento pojem je vlastně zobecněním pojmu *elektrického obvodu (okruhu)* známého z elektrotechniky. Tím se rozumí soustava $M_1, M_2, \ldots, M_m$ větví vybraných z dané sítě (a vhodně přeorientovaných) tak, aby koncový bod každé z nich byl počátečním bodem další a koncový bod poslední počátečním bodem prvé větve. Zřejmě pak komplex $M_1 + M_2 + \ldots + M_m$ je ve smyslu naší definice cyklem.

Každý cykl lze napsat jako lineární kombinaci obvodů.

Důkaz. 1. Nejprve si ukážeme toto: Je-li komplex K nenulovým cyklem, t. zn. je-li $\dot{K} = 0$, $K \neq 0$, pak lze z větví opravdu v K se vyskytujících (t. zn. z větví, jejichž násobnost není nulová) vybrati větve M_1, $M_2 \ldots M_m$ (ev. vhodně přeorientované) tak, že $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_m$ je obvod.

Abychom to ukázali, poznamenejme nejprve toto: hraniční bod každé větve z K je současně hraničním bodem některé jiné větve z K. Kdyby na př. uzel A byl koncovým bodem jen větve N z K, bylo by $K = cN + \ldots$, $c \neq 0$ a $\dot{K} = c\dot{N} + \ldots = cA + \ldots$, kde v dalších členech by se již uzel A nevyskytl. Nemohlo by tedy býti $\dot{K} = 0$.

Vyjděme nyní z libovolné větve N_1, vyskytující se v K. Její koncový bod musí býti počátečním bodem nějaké jiné větve N_2 z K (event. přeorientované), koncový bod větve N_2 opět počátečním bodem větve N_3 z K atd. Poněvadž větví je jen konečný počet, narazíme jistě na okolnost, že nějaké N_n bude již rovné některému N předcházejícímu, tedy $N_n = N_{n'}$, kde $n' < n$. Je pak jasné, že komplex $N_{n'+1} + N_{n'+2} + \ldots + N_n$ je obvod utvořený z navzájem různých větví, obsažených v K (našli jsme tedy $M_j = N_{n'+j}$, $j = 1, 2 \ldots n - n'$).

Náš komplex K můžeme při vhodném označení napsat ve tvaru

$$K = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \ldots + c_m M_m + \ldots$$

Komplex

$$K_1 = K - c_1 M = K - c_1 (M_1 + \ldots + M_m) = (c_2 - c_1)\, M_2 + (c_3 - c_1)\, M_3 + \ldots$$

obsahuje již méně větví než komplex K. Přitom je $\dot{K}_1 = \dot{K} - c_1 \dot{M} = 0$, t. zn. K_1 je opět cykl. Lze tedy K vyjádřiti jako $c_1 M$ plus cykl K_1 obsahující méně větví než K. Na K_1 můžeme opět použít této metody a tak postupovat dále, až celé K vyjádříme jako lineární kombinaci obvodů.

Poznámka. Každý obvod C lze podle definice napsat ve tvaru $C = \sum c_\varrho R_\varrho$, kde ovšem koeficienty c_ϱ nabývají jen jedné z hodnot $-1, 0, 1$ (každý komplex tohoto tvaru, i když je cyklem, nemusí být ovšem obvodem).

XII. První zákon Kirchhoffův. Mají-li všechny vnucené harmonické elektromotorické síly $\mathfrak{E}_\varrho$ stejnou frekvenci ω a jsou-li ohmické odpory všech větví nenulové (tedy kladné), pak proudy procházející jednotlivými větvemi (v ustáleném stavu) jsou rovněž harmonické s toutéž frekvencí ω a jejich komplexní velikosti $\mathfrak{J}_\varrho$ jsou vázány s $\mathfrak{E}_\varrho$ tímto vztahem:

V každém elektrickém obvodu součet všech elektromotorických sil jednotlivých větví (viz začátek odst. XI) *rovná se součtu potenciálních spádů jednotlivých větví tohoto obvodu.*

Čtenář si snadno zverifikuje (viz V) nezávislost tohoto znění na orientaci obvodu a na orientaci v obvodu nezúčastněných větví. Je-li $C = \sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$

takový obvod ($c_\varrho = -1, 0, 1$), je příspěvek k celkové elektromotorické síle od větve $c_\varrho R_\varrho$ (promysleme si možné případy $c_\varrho = -1, 0$ 1) právě $c_\varrho \mathfrak{E}_\varrho$, příspěvek k potenciálnímu spádu (viz V a VIII) $c_\varrho \sum_{\varrho'} \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}, \mathfrak{J}_{\varrho'}$. Tedy první Kirchhoffův zákon tvrdí: Je-li $\sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$ *obvod, je*

$$\sum_\varrho c_\varrho \mathfrak{E}_\varrho = \sum_{\varrho,\varrho'} c_\varrho \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} \mathfrak{J}_{\varrho'}. \tag{4}$$

Je-li ovšem rovnice (4) platná pro všechny obvody $C = \sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$, je platná vůbec pro všechny cykly $\sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$. Nechť totiž $K = \sum_\varrho b_\varrho R_\varrho$ je libovolný cykl. Pak víme (XI), že $K = \sum_i \lambda_i C_i$, kde C_i jsou obvody. Nechť $C_i = \sum_\varrho c_\varrho^{(i)} R_\varrho$. Je tedy $K = \sum_\varrho b_\varrho R_\varrho = \sum_{i,\varrho} \lambda_i c_\varrho^{(i)} R_\varrho = \sum_\varrho R_\varrho \sum_i \lambda_i c_\varrho^{(i)}$.

Porovnáním obdržíme $b_\varrho = \sum_i \lambda_i c_\varrho^{(i)}$. Avšak pro každý obvod C_i, jak víme, platí (4), t. j. $\sum_\varrho c_\varrho^{(i)} \mathfrak{E}_\varrho = \sum_{\varrho\varrho'} c_\varrho^{(i)} \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} \mathfrak{J}_{\varrho'}$. Násobíme-li i-tou rovnici číslem λ_i a sečteme-li vše, obdržíme $\sum_\varrho b_\varrho \mathfrak{E}_\varrho = \sum_{\varrho\varrho'} b_\varrho \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} \mathfrak{J}_{\varrho'}$, což je opět vztah (4) pro cykl $K = \sum_\varrho b_\varrho R_\varrho$.

XIII. Topologická struktura sítě. Hranice každé větve v síti, jak víme, je rozdíl mezi jejím bodem koncovým a počátečním. Můžeme tedy psát

$$\dot{R}_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\varrho\sigma} S_\sigma \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{5}$$

kde

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \textit{koeficienty } a_{\varrho\sigma} \textit{ jsou při pevném } \varrho \textit{ vesměs} \\ \textit{rovny nule s výjimkou právě dvou hodnot } \sigma_1 \neq \sigma_2 \\ \textit{(závislých na } \varrho\textit{), pro které } a_{\varrho\sigma_1} = 1,\ a_{\varrho\sigma_2} = -1. \end{array} \right.$$

Matici $a = \{a_{\varrho\sigma}\}$ budeme nazývat *strukturální maticí* dané sítě. Je jasné, že způsob spojení jednotlivých větví sítě mezi sebou je touto maticí $a = \{a_{\varrho\sigma}\}$ jednoznačně určen. Naopak je zřejmé, že každé matici $a = \{a_{\varrho\sigma}\}$ mající vlastnost (α) odpovídá jistá síť, mající tuto matici za matici strukturální.

XIV. Druhý zákon Kirchhoffův. Budiž $\mathfrak{P}$ soustava všech proudovodičů v dané síti ústících v jistém uzlu. Orientujme je tak, aby všechny směřovaly do tohoto uzlu. Pak součet (komplexních) proudů protékajících těmito větvemi (orientovanými proudovodiči) *se rovná nule.*

Budiž S_σ onen daný uzel. Pak tento uzel je koncovým bodem právě těch větví R_ϱ, pro které $a_{\varrho\sigma} = 1$, a je počátečním bodem právě těch větví R_ϱ, pro které $a_{\varrho\sigma} = -1$ (ostatní $a_{\varrho\sigma}$ se rovnají nule). T. zn., druhý zákon Kirchhoffův lze napsat pro uzel S_σ takto:

$$\sum_\varrho a_{\varrho\sigma} \mathfrak{J}_\varrho = 0. \tag{6}$$

§ 3. Matematická formulace problému a jeho řešení

I. Budiž dána soustava $\{R_\varrho\}$, $\varrho = 1, \ldots, r$ větví (v topologii se říká *jednodimensionálních simplexů* orientovaných) a soustava $\{S_\sigma\}$, $\sigma = 1, \ldots, s$ uzlů *(nuldimensionálních simplexů)*. Nechť pro hranice větví (simplexů) R_ϱ platí vztahy (5), kde koeficienty $a_{\varrho\sigma}$ mají vlastnost XIII (α). Nechť každé dvojici větví $R_\varrho R_{\varrho'}$ je přiřazeno komplexní číslo $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}$ a každé větvi R_ϱ komplexní číslo $\mathfrak{E}_\varrho$. Otázka zní: *Jakým podmínkám musí vyhovovat tato daná čísla* ($\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}$, $\mathfrak{E}_\varrho$), *aby existovala právě jedna soustava komplexních čísel* $\mathfrak{J}_\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots, r$) *tak, že jsou splněny tyto podmínky (Kirchhoffovy zákony):*

1. *pro každý cykl* $C = \sum_\varrho c_\varrho R_\varrho$ *je* (viz XII)

$$\sum_\varrho c_\varrho \mathfrak{E}_\varrho = \sum_{\varrho\varrho'} c_\varrho \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} \mathfrak{J}_{\varrho'}$$

2. (viz XIV)

$$\sum_\varrho a_{\varrho\sigma} \mathfrak{J}_\varrho = 0.$$

Odpověď:

Hlavní věta. *Je-li* $M = \sum_{\varrho\varrho'} \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} x_\varrho \bar{x}_{\varrho'} \neq 0$ *pro každý systém komplexních čísel* $\{x_\varrho\}$, *kde aspoň jedno z čísel* x_ϱ *je různé od nuly, pak existuje právě jedna soustava komplexních čísel* $\{\mathfrak{J}_\varrho\}$, *pro kterou jsou splněny podmínky 1 a 2* (při tom $\bar{x}$ značí číslo komplexně sdružené ku x).

Zejména je podmínka $M \neq 0$ *jistě splněna, když všechny impedance* $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho}$ *mají reálnou část kladnou* (každá větev má nenulový ohmický odpor), *když* $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}$ *pro* $\varrho \neq \varrho'$ *je číslo imaginární a když* $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} = \mathfrak{R}_{\varrho'\varrho}$ (tyto podmínky jsou při fysikální interpretaci splněny vždy, viz *III*, *IV* v § 2).

Důkaz tohoto doplňku. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $x_1 \neq 0$. Výraz M lze psát takto: $M = M_1 + M_2$,

kde

$$M_1 = \sum_\varrho \mathfrak{R}_{\varrho\varrho} x_\varrho \bar{x}_\varrho$$

$$M_2 = \sum_{\varrho<\varrho'} \mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} (x_\varrho \bar{x}_{\varrho'} + \bar{x}_\varrho x_{\varrho'}).$$

Čísla $(x_\varrho \bar{x}_{\varrho'} + \bar{x}_\varrho x_{\varrho'})$ jako součty dvou komplexně sdružených čísel jsou reálná, čísla $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}$ pro $\varrho < \varrho'$ jsou imaginární, tedy M_2 je imaginární (t. zn. má reálnou část rovnu nule). Naproti tomu čísla $x_\varrho \bar{x}_\varrho$ jako součiny dvou komplexně sdružených čísel jsou reálná a nezáporná (dokonce $x_1 \bar{x}_1 > 0$), čísla $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho}$ mají podle předpokladu reálnou část kladnou, tedy čísla $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho} x_\varrho \bar{x}_\varrho$ mají reálnou část nezápornou (dokonce $\mathfrak{R}_{11} x_1 \bar{x}_1$ kladnou). Má tedy M_1 reálnou část kladnou a M_2 nulovou, tedy je $M \neq 0$, c. b. d.

II. Abychom usnadnili důkaz hlavní věty a vůbec další úvahy, budeme používat *maticového počtu*.[1] Při tom *vektor* (t. j. soustavu čísel závislých

[1] B. Bydžovský, *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, Praha.

na jednom indexu) si budeme rovněž představovat jako *matici o jednom sloupci*, znakem $\{b_{\alpha\beta}\}_\beta^\alpha$ budeme značit matici z elementů $b_{\alpha\beta}$, kde horní index (α) je sloupcový a dolní (β) řádkový. *Pruhem budeme značili matici komplexně sdruženou a čárkou matici transponovanou* (t. j. matici vzniklou z dané záměnou řádků za sloupce). V dalším položíme

$$\mathfrak{R}=\{\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'}\}_{\varrho'}^{\varrho},\quad a=\{a_{\varrho\sigma}\}_{\varrho}^{\sigma},\quad \mathfrak{E}=\{\mathfrak{E}_\varrho\},\quad \mathfrak{J}=\{\mathfrak{J}_\varrho\},\quad R=\{R_\varrho\},\quad S=\{S_\sigma\}$$

a podobně. (Matice a má tedy r řádků a s sloupců.) Vztahy (5) lze napsat pak ve tvaru

$$\dot{R}=a\,S. \tag{7}$$

Podmínku, aby $C=\sum_\varrho c_\varrho R_\varrho=c'R$ byl cykl ($c=\{c_\varrho\}$ je vektor), lze napsat tedy takto

$$\dot{C}=c'\dot{R}=c'aS=0,$$

tedy též (ježto S_1, S_2, ... jsou zřejmě podle definice lineárně nezávislé)

$$c'a=0. \tag{8}$$

Podmínku I 1. v tomto paragrafu lze pak vyslovit tímto způsobem: Je-li $C=c'\cdot R$ cykl pro nějaký vektor $c=\{c_\varrho\}$, pak

$$c'\mathfrak{E}=c'\mathfrak{R}\mathfrak{J}. \tag{9}$$

Vzhledem k (8) lze tedy *podmínku I 1.* vyjádřit takto:

Pro všechny vektory c, pro které $c'a=0$, má platit

$$c'\mathfrak{E}=c'\mathfrak{R}\mathfrak{J}. \tag{10}$$

Podmínku I 2. lze napsat takto

$$a'\mathfrak{J}=0. \tag{11}$$

III. Budiž x_1, x_2, ..., x_n úplná soustava lineárně nezávislých řešení rovnice

$$a'x=0 \tag{12}$$

[tedy x resp. x_ν ($\nu=1,\dots,n$) jsou vektory r-dimensionální, tedy sloupce o r prvcích]. Poněvadž a je matice reálná, lze o vektorech x_ν předpokládat, že jsou také reálné. *Označme znakem X matici o sloupcích x_1, x_2, ..., x_n*, tedy matici mající r řádků a n sloupců. Rovnice $x'a=0$ je ovšem ekvivalentní s (12) a tedy podle (8) tvoří $C_\nu=x'_\nu R$ ($\nu=1,\dots,n$) úplný systém lineárně nezávislých cyklů. Podle definice matice X je

$$a'X=0. \tag{13}$$

Je-li x libovolné řešení rovnice (12), je (systém x_ν je úplný)

$$x=\sum_\nu u_\nu x_\nu=Xu \tag{14}$$

pro vhodné koeficienty u_ν (u je vektor $\{u_\nu\}$). *K tomu tedy, aby x bylo řešením rovnice* (12), *je nutné a stačí, aby x mělo tvar $x=Xu$, kde u je vhodný vektor* (n-dimensionální). *Vektor u je pak ovšem určen jednoznačně*, neboť vektory x_1, ..., x_n jsou podle předpokladu lineárně nezávislé.

IV. Přepíšeme si ještě trochu podmínku (10). Rovnice (10) má být splněna pro všechna c, pro která $c'a=0$, t. j. pro která $a'c=0$. Podle III právě taková c se dají napsat ve tvaru $c=Xu$, kde u je libovolný vektor (n-dimensionální). Podmínka (10) tedy žádá, aby pro každé u bylo

$$u'X'(\mathfrak{E}-\mathfrak{R}\mathfrak{J})=0,$$

t. j., aby

$$X'(\mathfrak{E}-\mathfrak{R}\mathfrak{J})=0. \tag{15}$$

Máme tedy řešit rovnice (15) *a* (11) *podle* $\mathfrak{J}$. Obecné řešení rovnice (11) vypadá podle III takto:

$$\mathfrak{J}=Xy, \tag{16}$$

kde y je libovolný vektor (n-dimensionální). Pokusíme se nalézt tedy takové y, aby byla splněna rovněž rovnice (15), tedy

$$X'\mathfrak{E}=X'\mathfrak{R}Xy. \tag{17}$$

Stačí tedy dokázat, že tato rovnice má právě jedno řešení podle y, čili, že determinant čtvercové matice $X'\mathfrak{R}X$ je různý od nuly.

Kdyby tento determinant byl roven nule, existovalo by nenulové řešení rovnice $X'\mathfrak{R}Xy=0$ podle vektoru y. Bylo by pak též

$$\bar{y}'X'\mathfrak{R}Xy=0,$$

tedy $\bar{u}'\mathfrak{R}u=0$, kde $u=Xy$. Podle III je ovšem $u\neq 0$, neboť podle předpokladu je $y\neq 0$. Podle předpokladu učiněného v naší větě je však $\bar{u}'\mathfrak{R}u\neq 0$, což dává spor. Tím je hlavní věta o existenci a unicitě řešení našeho systému rovnic úplně dokázána.

§ 4. Výpočet čísla n

V předcházejícím paragrafu jsme definovali n v podstatě jako počet lineárně nezávislých cyklů v naší síti. Tomuto číslu říkáme v topologii *první Bettiovo číslo sítě. Sestává-li naše síť právě z p souvislých částí, je*

$$n=r-s+p \tag{18}$$

(jak víme, r je počet větví, s počet uzlů).

D ů k a z . Budiž h hodnost matice a. Z teorie lineárních homogenních rovnic víme, že úplný systém řešení rovnice

$$ax=0 \tag{19}$$

podle (s-dimensionálního) vektoru x má právě $(s-h)$ lineárně nezávislých řešení. Vzpomeneme-li si na definici matice a, vidíme, že rovnice (19) vystihuje právě tu okolnost, že $x_\sigma = x_{\sigma'}$, jestliže uzly S_σ, $S_{\sigma'}$ jsou spojeny nějakou větví. Z toho vyplývá, že v každé z p souvislých částí naší sítě lze pro jeden uzel S_σ volit příslušné x_σ úplně libovolně a že ostatní neznámá x_σ příslušná k uzlům S_σ téže souvislé části (komponenty) jsou tím již jednoznačně stanovena (totiž $x_{\sigma'} = x_\sigma$). Je tedy za prvé

$$s-h=p. \tag{20}$$

Za druhé vyšetřme rovnici transponovanou k (19) t. j.

$$a'x=0.$$

Podle téže věty má úplný systém řešení této rovnice právě $(r-h)$ lineárně nezávislých řešení. Avšak podle § 3 III je tento počet roven právě číslu n. Tedy

$$r-h=n. \tag{21}$$

Ze vztahů (20) a (21) vyplývá $s-p=r-n$, tedy (18).

§ 5. **Některé topologicko-aritmetické důsledky**

I. Budiž a strukturální matice příslušná k dané síti. Ponechme označení z paragrafů minulých. Hledejme všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\mathfrak{J} + a\mathfrak{B} &= \mathfrak{E}, \\ a'\mathfrak{J} \qquad &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

podle vektorů $\mathfrak{J}$ (r dimensionálních) a $\mathfrak{B}$ (s-dimensionálních). Dokážeme, *že soustava* (22) *má za předpokladu uvedeného v hlavní větě § 3. řešení, a to v neznámé* $\mathfrak{J}$ *jediné. Jsou-li* $\mathfrak{B}$ *a* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *dvě řešení soustavy* (22) *příslušná k jistému* $\mathfrak{J}$, *pak rozdíl* $x = \mathfrak{B} - \tilde{\mathfrak{B}}$ *je řešením rovnice* $ax=0$.

D ů k a z. Jsou-li splněny rovnice (22), pak je jednak splněna rovnice (11) (t. j. vlastně druhá z rovnic (22)), jednak rovnice (15), neboť násobením prvé z rovnic (22) zleva maticí X' dostaneme

$$X'\mathfrak{R}\mathfrak{J} = X'\mathfrak{E}.$$

Je totiž $X'a=0$ [viz (13)]. To znamená, $\mathfrak{J}$ určené vztahy (22) vyhovuje podmínkám (15) a (11), jimiž, jak víme, je $\mathfrak{J}$ určeno jednoznačně (hlavní věta). Že $a(\mathfrak{B}-\tilde{\mathfrak{B}})=0$, je ovšem samozřejmé.

Naopak budiž $\mathfrak{J}$ vektor vyhovující podmínkám (15) a (11). Stačí nalézti vektor $\mathfrak{B}$ tak, aby $a\mathfrak{B} = \mathfrak{E} - \mathfrak{R}\mathfrak{J}$. Z teorie lineárních rovnic je známo, že tato rovnice má řešení tehdy a jen tehdy, když pro každý vektor x (r-dimensionální), pro který $x'a=0$, je současně $x'(\mathfrak{E} - \mathfrak{R}\mathfrak{J}) = 0$.

Obecné řešení rovnice $x'a=0$ čili $a'x=0$ je však podle III v § 3 $x = Xu$, kde u je libovolný vektor (n-dimensionální). Stačí tedy dokázat, že $u'X'(\mathfrak{E} - \mathfrak{R}\mathfrak{J}) = 0$. To však plyne ihned ze vztahu (15).

II. Aplikujme předcházející větu na případ, kdy je daná síť souvislá ($p=1$).

Označme znakem M čtvercovou $(r+s)$ řádkovou matici soustavy (22), tedy

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{R} & a \\ \hline a' & 0 \end{array}\right).$$

Z § 4 víme, že rovnice $ax=0$ má v podstatě jediné nenulové řešení $(x_1 = x_2 = \ldots = x_s)$ [na př. $J = (1, 1, \ldots, 1)$] a všechna ostatní jsou jeho násobkem kJ.

Podle předcházející věty (I) má tedy soustava (22) jediné řešení, pro které $\mathfrak{B}_s = 0$ ($\mathfrak{B}_s$ značí s-tou komponentu vektoru $\mathfrak{B}$). Vypustíme-li tedy v matici M poslední sloupec, obdržíme matici $\widetilde{M}$, která musí mít maximální možnou hodnost, totiž $r+s-1$. Poněvadž poslední řádek v $\widetilde{M}$ je lineární kombinací ostatních (součet všech řádků matice a' je totiž roven nule, jak plyne z definice matice a [§ 2, XIII, vlastnost α]), lze ho vypustit a matice hodnost nezmění. *Je tedy determinant, který vznikne z* M, *vypustíme-li v něm poslední sloupec a poslední řádek, různý od nuly.*

III. Předpokládejme dále, že (kromě $p=1$) platí $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho'} = 0$ pro $\varrho \neq \varrho'$, a položme prostě $\mathfrak{R}_{\varrho\varrho} = \mathfrak{R}_\varrho$. Je-li $k = \{\varrho_1, \varrho_2, \ldots\}$ nějaká kombinace navzájem různých indexů ze soustavy $\{1, 2, \ldots, r\}$, *označme znakem* $(k)\,\mathfrak{R}$ součin $\mathfrak{R}_{\varrho_1} \cdot \mathfrak{R}_{\varrho_2} \ldots$ Nechť $\bar{k}$ značí *kombinaci komplementární ku* k, t. zn. soustavu navzájem různých indexů, které spolu se soustavou k dává právě soustavu všech indexů $1, 2, \ldots, r$. Je-li c daná matice a k jistá kombinace indexů, bude $(k)\,c$ *značit* matici, která vznikne z c, ponecháme-li v ní pouze řádky o těch indexech, které se nacházejí v kombinaci k.

Soustavu větví v dané síti nazveme *stromem*, když nelze v této soustavě sestrojit obvod, tedy — což je v podstatě stejné — nenulový cykl. Kombinaci k utvořenou z některých indexů $\{1, 2, \ldots, r\}$ nazveme *regulární*, když souhrn větví R_ϱ pro $\varrho \in k$ tvoří *maximální strom* (maximální v tom smyslu, že nelze dodat k němu žádnou větev, aby nová soustava byla rovněž stromem).

P o m o c n á v ě t a. *Budiž* k *nějaká kombinace indexů* $\{1, 2, \ldots, r\}$. *Pak* k *je regulární tehdy a jen tehdy, když* (k) a *má řádkově maximální hodnost* (t. zn. když se hodnost rovná počtu řádků), a *to rovnu* $s-1$.

D ů k a z. α) Nechť k je regulární. Pak soustava všech větví R_ϱ pro $\varrho \in k$ tvoří maximální strom, tedy obsahuje všechny uzly S_σ původní sítě. Strukturální matice, příslušná k tomuto stromu, bude tedy $(k)\,a$ a číslo n stanovené v § 4 pro tuto matici (počet nezávislých cyklů) bude rovno nule.

Podle (21) v § 4 bude tedy hodnost této strukturální matice řádkově maximální (v § 4 je dokázáno, že transponovaná matice v takovém případě bude mít hodnost sloupcově maximální). Podle (18) v § 4 bude v tomto případě počet řádků matice $(k)a$ roven $s-1$.

β) Nechť (k) a má řádkově maximální hodnost, a to rovnu $s-1$. Pak podle téhož § 4 příslušná soustava všech větví R_ϱ pro $\varrho \in k$ neobsahuje žádný cykl $(n=0)$, tedy je stromem. Tento strom spojuje každý uzel S_σ s každým uzlem $S_{\sigma'}$, a tedy je maximální, neboť podle (18) v § 4 je pro matici (k) a počet souvislých částí $p=1$.

IV. Utvořme nyní $s-1$ sloupcovou matici b z matice a tím způsobem, že vypustíme její poslední sloupec. Uvážíme-li, že tento poslední sloupec je lineární kombinací ostatních (součet všech sloupců je roven nule), dostaneme z předcházející pomocné věty tuto větu:

Budiž k nějaká kombinace z indexů $\langle 1, 2, \ldots, r\rangle$. Pak k je regulární tehdy a jen tehdy, když (k) b je čtvercová matice o nenulovém determinantu (hodnost matice se totiž nemění, když z ní vypustíme řadu, která je lineární kombinací řad ostatních; zde tedy poslední sloupec). *V tomto případě je hodnota tohoto determinantu rovna* ± 1 (to platí, jak se dá snadno rozvojem determinantu podle Laplaceovy věty ukázat, pro každý nenulový determinant, který v každém řádku má maximálně dva prvky různé od nuly, a to buď jedno, nebo obě z čísel $+1$, -1: rozvineme determinant vždy podle toho řádku, kde je jen jeden prvek různý od nuly; není-li již takového řádku, je zbylý determinant zřejmě roven nule (součet všech jeho sloupců je roven nule).

V. Podle II víme, že $r+s-1$ — řádkový determinant

$$N = \left|\begin{array}{cccc|c} \mathfrak{R}_1 & 0 & \cdot & 0 & \\ 0 & \mathfrak{R}_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \ddots & & b \\ 0 & 0 & & \mathfrak{R}_r & \\ \hline & & b' & & 0 \end{array}\right|$$

je různý od nuly.

Rozvineme-li tento determinant podle Laplaceovy věty podle posledních $s-1$ sloupců a uvážíme-li, kdy $s-1$ řádkové determinanty utvořené z matice b jsou různé od nuly (viz IV), a že v tomto případě se tyto determinanty rovnají ± 1, snadno nahlédneme (symetrie determinantu N), že

$$N = (-1)^{s-1} \sum_k (\pm 1) \cdot (\bar{k})\, \mathfrak{R} \cdot (\pm 1),$$

kde Σ se vztahuje na všechny regulární kombinace k utvořené z indexů $\langle 1, 2, \ldots, r\rangle$, kde první činitel ± 1 je hodnota nenulového determinantu utvořeného z matice (k) b a třetí činitel ± 1 je hodnota determinantu příslušného k matici $[(k)\, b]'$. Je tedy

$$N = (-1)^{s-1} \sum_k (\bar{k})\, \mathfrak{R} \tag{23}$$

$\bar{k}$ je kombinace komplementární ku k).

Můžeme tedy vyslovit větu:

Je-li síť souvislá a přiřadíme-li každé větvi R_ϱ komplexní číslo $\mathfrak{R}_\varrho$ o kladné reálné části, pak $\sum_k (\bar{k})\, \mathfrak{R} \neq 0$. Přitom Σ se vztahuje na všechny regulární kombinace k utvořené z indexů $\langle 1, 2, \ldots, r\rangle$.

Poznámka. Tato věta se dá ovšem okamžitě zobecnit na sítě nesouvislé; zobecnění je však takřka triviální.

VI. Příklad 1. Mějme souvislou síť o třech uzlech S_σ $(\sigma = 1, 2, 3)$ a třech větvích $\mathfrak{R}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots 3)$, které spojují každý uzel s každým. Maximální stromy jsou zde zřejmě všechny dvojice větví. Je tedy

$$N = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3.$$

V tomto příkladě je ovšem ještě na prvý pohled patrna platnost naší věty: mají-li čísla $\mathfrak{R}_\varrho$ reálnou část kladnou, je zřejmě $N \neq 0$.

Příklad 2. Mějme síť o dvou uzlech S_1, S_2 a třech větvích R_ϱ, spojujících tyto dva uzly. Maximální stromy jsou zde zřejmě všechny jednotlivé větve. Tedy

$$-N = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3.$$

V tomto případě není již tak na prvý pohled patrno, že $N \neq 0$, neboť součiny dvou komplexních čísel o reálných částech kladních mohou vyplnit (až na zápornou poloosu) celou komplexní rovinu. Výraz N lze však psáti takto:

$$-N = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3}\right),$$

z čehož naše tvrzení ovšem zase lehko plyne.

Cvičení. Dokažte přímo: Jsou-li reálné části čísel $\mathfrak{R}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, 4)$ kladné, je

$$N = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_4 \neq 0.$$

Čtenář snadno zjistí, že již na př. v případě šesti větví (můstkové schema) není přímý důkaz tohoto tvrzení vůbec snadný.

Příslušný součet se zde skládá ze 16 členů, z nichž každý je součin třech komplexních čísel o reálných částech kladných.

Došlo dňa 18. decembra 1952.

Z Matematického ústavu ČSAV, Praha.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОШЛОЙ СТАТЬИ.

Законы Кирхгофа, в случае синусоидальных токов в данной электропроводной сети, выражают отношения между этими токами, приложенными электродвижущими силами и постоянными сети (омическими сопротивлениями, емкостями и индуктивностями). Если выразить гармонические токи и напряжение в комплексном виде, то зависимости окажутся линейными и их структура определена структурой сети. Задачей этой статьи является доказать существование и уницитy решения этой системы линейных уравнений в общем случае и то чисто математически без применения физических представлений, что делается, как правило, в учебниках электротехники.

В § 1 обоснованна нужность этого пути решения, в § 2 приводятся основные нужные понятия и проведена математическо-физическая формуляция проблемы, в § 3 приводится доказательство главной теоремы о существовании и уницитe решений и в § 4 выведено известное отношение между числом узлов, числом цепей данной сети и числом независимых округов (это отношение и есть непосредственным последствием выше приведенных выводов). Из главного утверждения выплывают некоторые интересные последствия по арифметике комплексных чисел, как это показано в § 5.

О ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ.

(Содержание первой статьи.)

Пусть n есть данное целое и положительное число. Обозначим знаком P_n множество всех целых положительных чисел меньших или равных числу n. Рассмотрим такую конечную последовательность чисел A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

(α) $a_i \neq a_{i+1}$ для всех $i \in P_n$, причем положим $a_{n+1} = a_1$

(β) в последовательности A может быть небольше трёх различных элементов.

Обозначим ещё знаком M множество всех тех индексов $i \in P_n$, которые выполняют равенство:

(γ) $a_{i-1} = a_{i+1}$ (причем положим $a_0 = a_n$; $a_{n+1} = a_1$).

Автор показывает (на простом примере), что множество индексов M не может быть произвольным подмножесвом P_n и по той причине интересуется свойствами множества индексов M, которое определено по (γ) (для постоянно избранной последовательности A).

Доказывает, что справедливы эти теоремы:

Теорема 1: Множество индексов M пусто тогда и только тогда если у последовательности A вид:

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_1, a_2, a_3).$$

Теорема 2: Пусть A последовательность удовлетворяющая условиям (α), (β). Пусть множество индексов M определенноё по (γ) непустое и пусть его элементы будут: $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Потом элементы множества M удовлетворяют отношениям:

$$m \equiv 0 \pmod 2 \qquad (m = 2\mu)$$

$$n + \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i} - \sum_{i=1}^{\mu} x_{2i-1} \equiv 0 \pmod 3$$

Теорема 3: Пусть n есть постоянное. Пусть M есть непустое множество индексов $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, которое удовлетворяет условиям (1), (2). Потом к этому множеству существует последовательность A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которая удовлетворяет условиям (α), (β). Эта последовательность, за изъятием пермутации данных первых трёх постоянных элементов a_i, единозначно определена.