MATEMATICKO-FYZIKÁLNY SBORNÍK
ROČNÍK II. ČÍSLO 1—2.

MARKO ŠVEC

K PROBLÉMU JEDNOZNAČNOSTI INTEGRÁLOV SYSTÉMU LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC[1]

K 70. narodeninám prof. Dr. Jura Hronca.

§ 1

V tejto práci sa zaoberám problémom jednoznačného určenia riešenia systému lineárnych diferenciálnych rovníc za špeciálnych podmienok kladených na funkcie $y_i(x)$. Dochádzam k výsledku, že riešenie je jednoznačné v prípade, že sú vopred udané hodnoty funkcií: $y_1(x)$ v bode x_1, $y_2(x)$ v bode $x_2, \ldots, y_n(x)$ v bode x_n, ak priemer množiny E, ktorá obsahuje v sebe body $x_1, \ldots, x_n$, neprekročí určitú medzu.[2] Najprv riešim problém pre lin. dif. systém homogenný a potom pre nehomogenný. Nakoniec uvádzam niektoré obecnejšie systémy, na ktoré sa dá rozšíriť platnosť získaných výsledkov bez väčších ťažkostí.

§ 2

Pre uvažovaný systém lin. dif. rovníc

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k + a_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

budem predpokladať, že je udaný fundamentálny obor nezávislej premennej. Pre reálnu premennú je to konečný, uzatvorený interval, v ktorom

[1] Došlo dňa 1. októbra 1951.

[2] Riešenie podobného problému pre lineárnu diferenciálnu rovnicu pozri práce: C. De la Vallée-Poussin, *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre; Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées, Extension aux équations d'ordre n*, Journal de Mathématiques pures et appliqées, 9e s., t. 8, 1929, 125—144; *Sur l'unicité de la détermination d'une intégrale d'une équation linéaire d'ordre n par n points dans le plan complexe*, Annales de la société scientifique de bruxelles, t. 49, 1929, 11—22.

W. B. Fite, *The Relation between the zeros of a solution of a linear homogeneous dif. equation and those of its derivatives*, Annals of mathematics, 2e s., t. 8, 1916—1917, 214—220.

R. Ballieu, *Sur l'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle*, Académie Royale de Belgique, Bull. Cl. Sc. (5) 33, 1947, 725—742.

funkcie $a_{ik}(x)$ a $a_i(x)$ sú spojité, pre komplexnú premennú je to rovinný konvexný ohraničený a uzatvorený obor, v ktorom sú $a_{ik}(x)$ a $a_i(x)$ funkciami analytickými. Tento obor bude oborom definície riešení systému (1), ktoré budú spojité ako aj ich derivácie v prípade reálnej premennej, analytické v prípade komplexnej premennej. Z našich úvah vylúčime zatiaľ prípad, že by sa niektorá dif. rovnica redukovala na tvar

$$y_k' = a_{kk}(x)\, y_k + a_k(x),$$

t. j. budeme zatiaľ predpokladať, že z veličín $a_{ik}(x)$, $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ aspoň jedna nie je identicky nulová na celom fundamentálnom obore.

§ 3

Formulácia problému. Majme homogenný systém lin. dif. rovníc

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

a hľadajme také riešenie, aby v bode x_1 bolo $y_1(x_1) = 0$, v x_2 zasa $y_2(x_2) = 0, \dots,$ v bode x_n $y_n(x_n) = 0$. Množina nulových bodov x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, nech leží v uzatvorenej konvexnej množine E priemeru h, ktorá leží vo fundamentálnom obore.

§ 4

Vyšetrujme najprv špeciálny dif. systém

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{12}y_2 \\
y_2' &= \qquad a_{23}y_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_{n-1}' &= \qquad\qquad a_{n-1,n}y_n \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n
\end{aligned} \tag{3}$$

Pre tento systém dokážeme tieto vety:

Veta 1. *Ak niektoré $y_i(x)$ systému (3) (vyhovujúce podmienkam § 3) je identicky nulové, potom všetky $y_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, sú identicky nulové a je to jediné riešenie tohto systému.*

Prv ako dokážeme vyslovenú vetu, zaveďme označenie, ktorého sa v ďalšom budeme dôsledne držať. Znakom M_{ik} označme maximum z $|a_{ik}|$, znakom u_i maximum z $|y_i'|$ na uzatvorenej konvexnej množine E.

D ô k a z v e t y: Nech podľa predpokladu napr. $y_i \equiv 0$. Potom zo systému priamo vyplýva, že aj $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_2, y_1$ sú identicky nulové, ak majú splňovať podmienky § 3. Ak však je $y_i \equiv 0$ $(i < n)$, potom $y_i' = a_{i,i+1}y_{i+1}$ je tiež identicky nulové. Pretože však $a_{i,i+1}$ podľa predpokladu § 2 nie je identicky nula na celom fundamentálnom obore, musí

$y_{i+1} \equiv 0$. Z toho ďalej dostaneme, že $y_{i+2} \equiv 0$ atď., čiže všetky $y_k(x) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Veta 2. *Ak niektorá z veličín u_i je nula, potom jediné riešenie systému (3) splňujúce podmienky § 3 je riešenie identicky nulové, t. j. $y_k(x) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

D ô k a z: Nech napr. $u_i = 0$, t. j. $y_i' \equiv 0$, odkiaľ $y_i = c$ (c je konštanta). Pretože však podľa predpokladu § 3 má byť $y_i(x_i) = 0$, musí $c = 0$, čiže $y_i(x) \equiv 0$. Potom však na základe vety 1 sú všetky $y_k(x) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Označme znakom ξ_i bod z množiny E, v ktorom $|y_i'(x)|$ nadobúda hodnoty u_i. Potom platí relácia (pre $i < n$)

$$\begin{aligned}
u_i &= |y_i'(\xi_i)| = |a_{i,i+1}(\xi_i)\, y_{i+1}(\xi_i)| \\
&= |a_{i,i+1}(\xi_i)| \cdot \Big|\int_{x_{i+1}}^{\xi_i} y_{i+1}'\,dx\Big| \leqq M_{i,i+1}u_{i+1} \cdot |\xi_i - x_{i+1}|
\end{aligned} \tag{4}$$

alebo

$$u_i \leqq M_{i,+1}\, u_{i+1}h, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{5}$$

alebo tiež

$$\begin{aligned}
u_i \leqq M_{i,i+1}M_{i+1,i+2}\dots M_{k-1,k}u_k h^{k-i} &= \prod_{s=1}^{k-1} M_{s,s+1}u_k h^{k-i}, \\
i = 1, 2, \dots, n-1, \quad 1 \leqq i &< k \leqq n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Z poslednej rovnice systému (3) dostávame reláciu pre u_n:

$$\begin{aligned}
u_n &= |y_n'(\xi_n)| = |a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n|_{x=\xi_n} \\
&\leqq M_{n1} \cdot \Big|\int_{x_1}^{\xi_n} y_1' dx\Big| + M_{n2} \cdot \Big|\int_{x_2}^{\xi_n} y_2' dx\Big| + \dots + M_{nn} \cdot \Big|\int_{x_n}^{\xi_n} y_n' dx\Big| \\
&\leqq M_{n1}u_1 \cdot |\xi_n - x_1| + M_{n2}u_2 \cdot |\xi_n - x_2| + \dots + M_{nn}u_n\,|\xi_n - x_n|
\end{aligned} \tag{7}$$

alebo

$$u_n \leqq M_{n1}u_1h + M_{n2}u_2h + \dots + M_{nn}u_nh. \tag{8}$$

Použitím relácie (6) je

$$\begin{aligned}
u_n \leqq [M_{n1}\prod_{s=1}^{n-1} M_{s,s+1}h^n + M_{n2}\prod_{s=2}^{n-1} M_{s,s+1}h^{n-1} + \dots \\
+ \dots + M_{n,n-1}M_{n-1,n}h^2 + M_{nn}h] \cdot u_n,
\end{aligned} \tag{9}$$

odkiaľ

$$u_n \cdot [1 - M_{nn}h - \sum_{j=1}^{n-1} M_{n,n-j} \prod_{s=1}^{j} M_{n-s,n-s+1}h^{j+1}] \leqq \emptyset. \tag{10}$$

Pre $h = 0$ dostávame z tejto relácie $u_n \leqq \emptyset$. Pretože u_n je nezáporné, splní sa táto relácia len pre $u_n = 0$, z čoho na základe vety 2 vyplýva, že riešenie, splňujúce podmienku § 3, je identicky nulové a je to jediné. V tomto prípade množina nulových bodov redukuje sa na jeden bod, v ktorom všetky $y_i(x)$ majú nadobudnúť hodnotu nulovú (Cauchyho teorém).

Ak h je menšie ako pozitívny koreň rovnice

$$f_1(x) = 1 - M_{nn}x - \sum_{j=1}^{n-1} M_{n,n-j} \prod_{s=1}^{j} M_{n-s,n-s+1} x^{j+1} = \emptyset, \qquad (11)$$

je výraz v hranatej zátvorke na ľavej strane v (10) kladný, preto nerovnosť (10) môže sa splniť, keďže u_n je nezáporné, len ak $u_n = 0$. To však na základe vety 2 znamená, že riešenie systému (3) splňujúce podmienky § 3 je identicky nulové a je to jediné tej vlastnosti. Platí teda veta:

Veta 3. *Ak priemer h množiny E obsahujúcej nulové body riešenia systému dif. rovníc (3) je menší ako pozitívny koreň rovnice (11), má systém dif. rovníc (3) jediné riešenie splňujúce podmienky § 3, a to riešenie identicky nulové.*

Optimálnejšiu podmienku pre h dostaneme, ak pri limitácii veličín u postupujeme takto:

Pre hodnoty $| y_i(x) |$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dostávame,

$$| y_i(x) | = | \int_{x_i}^{x} y_i' dx | = \int_{x_i}^{x} (a_{i,i+1}(z) \int_{x_{i+1}}^{z} y_{i+1}'(t)\, dt)\, dz | \qquad (12)$$

$$\leq M_{i,i+1} u_{i+1} \cdot | \int_{x_i}^{z} | z - x_{i+1} |\, dz |.$$

Ukážeme, že integrál

$$I = \int_{x_i}^{z} | z - x_{i+1} |\, dz \leq K h^2, \qquad (13)$$

kde $K = \frac{1}{2}$ v prípade reálnej premennej a $K = \frac{4 + 3 \log 3}{8}$ v prípade komplexnej premennej.[3]

V prípade reálnej premennej patria x, x_i, x_{i+1} do tohože intervalu dĺžky h. Pretože pod integrálom je kladná funkcia, je

$$I \leq \int_{x_i}^{x_i+h} | z - x_{i+1} |\, dz.$$

Použime substitúciu $z = x_i + ht$. Pretože je $z \in \langle x_i, x_i + h \rangle$, bude $t \in \langle 0,1 \rangle$. Bod x_i posunieme pritom do ľavého koncového bodu intervalu dĺžky h. Potom pri vhodnom $a \in \langle 0,1 \rangle$ je $x_{i+1} = x_i + ha$ a

$$| z - x_{i+1} | = h | t - a |, \; dz = h\, dt.$$

Po prevedení substitúcie je

$$I \leq h^2 \int_0^1 | t - a |\, dt.$$

[3] Pozri citovaný článok R. Ballieu, 729—730.

Označme

$$g(a) = \int_0^1 | t - a |\, dt.$$

Po rozdelení integračného oboru bude

$$g(a) = \int_0^a (a - t)\, dt + \int_a^1 (t - a)\, dt = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

Táto funkcia nadobúda v intervale $0 \leq a \leq 1$ najväčšiu hodnotu v bodoch

$$a = 0 \text{ a } a = 1,$$

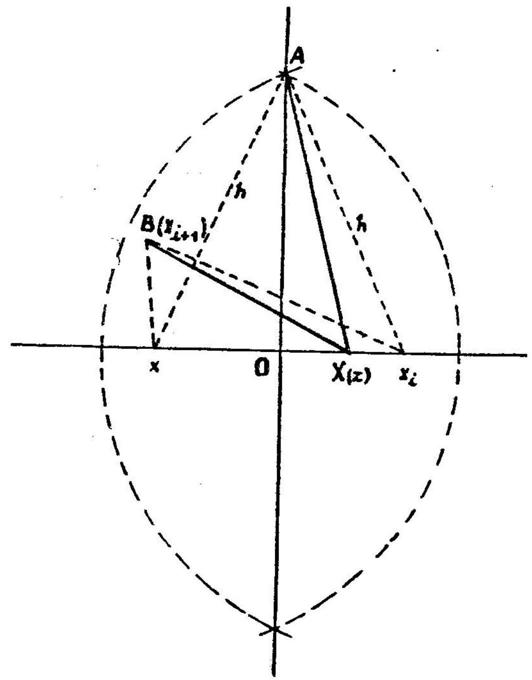
a to

$$g(0) = g(1) = \frac{1}{2} = K.$$

Je teda skutočne

$$I \leq h^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

V prípade komplexnej premennej je I integrál zo vzdialenosti vrcholu trojuholníka, prípadne degenerovaného, od bodov protiľahlej základne, pričom integrácia sa prevádza pozdĺž tejto základne. Strany tohto trojuholníka sú najviac rovné priemeru h množiny E, keďže všetky tri vrcholy trojuholníka ležia v množine E. Nechajme základňu pevnú a označme znakom A vrchol rovnoramenného trojuholníka sostrojeného nad touto základňou, pričom obe rovné strany nech majú dĺžku h. (Pozri obrázok.)



Obr. 1.

Ak pôvodný trojuholník prejde v uvedený rovnoramenný trojuholník, nadobudne integrál svoju najväčšiu hodnotu, a to z tohto dôvodu: ak je B vrcholom pôvodného trojuholníka, ktorého strany sú menšie, najviac rovné h, tento vrchol leží v uzatvorenom obore Ω spoločnom dvom kruhom o polomeroch h a o stredoch v koncových bodoch základne. Vzdialenosť ľubovoľného bodu $X(z)$ na základni od bodu B z Ω má najväčšiu hodnotu, ak bod B splynie s bodom A. Vtedy aj funkcia pod integrálom nadobúda najväčšiu hodnotu, a preto aj integrál I.

Dĺžka základne uvažovaného trojuholníka je $|x - x_i| = 2ah$, $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$. Položme počiatok súradného systému do stredu základne. Os z nech je totožná so základňou. Potom, ak $x_{i+1} \in \Omega$ a z je súradnica bodu základne $X(z)$, je

$$|z - x_{i+1}| \leqq \overline{XA} = \sqrt{h^2 - a^2h^2 + z^2},$$

takže

$$I \leqq \int_{x_i}^{z} \sqrt{h^2 - a^2h^2 + z^2}dz = 2\int_0^{ah} \sqrt{h^2 - a^2h^2 + z^2}\, dz.$$

Ak použijeme substitúciu $z = ht$, je $dz = h \cdot dt$ a medze O a a. Potom je

$$I \leqq 2\int_0^a \sqrt{h^2 - a^2h^2 + h^2t^2} \cdot h dt = 2h^2 \int_0^a \sqrt{1 - a^2 + t^2}\, dt$$

alebo

$$I \leqq h^2 g(a),$$

kde

$$g(a) = 2\int_0^a \sqrt{1 - a^2 + t^2}\, dt.$$

Vypočítaním tohto integrálu dostávame

$$g(a) = \frac{1}{2}\left[2a + (1 - a^2) \cdot \log\frac{1+a}{1-a}\right], \quad 0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}.$$

Táto nadobúda v intervale $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ najväčšiu hodnotu v bode $a = \frac{1}{2}$, a to

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = K = \frac{4 + 3\log 3}{8}.$$

Tým je horné tvrdenie dokázané.

Po tomto z (12) môžeme písať

$$|y_i(x)| \leqq M_{i,i+1}u_{i+1}Kh^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Pre u_n dostaneme na základe (14) a (3)

$$u_n \leqq M_{n1}M_{12}Kh^2 \cdot u_2 + M_{n2}M_{23}Kh^2 \cdot u_3 + \ldots + \\ + \ldots + M_{n,n-1}M_{n-1,n}Kh^2 \cdot u_n + M_{nn}h \cdot u_n. \tag{15}$$

Použitím (6) dostaneme

$$u_n\left[1 - M_{nn}h - K\sum_{j=1}^{n-1} M_{n,n-j}\prod_{s=1}^{j} M_{n-s,n-s+1}h^{j+1}\right] \leqq \emptyset. \tag{16}$$

Pre h menšie ako pozitívny koreň rovnice

$$f_2(x) = 1 - M_{nn}x - K\sum_{j=1}^{n-1} M_{n,n-j}\prod_{s=1}^{j} M_{n-s,n-s+1}x^{j+1} = \emptyset \tag{17}$$

je výraz v zátvorke v (16) kladný. Preto relácia (16) splní sa v tom prípade

jedine pre $u_n = 0$. Potom však riešenie systému (3) splňujúce podmienky § 3, je na množine E identicky nulové a je to jediné tej vlastnosti. Je ľahko zistiť, že pozitívny koreň rovnice (17) je väčší ako pozitívny koreň rovnice (11).

Všimnime si toto: Ak v (5), (8) a (15) vezmeme znamienko rovnosti, je rovnica (11) totožná s charakteristickou rovnicou systému (5) a (8) a rovnica (17) je zasa totožná s charakteristickou rovnicou systému (5) a (15). Napr. rovnica (11) je totožná s charakteristickou rovnicou

$$f_1(x) = \begin{vmatrix} 1, & -M_{12}^x, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -M_{23}^x, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 1, & -M_{n-1,n}^x \\ -M_{n1}^x, & -M_{n2}^x, & -M_{n3}^x, & -M_{n4}^x, \ldots, & -M_{n,n-1}^x, & 1 - M_{n,n}^x \end{vmatrix} = \emptyset.$$

§ 5

A. Vezmime teraz obecný homogenný systém lin. dif. rovníc

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

V obore E, ktorý obsahuje množinu nulových bodov x_i, nech majú veličiny u_i a M_{ik} tenže význam ako prv.

Nech $|y_i'(x)|$ nadobúda v bode ξ_i z E hodnotu u_i. Potom

$$u_i = |y_i'(\xi_i)| = |a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n|_{x=\xi_i} \leqq \\ \leqq [\,|a_{i1}| \cdot |y_1| + |a_{i2}|\,|y_2| + \ldots + |a_{in}| \cdot |y_n|\,]_{x=\xi_i} \leqq \\ \leqq M_{i1} \cdot \left|\int_{x_1}^{\xi_i} y_1' dx\right| + M_{i2} \cdot \left|\int_{x_2}^{\xi_i} y_2' dx\right| + \ldots + M_{in} \cdot \left|\int_{x_n}^{\xi_i} y_n' dx\right| \leqq \\ \leqq M_{i1}u_1|\xi_i - x_1| + M_{i2}u_2|\xi_i - x_2| + \ldots + M_{in}u_n|\xi_i - x_n|$$

a konečne

$$u_i \leqq M_{i1}u_1h + M_{i2}u_2h + \ldots + M_{in}u_nh \tag{19}$$

alebo sumárne

$$u_i \leqq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}u_kh, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Označme

$$M_i = \max\{M_{ik}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom z (20) dostaneme

$$u_i \leqq M_ih\sum_{k=1}^{n} u_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Spočítaním pre všetky i je ďalej

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_ih \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i. \tag{22}$$

Predpokladajme, že existuje riešenie splňujúce podmienky § 3 a nie je identicky nulové, t. j. je $\sum_{i=k}^{n} u_i \neq 0$. Potom z (22) máme

$$1 \leq h \sum_{i=1}^{n} M_i,$$

odkiaľ

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \lesseqgtr h. \tag{23}$$

Ak teda existuje riešenie systému (2), splňujúce podmienky § 3, a nie je identicky nulové, musí byť priemer množiny nulových bodov väčší alebo rovný hodnote $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$. Ak však je ten priemer menší ako uvedená hodnota, z (22) vyplýva, že musí $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, t. j. všetky $u_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, čo značí, že riešenie systému (2) splňujúce podmienky § 3 je identicky nulové.

Napr. v prípade systému

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -y_1$$

je $n = 2$, $M_{11} = 0$, $M_{12} = 1$, $M_{21} = 1$, $M_{22} = 0$ a $M_1 = M_2 = 1$. Z (23) vyplýva, že riešenie je identicky nulové, ak $h < \frac{1}{2}$. Netriviálne riešenie môže existovať pre $h > \frac{1}{2}$. Ľahko sa dá zistiť priamo, že existuje, pravda, až pre $h = |x_2 - x_1| = \frac{\pi}{2}$. Ako vidieť z príkladu, hranica (23) pre číslo h je dosť hrubá. Ide o to, zlepšiť túto hranicu.

B. Vyšetrujeme systém nerovností (20) ďalej a píšme ho v maticovom tvare

$$(rJ - M)(u) \leq (0),^{4} \tag{24}$$

kde $r = \frac{1}{h}$, $h \neq 0$, J je jednotková matica a M je štvorcová matica n-tého rádu, ktorej prvky sú nezáporné. Vezmime najprv prípad, že prvky matice M sú všetky kladné. Potom matica M iste nie je nilpotentná, pretože žiadna jej mocnina nedá nulovú maticu. Jej charakteristická rovnica nemá teda nulu za n-násobný koreň. Pre túto maticu ďalej platia nasledujúce vety, ktoré uvádzame bez dôkazu.

[4] (u) a (O) sú stĺpcové matice, (O) je nulová matica. Relácia $\leq$ zavedená v (24) medzi maticami je v smysle, že tá istá relácia $\leq$ platí medzi odpovedajúcimi prvkami oboch porovnávaných matíc.

I. Ak sú v matici všetky prvky M_{ik} reálne a kladné, má matica najmenej jeden charakteristický koreň kladný. Ak ρ značí najväčší kladný koreň, sú všetky minory charakteristického determinantu

$$\begin{vmatrix} r - M_{11}, & -M_{12}, & \ldots, & -M_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -M_{n1}, & -M_{n2}, & \ldots, & r - M_{nn} \end{vmatrix} \tag{25}$$

pre $r \geq \varrho$ kladné.[5]

II. Ak sú všetky prvky matice kladné, má jej charakteristická rovnica jeden jednoduchý koreň, ktorý je kladný a ktorý je väčší ako absolútna hodnota každého iného koreňa.[5]

Z tohto plynie, že pre najväčší kladný koreň ρ, pretože je jednoduchý, je hodnosť matice

$$(\rho J - M) \tag{26}$$

ako aj všetkých jej mocnín práve $n - 1$.

Tiež matice

$$(\rho^k J - M^k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

majú hodnosť $n - 1$, pretože ak je ϱ najväčším kladným charakteristickým koreňom matice M, je ϱ^k najväčším kladným charakteristickým koreňom matice M^k a je jednoduchým, ako to vyplýva z vety II. Platí totiž: Ak sú

$$r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, \rho$$

charakteristické korene matice M, sú

$$r_1^k\, r_2^k, \ldots, r_{n-1}^k, \rho^k$$

charakteristickými koreňmi matice M^k. Podľa vety II

$$|r_i| < \rho,$$

odkiaľ

$$|r_i^k| < \rho^k. \tag{28}$$

Je teda ρ^k koreň kladný, najväčší zpomedzi koreňov r^i a je jednoduchý, odkiaľ naše tvrdenie o maticiach $(\rho^k J - M^k)$ vyplýva.

C. Predpokladajme teraz, že v (24) platí znamienko rovnosti. Potom máme pred sebou homogenný systém. Pre r rovné koreňu charakteristickej rovnice

$$\| rJ - M \| = 0 \tag{29}$$

má tento systém nenulové riešenie. Ak vezmeme $r = \rho$, t. j. najväčší kladný koreň rovnice (29), pretože je tento jednoduchý, je v tom prípade hodnosť charakteristického determinantu práva $n - 1$ a okrem toho sú vtedy všetky jeho minory kladné, môžeme preto riešenie systému (24) písať v tvare

[5] Pozri O. Perron, *Algebra* II, 37, 40.

$$u_1 : u_2 : \ldots : u_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn}, \tag{30}$$

kde A_{ni} sú minory charakteristického determinantu. Podľa uvedených vlastností minorov charakteristického determinantu je zrejmá nasledujúca vlastnosť riešenia: všetky u_i majú rovnaké znamienko; ak jedno z u_i je nulové, potom sú v š e t k y.

D. Vezmime opäť reláciu

$$(rJ - M)(u) \leqq (0) \tag{31}$$

a eliminujme v tejto relácii všetky u_i, okrem jedného, napr. u_k. Dosiahneme to napr. tak, že riadky systému (31), t. j. systému

$$\begin{aligned} (r - M_{11}) u_1 - M_{12} u_2 - \ldots - M_{1n} u_n &\leqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -M_{n1} u_1 - M_{n2} u_2 - \ldots + (r - M_{nn}) u_n &\leqq 0, \end{aligned} \tag{32}$$

násobíme podľa poradia minormi $(n-1)$-radu, patriacimi k prvkom k-tého stĺpca determinantu $\| rJ - M \|$, kde $r \geqq \rho$. Označme tieto minory $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$. Podľa vety I sú tieto minory pre $r \geqq \rho$ kladné, preto nerovnosti (32) sa nezmenia, ak ich podľa poradia násobíme týmito minormi. Po vynásobení získané nerovnosti spočítajme. Dostávame

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (r\delta_{i1} - M_{i1}) A_{ik} u_1 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} (r\delta_{ik} - M_{ik}) A_{ik} u_k + \ldots \\ + \ldots + \sum_{i=1}^{n} (r\delta_{in} - M_{in}) A_{ik} u_n \leqq 0, \end{aligned} \tag{33}$$

kde $\delta_{ik} = 0$ pre $i \neq k$ a $\delta_{ik} = 1$ pre $i = k$.

Podľa známej vety o determinantoch je

$$\sum_{i=1}^{n} (r\delta_{im} - M_{im}) A_{ik} = 0 \text{ pre } m \neq k. \tag{34}$$

Preto nerovnosť (33) sa redukuje na

$$\sum_{i=1}^{n} (r\delta_{ik} - M_{ik}) A_{ik} u_k \leqq 0, \tag{35}$$

alebo

$$f(r) \cdot u_k \leqq 0, \tag{36}$$

kde

$$f(r) = \sum_{i=1}^{n} (r\delta_{ik} - M_{ik}) A_{ik} = \| rJ - M \|$$

je charakteristický polynom. Pre $r > \rho$ je $f(r) > 0$, preto nerovnosť (36) sa splní, pretože u_k je nezáporné, iba ak $u_k = 0$. Ak urobíme tento pochod pre $k = 1, 2, \ldots, n$, prichádzame k výsledku: Systém nerovností (32) má pre $r > \varrho$ a u_k nezáporné jediné riešenie, a to nulové, t. j. $u_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. To však znamená, že pre $r > \rho$ má systém dif. rovníc (2) jediné riešenie splňujúce podmienky § 3, a to identicky nulové. Dokázali sme teda (zatiaľ s obmedzením $M_{ik} > 0$) túto vetu:

Veta 4. *Riešenie systému (2) splňujúce podmienky § 3 je identicky nulové a je to jediné tej vlastnosti, ak priemer h množiny E uzavárajúcej množinu nulových bodov x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) je menší ako prevrátená hodnota najväčšieho kladného koreňa charakteristickej rovnice $\| rJ - M \| = 0$.*

V ďalších odsekoch E, F ukážeme, že predpoklad $M_{ik} > 0$, za ktorého sme dokázali vetu 4, nie je podstatným a že ho možno nahradiť obecným totiž $M_{ik} \geqq 0$.

E. Predpokladajme teraz, že prvky matice M sú n e z á p o r n é, a l e t a k é, ž e v k a ž d o m r i a d k u m a t i c e M j e n a j m e n e j j e d e n p r v o k M_{ik}, $i \neq k$, r ô z n y o d n u l y. Ukážeme najprv, že matica M nie je nilpotentná. V i-tom riadku podľa predpokladu je aspoň jeden prvok nenulový, kladný. Označme ho M_{ik}, t. j. je v i-tom riadku a k-tom stĺpci. Tvorme maticu M^2. Hľadajme jej prvky i-tého riadku. Dostaneme ich ako súčty súčinov prvkov i-tého riadku s prvkami jednotlivých stĺpcov matice M. V k-tom riadku je podľa predpokladu tiež aspoň jeden prvok nenulový. Nech je to napr. M_{kj}, t. j. je v j-tom stĺpci. Potom prvok c_{ij} matice M^2 je

$$c_{ij} = \ldots + M_{ik} M_{kj} + \ldots$$

zrejme nenulový. Má teda matica M^2 v i-tom riadku prvok nenulový. Z úvahy je ďalej zrejmé, že matica M^2 má v každom riadku aspoň jeden prvok nenulový, tak ako to bolo u matice M. Úplnou indukciou sa dá ľahko dokázať, že matica M^k má tiež v každom riadku aspoň jeden prvok nenulový ($k = 1, 2, \ldots$), ak matica M má v každom riadku aspoň jeden prvok nenulový. Ináč povedané, žiadna mocnina matice M, ktorá má v každom riadku aspoň jeden prvok nenulový, nedá maticu nulovú, čiže matica M nie je nilpotentná. Znamená to ďalej, že charakteristická rovnica tejto matice nemá všetky korene nulové. Dokážeme ďalej platnosť vety:

Charakteristická rovnica matice M má aspoň jeden nezáporný koreň. Ak ρ značí najväčší nezáporný koreň, sú minory determinantu $\| rJ - M \|$ pre $r \geqq \varrho$ všetky nezáporné.

D ô k a z vykonáme úplnou indukciou. Pre $n = 2$ ide o determinant

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} r - M_{11}, & -M_{12} \\ -M_{21}, & r - M_{22} \end{vmatrix}.$$

Je $\triangle_2(M_{ii}) = -M_{21}M_{12} \leqq 0$. Pre r dostatočne veľké je však $\triangle_2(r) > 0$. To značí, pretože $M_{ii} \geqq 0$, že rovnica $\triangle_2(r) = 0$ má nezáporný koreň a najväčší nezáporný koreň, označme ho ρ, je väčší, najviac rovný M_{ii}. Minory determinantu $\triangle_2(r)$ sú

$$\frac{\partial \triangle_2(r)}{\partial (r - M_{11})} = r - M_{22}, \quad \frac{\partial \triangle_2(r)}{\partial (-M_{12})} = M_{21},$$

$$\frac{\partial \triangle_2(r)}{\partial (-M_{21})} = M_{12}, \quad \frac{\partial \triangle_2(r)}{\partial (r - M_{22})} = r - M_{11}.$$

Vidieť, že pre $r \geqq \rho$ sú nezáporné. Pre $r > \rho$ sú kladné alebo které nie sú kladné, sú identicky nulové. Tým je tvrdenie pre $n = 2$ dokázané.

Predpokladajme teraz, že veta je správna pre n, t. j. pre determinant

$$\Delta_n(r) = \begin{vmatrix} r - M_{11}, \dots, -M_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ -M_{n1}, \dots, r - M_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ukážeme, že platí aj pre $n + 1$, t. j. pre determinant

$$\Delta_{n+1}(r) = \begin{vmatrix} r - M_{11}, -M_{12}, \dots, -M_{1n}, -M_{1,n+1} \\ -M_{21}, r - M_{22}, \dots, -M_{2n}, -M_{2,n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -M_{n1}, -M_{n2}, \dots, r - M_{nn}, -M_{n,n+1} \\ -M_{n+1,1}, -M_{n+1,2}, \dots, -M_{n+1,n}, r - M_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

Tento sa dá písať v tvare

$$\Delta_{n+1}(r) = (r - M_{n+1,n+1})\,\Delta_n(r) + U,$$

kde U je determinant, ktorý vznikne z Δ_{n+1}, ak miesto prvku $(r - M_{n+1,n+1})$ dáme nulu. Ak U rozvinieme, bude

$$\Delta_{n+1}(r) = (r - M_{n+1,n+1})\,\Delta_n(r) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} M_{i,n+1} M_{n+1,j}, \tag{a}$$

kde A_{ji} sú minory determinantu $\Delta_n(r)$. Podľa predpokladu existuje $\rho_1 \geqq 0$, že $\Delta(\rho_1) = 0$ a pre $r \geqq \rho_1$, sú $A_{ji}(r) \geqq 0$.

Pretože prvky

$$\begin{matrix} M_{1,n+1}, \dots, M_{n,n+1} \\ M_{n+1,1}, \dots, M_{n+1,n} \end{matrix} \tag{b}$$

sú nezáporné, je pre $r = \rho_1$ prvý člen na pravej strane v (a) nulový, druhý nezáporný, preto

$$\Delta_{n+1}(\rho_1) \leqq 0. \tag{b'}$$

Avšak pre r dostatočne veľké je $\Delta_{n+1}(r) > 0$. Z toho vychádza, že existuje nezáporný koreň rovnice $\Delta_{n+1}(r) = 0$ a je väčší, najviac rovný ρ_1. Tým je prvá časť vety dokázaná.

Označme najväčší nezáporný koreň rovnice $\Delta_{n+1}(r) = 0$ znakom ρ. Je $\rho \geqq \rho_1$. Pre tento dostávame

$$\Delta_n(\rho) \geqq 0, \quad A_{ji}(\rho) \geqq 0. \tag{c}$$

Pre $r > \rho$ sú $A_{ji}(r)$ kladné alebo nulové. Ktoré sú nulové, sú identicky. Ich anulácia je spôsobená tým, že niektoré prvky M_{ik} sú nulové. Avšak nie všetky sú nulové, pretože potom by $i\,\Delta_n(r) = 0$, čo je spor s predpokladom, že totiž ρ_1 je najväčším nezáporným koreňom rovnice $\Delta_n(r) = 0$. Napr. minory $A_{kk}(r)$ nie sú nulové, pretože podľa predpokladu pre $r \geqq \rho$ sú $A_{kk}(r) \geqq 0$, ale pre dostatočne veľké r sú kladné. Aby sme dokázali aj

druhú časť vety, berme do úvahy najprv minory determinantu $\Delta_{n+1}(r)$, ktoré patria k prvkom posledného stĺpca. Tieto sú:

$$\frac{\partial \Delta_{n+1}(r)}{\partial(-M_{j,n+1})} = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} M_{n+1,i}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial \Delta_{n+1}(r)}{\partial(r - M_{n+1,n+1})} = \Delta_n(r)$$

a sú pre $r \geqq \rho$ zrejme nezáporné, ako to vyplýva z (b) a (c). Zároveň je zrejmé, že nie všetky sú nulové. Tak napr. pre $r > \rho$ je $\Delta_n(r) > 0$. Ďalej podľa predpokladu je v poslednom riadku aspoň jeden prvok nenulový. Nech je to $M_{n+1,k}$. Minor $A_{kk}(r)$ je pre $r > \rho$ kladný, ako bolo už prv ukázané. Preto minor determinantu $\Delta_{n+1}(r)$ patriaci ku k-tému prvku posledného stĺpca je

$$\frac{\partial \Delta_{n+1}(r)}{\partial(-M_{k,n+1})} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki} M_{n+1,i} =$$
$$= \dots + A_{kk} M_{n+1,k} + \dots > 0,$$

lebo súčin $A_{kk} M_{n+1,k}$ je kladný.

Vezmime teraz minor patriaci k ľubovoľnému prvku determinantu $\Delta_{n+1}(r)$. Napr. k prvku M_{ik}, t. j. k prvku k-tého stĺpca. Presuňme k-tý stĺpec za posledný a potom tiež k-tý riadok za posledný. Vznikne determinant $\Delta'_{n+1}(r)$, ktorý má práve také minory (okrem poradia indexov) a práve také vlastnosti ako determinant $\Delta_{n+1}(r)$, sú teda jeho minory patriace k prvkom posledného stĺpca pre $r \geqq \rho$ nezáporné a nie všetky nulové. Tým je dokázaná aj druhá časť vety.

Poukázali sme, že $\rho \geqq M_{ii}$. Aby teda bolo ρ kladné, stačí, keď niektorý z prvkov M_{ii} je nenulový. Ďalej, aby $\rho > 0$, stačí na základe (a), aby aspoň jeden zo súčinov

$$A_{ji} M_{i,n+1} M_{n+1,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

boLod nuly rôzny. Potom je $\rho > \rho_1$ a $\Delta_n(\rho) > 0$ a tiež súčet hlavných minorov determinantu $\Delta_{n+1}(r)$ je pre $r = \rho$ kladný, čo znamená, že derivácia charakteristického polynomu je nenulová, čiže ρ je j e d n o d u c h ý m koreňom.

Po tomto môžeme pristúpiť k eliminácii $(n - 1)$ veličín u_i zo systému nerovností (32), kde teraz prvky M_{ik} sú nezáporné a v každom riadku je aspoň jedno z $M_{ik} \neq 0$, $i \neq k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ponechajme u_k a ostatné eliminujme. Násobme po poradí riadky uvedeného systému nerovností minormi $(n - 1)$-radu $B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{nk}$, patriacimi k prvkom k-tého stĺpca determinantu $\| rJ - M \|$, pre $r \geqq \rho$, kde ρ je najväčší nezáporný koreň rovnice $\| rJ - M \| = 0$. Tieto sú nezáporné, nie všetky nulové. Preto znak nerovnosti sa pri násobení zachováva. Ak po vynásobení nerovnosti spočítame, koeficienty u všetkých u_i podľa známej vety o determinantoch vypadnú a ostane len

$$\sum_{i=1}^{n} (r\,\delta_{ik} - M_{ik})\, B_{ik} u_k \leq 0, \tag{d}$$

kde $\delta_{ik} = 0$ pre $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ pre $i = k$, alebo, ak koeficient pri u_k, ktorým je charakteristický polynom, označíme $f(r)$, je

$$f(r) \cdot u_k \leq 0.$$

Pre $r > \rho$ je $f(r) > 0$, preto pre $r > \rho$ a nezáporné u_k splní sa táto nerovnosť len pre $u_k = 0$. Ak úvahu prevedieme pre $k = 1, 2, \ldots, n$, dostávame, že pre $r > \rho$ pripúšťa systém nerovností (32) jediné riešenie, a to $u_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. To však znamená, že vtedy systém dif. rovníc (2) má jediné riešenie splňujúce podmienky § 3, a to riešenie identicky nulové. P l a t í t e d a v e t a 4 a j p r e p r í p a d n e z á p o r n ý c h M_{ik} takých, že v každom riadku matice M je aspoň jeden prvok M_{ik} nenulový, $i \neq k$.

F. Teraz ukážeme, že veta 4 platí za predpokladu $M_{ik} \geq 0$ bez ďalšieho obmedzujúceho predpokladu. V odseku E uvedený obmedzujúci predpoklad vylúčil tieto prípady:

a) v niektorom riadku matice M sú všetky prvky nulové,

b) v niektorom riadku matice M, napr. v k-tom, sú všetky prvky, s výnimkou M_{kk} nulové,

c) všetky prvky matice M sú nulové,

d) všetky prvky matice M sú nulové, s výnimkou všetkých prvkov hlavnej diagonály.

Ukážeme, že prípadom a) a b) možno vždy vyhnúť a v prípadoch c) a d) platí veta 4:

a) Ak nastane prípad a), značí to, že príslušná rovnica je tvaru $y_k' = 0$, čiže $y_k =$ konšt. Pretože podľa § 3 má byť $y_k(x_k) = 0$, je $y_k \equiv 0$. Túto rovnicu môžeme však z nášho uvažovaného systému vypustiť a uvažovať zbývajúcich $n - 1$ rovníc, v ktorých členy s y_k vynecháme. Tento nový systém už prípad a) nebude obsahovať. Ak by v našom pôvodnom systéme bolo viacej rovníc tvaru $y_k' = 0$, vynecháme všetky a budeme sa zaoberať systémom zbývajúcich rovníc, v ktorých vypadnú príslušné členy obsahujúce y_k.

b) Ak nastane prípad b), potom príslušná rovnica (resp. rovnice, keby ich bolo viacej) je tvaru $y_k' = a_{kk}(x) y_k$. Jej riešenie je $y_k =$ konšt. exp. $\int a_{kk}(x)\,dx$. Pretože podľa § 3 má byť $y_k(x_k) = 0$, musí byť konštanta rovná nule, čiže je $y_k \equiv 0$. Takúto rovnicu (rovnice) v našom systéme opäť vynecháme a budeme uvažovať systém o zbývajúcich rovniciach, v ktorom členy obsahujúce y_k vynecháme. Tento nový systém už ťažkosť b) nebude mať.

c) V tomto prípade ide o systém tvaru $y_i' = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Matica M tohto systému je nilpotentná. Jej najväčší nezáporný charakteristický

koreň je $\rho = 0$. (Vieme, že všetky korene sú nulové.) Preto pre každé $r > 0$ je charakteristický polynom $f(r) = r^n > 0$ a minory determinantu $\| rJ - M \|$, patriace k prvkom ľubovolného riadku alebo stĺpca, sú nezáporné, nie všetky nulové (nenulové sú hlavné minory). Preto eliminácia u_i zo systému (32) je aj v tomto prípade možná a z týchže dôvodov ako prv dostávame, že pre $r > 0$, t. j. pre h *ľubovoľne veľké*, sú všetky $u_i = 0$, čiže riešenie splňujúce podmienky § 3 je identicky nulové a je jediné. (To sa shoduje s našimi vedomosťami o tomto systéme.) Tým sme ukázali, že veta 4 platí aj pre tento prípad.

d) V tomto prípade uvažovaný systém je tvaru $y_i' = a_{ii}(x)\, y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Charakteristická rovnica matice M, ktorá má len prvky hlavnej diagonály nenulové je $f(r) = \prod_{i=1}^{n} (r - M_{ii}) = 0$. Jej najväčší nezáporný koreň je rovný najväčšiemu z M_{ii}. Pre $r > \max\{M_{ii}\}$ je $f(r) > 0$ a minory $(n - 1)$ rádu determinantu $\| rJ - M \|$ sú nezáporné, nie všetky nulové (nenulové sú opäť hlavné minory). Preto eliminácia u_i z (32) je opäť možná a dáva výsledok, že pre $r > \max\{M_{ii}\}$, t. j. pre $h < \dfrac{1}{\max\{M_{ii}\}}$ sú všetky $u_i = 0$, čiže riešenie tohto systému splňujúce podmienky § 3 je pre uvedené h identicky nulové a je jediné.

Teda veta 4 platí aj v tomto prípade. Tým je zároveň dokončený dôkaz tvrdenia vysloveného na začiatku tohto odseku.

P o z n á m k a. Takto najdená hranica pre číslo h v prípade d) je lepšia ako by bola podľa (23) v odseku A $\left(\text{podľa (23) je } h < \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} M_{ii}}\right)$, ale vzhľadom na skutočnosť je pomerne slabá. My totiž vieme, že uvažovaný systém má riešenie splňujúce podmienky § 3 jedine identicky nulové, a to pre h ľubovoľne veľké.

Teraz ukážeme na príklade, že veta 4 dáva pre číslo h lepšiu hranicu ako (23) z odseku A:

P r í k l a d: (tenže ako v odseku A)

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -y_1.$$

Charakteristická rovnica je $f(r) = \begin{vmatrix} r, & -1 \\ -1, & r \end{vmatrix} = r^2 - 1 = 0$; jej najväčší nezáporný koreň je $\rho = 1$. Podľa vety 4 pre $h < 1$ je riešenie tohto systému splňujúce podmienky § 3 identicky nulové. V odseku A dostali sme pre h hranicu $\frac{1}{2}$.

2

§ 6

Ak M_{ik} sú kladné, dostaneme optimálnejšie ohraničenie priemeru h, keď postupujeme takto: Nech ξ_i je bod, v ktorom $|y_i'|$ dosiahne hodnoty u_i. Potom

$$u_i = |y_i'(\xi_i)| \leqq M_{i1} \cdot |\int_{x_1}^{\xi_i} y_1' dx| + M_{i2} \cdot |\int_{x_2}^{\xi_i} y_2' dx| + \ldots + M_{in} \cdot |\int_{x_n}^{\xi_i} y_n' dx|$$

$$\leqq M_{i1} |\int_{x_1}^{\xi_i} [a_{11} \int_{x_1}^{x} y_1' dz + a_{22} \int_{x_2}^{x} y_2' dz + \ldots + a_{1n} \int_{x_n}^{x} y_n' dz \,|] dx| +$$

$$+ M_{i2} |\int_{x_2}^{\xi_i} [a_{21} \int_{x_1}^{x} y_1' dz + a_{22} \int_{x_2}^{x} y_2' dz + \ldots + a_{2n} \int_{x_n}^{x_i} y_n' dz] dx| +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ M_{in} |\int_{x_n}^{\xi_i} [a_{n1} \int_{x_1}^{x} y_1' dz + a_{n2} \int_{x_2}^{x} y_2' dz + \ldots + a_{nn} \int_{x_n}^{x} y_n' dz] dx|$$

$$\leqq M_{i1} [M_{11} u_1 |\int_{x_1}^{\xi_i} (x - x_1) dx| + M_{12} u_2 |\int_{x_1}^{\xi_i} (x - x_2) dx| + \ldots +$$

$$+ M_{1n} u_n |\int_{x_1}^{\xi_i} (x - x_n)\, dx|]$$

$$+ M_{i2} [M_{21} u_1 |\int_{x_2}^{\xi_i} (x - x_1) dx| + M_{22} u_2 |\int_{x_2}^{\xi_i} (x - x_2) dx| + \ldots +$$

$$+ M_{2n} u_n |\int_{x_2}^{\xi_i} (x - x_n) dx|]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ M_{in} [M_{n1} u_1 |\int_{x_n}^{\xi_i} (x - x_1) dx| + M_{n2} u_2 |\int_{x_n}^{\xi_i} (x - x_2) dx| + \ldots +$$

$$+ M_{nn} u_n |\int_{x_n}^{\xi_i} (x - x_n) dx] \div$$

Absolútne hodnoty tu vystupujúcich integrálov sú menšie ako Kh^2, kde v prípade reálnej premennej je $K = \frac{1}{2}$, v prípade komplexnej premennej je $K = \frac{4 + 3 \log 3}{8}$ (pozri § 4), preto po úprave bude

$$u_i \leqq (M_{i1} M_{11} + M_{i2} M_{21} + \ldots + M_{in} M_{n1}) \cdot u_1 K h^2$$
$$+ (M_{i1} M_{12} + M_{i2} M_{22} + \ldots + M_{in} M_{n2}) \cdot u_2 K h_2$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{37}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (M_{i1} M_{1n} + M_{i2} M_{2n} + \ldots + M_{in} M_{nn}) \cdot u_n K h^2.$$

Označme $\lambda = \frac{1}{Kh^2}$, $(h \neq 0)$. Máme v maticovom tvare

$$(\lambda J - M^2) \cdot (u) \leqq (0). \tag{38}$$

Označme najväčší kladný koreň charakteristickej rovnice $\| \lambda J - M^2 \| = 0$ znakom λ_2. Potom relácia (38) pripúšťa pre nezáporné u_i a pre $\lambda_2 < \lambda$ alebo $h^2 < \frac{1}{K\lambda_2} = h_2^2$ jediné riešenie, a to $u_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. To však značí, že systém (2) má jediné riešenie splňujúce podmienky § 3, a to identicky nulové, ak priemer množiny nulových bodov je menší ako h_2. Ak sú M_{ik} kladné, vtedy medzi koreňmi ρ a λ_2 platí známy vzťah medzi koreňmi charakteristickej rovnice matice M a matice M^2, a to

$$\rho^2 = \lambda_2,$$

odkiaľ je

$$\frac{1}{K h_2^2} = \frac{1}{h_1^2},$$

kde znakom h_1 sme označili $\frac{1}{\varrho}$ ako prvé ohraničenie priemeru h a znakom h_2 zasa $\frac{1}{\sqrt{K\lambda_2}}$ ako druhé ohraničenie. Z predchádzajúcej rovnosti je zrejmé, keďže $K < 1$, že

$$h_2 > h_1. \tag{39}$$

P o z n á m k a. Zistili sme, že systém (2) má jediné riešenie, identicky nulové na množine E, ktorá obsahuje v sebe body anulácie funkcií $y_i(x)$, ak priemer tejto množiny je menší ako prevrátená hodnota najväčšieho nezáporného koreňa charakteristickej rovnice matice M. Nahraďme hodnoty M_{ik} hodnotami $M'_{ik} = \max | a_{ik} |$ na celom fundamentálnom obore. Potom riešenie systému (2) bude identicky nulové na konvexnej množine priemeru h', ak tento bude menší ako prevrátená hodnota najväčšieho nezáporného koreňa charakteristickej rovnice matice M', ktorej prvky sú M'_{ik}, ak tá množina bude v sebe obsahovať body anulácie riešenia. Toto riešenie bude však potom identicky nulové na celom fundamentálnom obore. Ak totiž pokryjeme fundamentálny obor takýmito množinami, budú riešenia identicky nulové najprv na prvej množine a potom na všetkých.

§ 7

V tomto §-e zovšeobecníme známu vetu o alternatíve na systém diferenciálnych rovníc.

Veta 5. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je n bodov obsažených v konvexnej uzavre-

2*

nej množine E. Nech priemer E je menší ako reciproká hodnota najväčšieho nezáporného koreňa charakteristickej rovnice matice M. Nech $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sú ľubovoľné čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly. Potom systém (2) má jediné riešenie splňujúce podmienku $y_1(x_1) = \gamma_1, \ldots, y_n(x_n) = \gamma_n$.

D ô k a z. Vezmime fundamentálny systém riešení systému (2)

$$y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Potom naše riešenie bude

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{41}$$

kde konštanty $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sa určia z podmienky

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}(x_k) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{42}$$

Pretože podľa § 5 pripúšťa systém

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{ik}(x_k) = 0$$

jediné riešenie, a to nulové, je jeho determinant $\| y_{ik} \|$ od nuly rôzny a preto nehomogenný systém (42) dáva pre C_i jediné, nenulové riešenie.

Veta 6. Nech body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a množina E splňujú predpoklady vety 5. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sú ľubovoľné čísla. Potom nehomogenný systém (1) má jediné riešenie splňujúce podmienky $y_1(x_1) = \alpha_1, \ldots, y_n(x_n) = \alpha_n$.

D ô k a z. Vezmime fundamentálny systém riešení systému (2), ktorý je asociovaný k systému (1),

$$y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

a partikulárne riešenie systému (1) nadobúdajúce v bodoch x_i, $i=1,2,\ldots,n$, hodnôt β_i. Označme ho

$$y_{o1}, y_{o2}, \ldots, y_{on}.$$

Obecné riešenie systému (1) je potom

$$y_k = y_{ok}(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i y_{ik}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{43}$$

Nami hľadané riešenie dostaneme, ak za B_i dáme hodnoty splňujúce systém

$$\sum_{i=1}^{n} B_i y_{ik}(x_k) = \alpha_k - \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Z tohto systému dajú sa hodnoty B_i určiť jednoznačne, pretože, ako sa už vyššie povedalo, je jeho determinant $\| y_{ik} \|$ od nuly rôzny.

§ 8

Naše úvahy, ktoré sme previedli pre systém (1) resp. (2), môžeme preniesť aj na obecnejšie systémy prvého rádu.

Nech je daný systém

$$y_k' = f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{44}$$

kde funkcie f_i nech majú v uzatvorenom obore priestoru P, ktorý má rozmery $n + 1$, spojité parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Tieto parciálne derivácie sú v tom obore ohraničené. Označme ich maximálnu hodnotu M_{ik}. Funkcia $| y_i'(x) |$ nech nadobúda svojej maximálnej hodnoty u_i v bode ξ_i. Potom

$$u_i = | y_i'(\xi_i) | = \left| \int_x^{\xi_i} \frac{d f_i}{d x} dx \right| \leqq \left| \int_x^{\xi_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} y + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} y_n' \right) dx \right|,$$

odkiaľ je potom

$$u_i \leqq M_{i1} u_1 h + M_{i2} u_2 h + \ldots + M_{in} u_n h, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zo systému týchto nerovností určí sa potom priemer h množiny E tak ako v prípade systému (32) a dostaneme, že jediné riešenie identicky nulové splňuje podmienky § 3, ak h menšie ako prevrátená hodnota najväčšieho nezáporného charakteristického koreňa matice M, ktorej prvky sú M_{ik}.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе я исследовал систему линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k + a_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

или

$$y_i' = \sum_{n=1}^{n} a_{ik}(x) y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

с условиями

$$y_1(x_1) = 0, \; y_2(x_2) = 0, \; \ldots \; y_n(x_n) = 0, \tag{a}$$
$$y_1(x_1) = \gamma_1, \; y_2(x_2) = \gamma_2, \; \ldots \; y_n(x_n) = \gamma_n, \tag{б}$$

где хотя одно $\gamma_1 \neq 0$.

При етом я предполагаю, что коэфициенты $a_{ik}(x)$, $a_i(x)$ являются 1) в случае вещественной переменной x непрерывными функциями на замкнутом конечном отрезке, 2) в случае комплексской переменной аналитическими функциями на плоской ограниченной и замкнутой области.

Главным резульматом этой работы является теорема: система дифференциальных уравнений 2) имеет только тривиальное решение удовлетворяющее условию а), если диаметр h выпуклого множества E, содержащего точки $x_1, x_2 \ldots x_n$, меньше чем $\frac{1}{\rho}$ где ρ — наи σ ольший неотрицательный корень характеристического уравнения $||rJ - M|| = O$. При этом M-матрица, элементы которой суть $M_{ik=max}[a_{ik}(x)]$ на множестве E.

Этот результат я применил к доказательству других теорем, касающихся выше данных проблем (1) и (2) с условиями а), б) при 1) и 2).

Результаты этой работы можно применить и для далее общей системы дифференциальных уравнений в виде

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции f_i суть непрерывные на замкнутой области $(n+1)$ — мерного пространства и имеют там непрерывные первые частные производные.