JÁN CHRAPAN

LAGRANGEOVO TUHÉ TELESO

Pohyb Lagrangeovho tuhého telesa je sférický. Okamžitú polohu (a okamžitý pohybový stav) telesa môžeme určiť Eulerovými uhlami, ktoré dostaneme riešením systému Eulerových diferenciálnych rovníc tuhého telesa. Toto riešenie vedie pri uhle nutácie na Jacobiho eliptické funkcie a pri uhloch vlastnej rotácie a precesie na dva eliptické integrály tretieho typu. Argumenty a moduly týchto integrálov sú rovnaké, ale parametre nie. Vyjadríme preto tieto integrály Π-funkciou, definovanou Jacobiho transcendentami druhého a tretieho druhu, potom ich transformujeme (zavedením dvoch nových Π-funkcií) na výrazy, v ktorých okrem argumentov a modulov sú už aj parametre rovnaké. Nakoľko počiatočné podmienky obecného pohybu Lagrangeovho tuhého telesa vedú na eliptické funkcie s imaginárnym modulom, prevedieme transformácie dzétafunkcií a omegafunkcií na funkcie s reálnym modulom. Parameter zavedených Π-funkcií je však tiež imaginárny, preto vykonáme transformácie dzétafunkcií na funkcie s reálnym argumentom. Pri uhle precesie nahradíme dzétafunkcie eliptickými integrálmi prvého a druhého typu a použijeme Legendreovu reláciu. Pretože argumenty thétafunkcií v definičných výrazoch omegafunkcií sú komplexné konjugované čísla, uvažované omegafunkcie sú imaginárne hodnoty, v ktorých vystupuje cyklometrická funkcia arctg s reálnym argumentom. Pomocou nekonečných thétasúčinov vyjadríme omegafunkcie veľmi rýchlo konvergujúcimi radmi. Uvedenými operáciami dostaneme vzťahy pre Eulerove uhly v takej forme, v ktorej sa môžu pomerne ľahko aj numericky vyčísliť.

V matematickom úvode odvodíme potrebné transformácie a vyjadrenia (rozvoje) Jacobiho transcendent druhého a tretieho druhu; zavedieme Π-funkcie a odvodíme niektoré ich vlastnosti. V ďalšej časti prevedieme riešenie systému Eulerových diferenciálnych rovníc Lagrangeovho tuhého telesa a výsledky vyjadríme Jacobiho eliptickými funkciami a transcendentami druhého a tretieho druhu v tvare zavedených Π-funkcií. Nakoniec uvedieme niektoré výsledky, ktoré vyplývajú pre nutáciu, vlastnú rotáciu a precesiu úpravou obecných vzťahov a vyriešime konkrétny prípad pohybu.

1. Jacobiho transcendenty druhého druhu (dzétafunkcie).

a) D e f i n í c i e:

Definujme funkcie

$$Z_{01}(v, \varkappa) = \frac{d}{dv} \log \vartheta_{01}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right) = \frac{d}{dv} \log \Theta_{01}(v, \varkappa) = \frac{\Theta'_{01}(v, \varkappa)}{\Theta_{01}(v, \varkappa)};$$

$$Z_{00}(v, \varkappa) = \frac{d}{dv} \log \vartheta_{00}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right) = \frac{d}{dv} \log \Theta_{00}(v, \varkappa) = \frac{\Theta'_{00}(v, \varkappa)}{\Theta_{00}(v, \varkappa)};$$

$$Z_{11}(v, \varkappa) = \frac{d}{dv} \log \vartheta_{11}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right) = \frac{d}{dv} \log \Theta_{11}(v, \varkappa) = \frac{\Theta'_{11}(v, \varkappa)}{\Theta_{11}(v, \varkappa)};$$

$$Z_{10}(v, \varkappa) = \frac{d}{dv} \log \vartheta_{10}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right) = \frac{d}{dv} \log \Theta_{10}(v, \varkappa) = \frac{\Theta'_{10}(v, \varkappa)}{\Theta_{10}(v, \varkappa)},$$

v ktorých symboly

$$\vartheta_{01}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right); \quad \vartheta_{00}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right); \quad \vartheta_{11}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right); \quad \vartheta_{10}\left(\frac{v}{2K}, i\frac{K'}{K}\right)$$

znamenajú Jacobiho thétafunkcie

$$\vartheta_{01}(x, \tau) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \cdot e^{i\pi\tau h^2} \cdot e^{i\pi x \cdot 2h};$$

$$\vartheta_{00}(x, \tau) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau h^2} \cdot e^{i\pi x \cdot 2h};$$

$$\vartheta_{11}(x, \tau) = -i \cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \cdot e^{i\pi\tau \cdot (h+\frac{1}{2})^2} \cdot e^{i\pi x \cdot (2h+1)};$$

$$\vartheta_{10}(x, \tau) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau \cdot (h+\frac{1}{2})^2} \cdot e^{i\pi x \cdot (2h+1)},$$

argumentu $x = \frac{v}{2K}$, modulu $\tau = i\frac{K'}{K}$, kde K a K' sú konštanty periódy Jacobiho eliptických funkcií (úplné eliptické integrály prvého typu).

Funkcie $Z_{01}(v, \varkappa)$, $Z_{00}(v, \varkappa)$, $Z_{11}(v, \varkappa)$ a $Z_{10}(v, \varkappa)$ sú Jacobiho dzétafunkcie (transcendenty druhého druhu). Argument v a modul se týchto funkcií môžu byť ľubovoľné čísla.

b) T r a n s f o r m á c i a d z é t a f u n k c i í n a t v a r s r e á l n y m m o d u l o m:

Ak je modul $\varkappa$ imaginárne číslo $\varkappa = i\bar{k}$, môžeme dzétafunkcie transformovať na tvar s reálnym modulom, keď použijeme thétafunkcie s modulom zväčšeným o 1. Tak dostaneme

$$Z_{01}(v, \varkappa) = Z_{01}(v, i\bar{k}) = \frac{\Theta'_{01}(v, i\bar{k})}{\Theta_{01}(v, i\bar{k})} = \frac{\Theta'_{00}(v^*, k)}{\Theta_{00}(v^*, k)} = Z_{00}(v^*, k). \qquad (1,1)$$

V tomto výraze je nový argument $v^* = 2K^* \cdot x$, reálny modul $k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1+\bar{k}^2}}$, a konštanta periódy K^*, ktorá patrí k reálnemu modulu k.

Analogicky máme

$$Z_{11}(v, \varkappa) = Z_{11}(v, i\bar{k}) = \frac{\Theta'_{11}(v, i\bar{k})}{\Theta_{11}(v, i\bar{k})} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \Theta'_{11}(v^*, k)}{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \Theta_{11}(v^*, k)} = Z_{11}(v^*, k). \qquad (1,2)$$

c) T r a n s f o r m á c i a d z é t a f u n k c i í n a t v a r s r e á l n y m a r g u m e n t o m:

Ak je argument v^* číslo imaginárne $v^* = i\alpha$, môžeme previesť transformáciu na reálny argument podľa vzťahu

$$Z_{01}(i\alpha, k) = i \cdot \left[\frac{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{cn(\alpha, k')} - \frac{\pi\alpha}{2KK'} - Z_{01}(\alpha, k')\right].$$

Pre ďalšie dzétafunkcie dostaneme

$$Z_{00}(i\alpha, k) = Z_{01}(i\alpha + K, k) = Z_{01}[i(\alpha - iK), k] =$$

$$= i \cdot \frac{sn(\alpha - iK, k') \cdot dn(\alpha - iK, k')}{cn(\alpha - iK, k')} - \frac{i\pi \cdot (\alpha - iK)}{2KK'} + i \cdot Z_{01}(-\alpha + iK, k') =$$

$$= i \cdot \frac{cn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')} - i \cdot \frac{\alpha\pi}{2KK'} - i \cdot Z_{11}(\alpha, k') =$$

$$= i \cdot \frac{cn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')} - i \cdot \frac{\pi\alpha}{2KK'} - i \cdot \frac{cn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k')} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k') =$$

$$= ik'^2 \cdot \frac{sn(\alpha, k') \cdot cn(\alpha, k')}{dn(\alpha, k')} - \frac{i\alpha\pi}{2KK'} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k');$$

$$Z_{11}(i\alpha, k) = Z_{01}(i\alpha, k) + \frac{cn(i\alpha, k) \cdot dn(i\alpha, k)}{sn(i\alpha, k)} =$$

$$= i \cdot \frac{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{cn(\alpha, k')} - i \cdot \frac{\pi\alpha}{2KK'} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k') - i \cdot \frac{dn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k') \cdot cn(\alpha, k')} =$$

$$= -i \cdot \frac{cn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k')} - i \cdot \frac{\pi\alpha}{2KK'} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k');$$

$$Z_{10}(i\alpha, k) = Z_{01}(i\alpha, k) - \frac{sn(i\alpha, k) \cdot dn(i\alpha, k)}{cn(i\alpha, k)} =$$

$$= i \cdot \frac{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{cn(\alpha, k')} - i \cdot \frac{\pi\alpha}{2KK'} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k') - i \cdot \frac{sn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{cn(\alpha, k')} =$$

$$= -i \cdot \frac{\pi\alpha}{2KK'} - i \cdot Z_{01}(\alpha, k').$$

d) Súčty a rozdiely dzétafunkcií:

Použitím odvodených výsledkov vychádzajú vzťahy

$$Z_{00}(i\alpha,k)+Z_{11}(i\alpha,k)=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}-$$
$$-i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}-i\cdot\frac{\pi\alpha}{KK'}-2i\cdot Z_{01}(\alpha,k');$$
$$Z_{00}(i\alpha,k)-Z_{11}(i\alpha,k)=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}+i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}=$$
$$=i\cdot\frac{cn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')};\qquad(1{,}3)$$
$$Z_{00}(i\alpha,k)-Z_{01}(i\alpha,k)=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}-i\cdot\frac{\pi\alpha}{2KK'}-$$
$$-i\cdot Z_{01}(\alpha,k')-i\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{cn(\alpha,k')}+i\cdot\frac{\pi\alpha}{2KK'}+i\cdot Z_{01}(\alpha,k')=$$
$$=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}-i\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{cn(\alpha,k')}=$$
$$=-ik^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')}{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')};\qquad(1{,}4)$$
$$Z_{11}(i\alpha,k)-Z_{10}(i\alpha,k)=-i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}-i\cdot\frac{\pi\alpha}{2KK'}-$$
$$-i\cdot Z_{01}(\alpha,k')+i\cdot\frac{\pi\alpha}{2KK'}+i\cdot Z_{01}(\alpha,k')=-i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}.\qquad(1{,}5)$$

e) Zavedenie eliptických integrálov prvého a druhého typu:

Ak v prvom vzťahu pod d) nahradíme dzétafunkciu $Z_{01}(\alpha,k')$ eliptickými integrálmi

$$Z_{01}(\alpha,k')=E(\alpha,k')-\frac{E'}{K'}\cdot\alpha$$

a potom použijeme Legendreovu reláciu

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2},$$

dostaneme

$$Z_{00}(i\alpha,k)+Z_{11}(i\alpha,k)=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}-i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}-$$
$$-2i\cdot\left[E(\alpha,k')-\alpha\cdot\left(1-\frac{E}{K}\right)\right].$$

Zaveďme označenie

$$sn(\alpha,k')=\zeta=\sin\varphi,$$

potom bude

$$\alpha=\int_0^\zeta\frac{d\zeta}{\sqrt{(-\zeta^2)\cdot(1-k'^2\cdot\zeta^2)}}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\cdot\sin^2\varphi}}=F(\varphi,k'),\qquad(1{,}6)$$

kde pre argument φ platí

$$\varphi=\arcsin[sn(\alpha,k')].\qquad(1{,}7)$$

Na základe toho je uvažovaný súčet

$$Z_{00}(i\alpha,k)+Z_{11}(i\alpha,k)=ik'^2\cdot\frac{sn(\alpha,k')\cdot cn(\alpha,k')}{dn(\alpha,k')}-$$
$$-i\cdot\frac{cn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{sn(\alpha,k')}-2i\cdot\left[E(\varphi,k')-F(\varphi,k')\cdot\left(1-\frac{E}{K}\right)\right].\qquad(1{,}8)$$

2. Jacobiho transcendenty tretieho druhu (omegafunkcie).

a) Definície:

Uvažujme funkcie

$$\Omega_{01}(\eta,v,\varkappa)=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\Theta_{01}(\eta-v,\varkappa)}{\Theta_{01}(\eta+v,\varkappa)};$$
$$\Omega_{00}(\eta,v,\varkappa)=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\Theta_{00}(\eta-v,\varkappa)}{\Theta_{00}(\eta+v,\varkappa)};$$
$$\Omega_{11}(\eta,v,\varkappa)=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\Theta_{11}(\eta-v,\varkappa)}{\Theta_{11}(\eta+v,\varkappa)},$$

patriace k Jacobiho transcendentám tretieho druhu (k omegafunkciám).

Argument η týchto funkcií, ich parameter v a modul $\varkappa$ môžu byť ľubovoľné čísla.

b) Zväčšenie parametra funkcie Ω_{01} o iK':

Zväčšením parametra v omegafunkcie $\Omega_{01}(\eta,v,\varkappa)$ o iK' dostaneme

$$\Omega_{01}(\eta,v+iK',\varkappa)=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\vartheta_{01}\left(\frac{\eta-v-iK'}{2K},\tau\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{\eta+v+iK'}{2K},\tau\right)}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\vartheta_{01}\left(\frac{\eta-v}{2K}-\frac{\tau}{2},\tau\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{\eta+v}{2K}+\frac{\tau}{2},\tau\right)}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{-i\cdot\vartheta_{11}\left(\frac{\eta-v}{2K},\tau\right)\cdot e^{\frac{i\pi}{2}\cdot\left(\frac{\eta-v}{K}-\frac{\tau}{2}\right)}}{i\cdot\vartheta_{11}\left(\frac{\eta+v}{2K},\tau\right)\cdot e^{\frac{i\pi}{2}\cdot\left(\frac{-\eta-v}{K}-\frac{\tau}{2}\right)}}=\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{\eta-v}{2K},\tau\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\eta+v}{2K},\tau\right)}+$$
$$+i\cdot\frac{\pi\eta}{2K}\pm i\frac{\pi}{2}=\Omega_{11}(\eta,v,\varkappa)+i\cdot\frac{\pi\eta}{2K}\pm i\frac{\pi}{2}.\qquad(2{,}1)$$

c) Transformácia omegafunkcií na tvar s reálnym modulom:

Ak je modul $\varkappa$ číslo imaginárne $\varkappa = i\bar{k}$, môžeme previesť transformáciu na modul reálny, keď použijeme thétafunkcie s modulom zväčšeným o 1. Tak dostaneme pre prvú a tretiu omegafunkciu

$$\Omega_{01}(\eta, v, i\bar{k}) = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta_{01}(\eta - v, i\bar{k})}{\Theta_{01}(\eta + v, i\bar{k})} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\Theta_{00}(w - v^*, k)}{\Theta_{00}(w + v^*, k)} = \tag{2,2}$$

$$= \Omega_{00}(w, v^*, k) ;$$

$$\Omega_{11}(\eta, v, i\bar{k}) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\Theta_{11}(\eta - v, i\bar{k})}{\Theta_{11}(\eta + v, i\bar{k})} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \Theta_{11}(w - v^*, k)}{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \Theta_{11}(w + v^*, k)} =$$

$$= \Omega_{11}(w, v^*, k) . \tag{2,3}$$

V týchto výsledkoch je nový argument $w = \eta \cdot \sqrt{1 + \bar{k}^2}$ a nový parameter $v^* = 2K^* \cdot x$, kde je $x = \frac{v}{2K}$; reálny modul je $k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1 + \bar{k}^2}}$, a konštanta periody K^*, patriaca k reálnemu modulu k.

d) Vyjadrenie omegafunkcií konvergentnými radmi:

Keď je parameter v^* imaginárne číslo $v^* = i\alpha$, uvažované omegafunkcie majú pre reálny argument w charakter cyklometrickej funkcie arctg.

Podľa definície je

$$\Omega_{00}(w, i\alpha, k) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\Theta_{00}(w - i\alpha)}{\Theta_{00}(w + i\alpha)} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\vartheta_{00}\left(\frac{w - i\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_{00}\left(\frac{w + i\alpha}{2K}\right)} ,$$

keď modul τ thétafunkcie $\vartheta_{00}\left(\frac{w \mp i\alpha}{2K}, \tau\right)$ nevyznačíme a keď konštanta periódy K patrí k reálnemu modulu k.

Vyjadrením príslušných thétafunkcií v definičných vzťahoch pre posledné dve omegafunkcie nekonečnými súčinmi dostaneme

$$\vartheta_{00}\left(\frac{w - i\alpha}{2K}\right) = \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 + q^{4h-2} + 2 \cdot q^{2h-1} \cdot \cos \frac{\pi \cdot (w - i\alpha)}{K}\right) =$$

$$= \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\left[1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \left(\cos \frac{\pi w}{K} \cdot \cosh \frac{\tau\alpha}{K} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i \cdot \sin \frac{\pi w}{K} \cdot \sinh \frac{\pi\alpha}{K}\right)\right] = \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 + q^{4h-2} + \right.$$

$$\left. + 2q^{2h-1} \cdot \cos \frac{\pi w}{K} \cdot \cosh \frac{\pi\alpha}{K} + i \cdot 2q^{2h-1} \cdot \sin \frac{\pi w}{K} \cdot \sinh \frac{\pi\alpha}{K}\right) =$$

$$= \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\rho(h) \cdot e^{i\varphi(h)} ;$$

podobne je

$$\vartheta_{00}\left(\frac{w + i\alpha}{2K}\right) = \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\rho(h) \cdot e^{-i\varphi(h)} ,$$

kde $\rho(h)$ znamená absolútnu hodnotu jednotlivých činiteľov nekonečného súčinu, závislú od produkčného čísla h a $\varphi(h)$ sú ich amplitúdy, pre ktoré platí

$$\varphi(h) = \operatorname{arc\,tg} \frac{2q^{2h-1} \cdot \sin \frac{\pi w}{K} \cdot \sin h \frac{\pi\alpha}{K}}{1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \cos \frac{\pi w}{K} \cdot \cos h \frac{\pi\alpha}{K}} .$$

Použitím týchto výsledkov vychádza

$$\Omega_{00}(w, i\alpha, k) = i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2q^{2h-1} \cdot \sin \frac{\pi w}{K} \cdot \sin h \frac{\pi\alpha}{K}}{1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \cos \frac{\pi w}{K} \cdot \cos h \frac{\pi\alpha}{K}} .$$

Parameter q thétafunkcií v odvodenom súčte je

$$q = e^{-\pi \cdot \frac{K'}{K}} ; \tag{2,4}$$

nakoľko modul k je číslo reálne, parameter q je tiež reálny.

Analogicky máme

$$\Omega_{11}(w, i\alpha, k) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{w - i\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{w + i\alpha}{2K}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \frac{\pi(w - i\alpha)}{2K} \cdot \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\rho(h) \cdot e^{i\varphi(h)}}{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \frac{\pi(w + i\alpha)}{2K} \cdot \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h}) \cdot \prod_{h=1}^{\infty}\rho(h) \cdot e^{-i\varphi(h)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log \left[\frac{\sin \frac{\pi(w - i\alpha)}{2K}}{\sin \frac{\pi(w + i\alpha)}{2K}} \cdot \prod_{h=1}^{\infty} e^{2i\varphi(h)}\right] = \frac{1}{2} \log \frac{\sin \frac{\pi(w - i\alpha)}{2K}}{\sin \frac{\pi(w + i\alpha)}{2K}} +$$

$$+ i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \varphi(h) .$$

Pre prvý člen po prevedení goniometrickej funkcie súčtov na súčet funkcií

$$\sin \frac{\pi(w \mp i\alpha)}{2K} = \sin \frac{\pi w}{2K} \cdot \cos h \frac{\pi\alpha}{2K} \mp i \cdot \cos \frac{\pi w}{2K} \cdot \sin h \frac{\pi\alpha}{2K} = R \cdot e^{\mp i\Phi} ,$$

a po logaritmovaní bude

$$\frac{1}{2} \cdot \log \frac{\sin \frac{\pi(w - i\alpha)}{2K}}{\sin \frac{\pi(w + i\alpha)}{2K}} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{R \cdot e^{-i\Phi}}{R \cdot e^{i\Phi}} = -i\Phi =$$

$$= -i \cdot \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tg} h \frac{\pi\alpha}{2K}\right] .$$

Pre určenie druhého člena máme

$$1-2q^{2h}\cdot\cos\frac{\pi(w-i\alpha)}{K}+q^{4h}=$$

$$=1+q^{4h}-2q^{2h}\cdot\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\alpha}{K}-i\cdot 2q^{2h}\cdot\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\alpha}{K},$$

z čoho je

$$\varphi(h)=\operatorname{arc\,tg}\frac{-2q^{2h}\cdot\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\alpha}{K}}{1+q^{4h}-2q^{2h}\cdot\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\alpha}{K}}.$$

Spojením týchto výsledkov vychádza

$$\Omega_{11}(w,i\alpha,k)=-i\cdot\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K}\cdot\operatorname{tgh}\frac{\pi\alpha}{2K}\right]+$$

$$+i\cdot\sum_{h=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{-2q^{2h}\cdot\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\alpha}{K}}{1+q^{4h}-2q^{2h}\cdot\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\alpha}{K}}.$$

e) Výrazy pre súčet a rozdiel omegafunkcií:

Utvorme výraz pre súčet a rozdiel uvažovaných dvoch omegafunkcií. Súčet je

$$\Omega_{00}(w,i\alpha,k)+\Omega_{11}(w,i\alpha,k)=-i\cdot\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K}\cdot\operatorname{tgh}\frac{\pi\alpha}{2K}\right]+$$

$$+i\cdot\sum_{h=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(-1)^{h-1}\cdot 2q^{h}\cdot\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\alpha}{K}}{(-1)^{h-1}\cdot 2q^{h}\cdot\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\alpha}{K}+1+q^{2h}}. \qquad (2,5)$$

Pre rozdiel dostaneme

$$\Omega_{00}(w,i\alpha,k)-\Omega_{11}(w,i\alpha,k)=\frac{1}{2}\log\frac{dn(w-i\alpha,k)}{dn(w+i\alpha,k)}-\frac{1}{2}\log\frac{sn(w-i\alpha,k)}{sn(w+i\alpha,k)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\frac{dn(w-i\alpha,k)}{sn(w-i\alpha,k)}}{\frac{dn(w+i\alpha,k)}{sn(w+i\alpha,k)}}=-\frac{1}{2}\cdot\log\frac{\frac{sn(w-i\alpha,k)}{dn(w-i\alpha,k)}(-k')}{\frac{sn(w+i\alpha,k)}{dn(w+i\alpha,k)}(-k')}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log\frac{cn(w-i\alpha+K,k)}{cn(w+i\alpha+K,k)}=-\frac{1}{2}\cdot\log\frac{cn(w+K-i\alpha,k)}{cn(w+K+i\alpha,k)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log\frac{cn(w+K)\cdot cn(\alpha,k')+i\cdot sn(w+K)\cdot dn(w+K)\cdot sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{cn(w+K)\cdot cn(\alpha,k')-i\cdot sn(w+K)\cdot dn(w+K)\cdot sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}=$$

$$=-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{sn(w+K,k)\cdot dn(w+K,k)\cdot sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')}{cn(w+K,k)\cdot cn(\alpha,k')}=$$

$$=i\cdot\operatorname{arctg}\frac{sn(\alpha,k')\cdot dn(\alpha,k')\cdot cn(w,k)}{cn(\alpha,k')\cdot sn(w,k)\cdot dn(w,k)}. \qquad (2,6)$$

f) Derivácie omegafunkcií:

Derivovaním omegafunkcií podľa argumentu w dostávame

$$\Omega_{01}'^{(w)}(w,i\alpha,k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\log\frac{\Theta_{01}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{01}(w+i\alpha,k)}\right]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{01}(w-i\alpha,k)]'^{(w)}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{01}(w+i\alpha.k)]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{01}'^{(w)}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{01}(w-i\alpha,k)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{01}'^{(w)}(w+i\alpha,k)}{\Theta_{01}(w+i\alpha,k)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot Z_{01}(w-i\alpha,k)-\frac{1}{2}\cdot Z_{01}(w+i\alpha,k); \qquad (2,7)$$

$$\Omega_{00}'^{(w)}(w,i\alpha,k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\log\frac{\Theta_{00}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{00}(w+i\alpha,k)}\right]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{00}(w-i\alpha,k)]'^{(w)}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{00}(w+i\alpha,k)]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{00}'^{(w)}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{00}(w-i\alpha,k)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{00}'^{(w)}(w+i\alpha,k)}{\Theta_{00}(w+i\alpha,k)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot Z_{00}(w-i\alpha,k)-\frac{1}{2}\cdot Z_{00}(w+i\alpha,k); \qquad (2,8)$$

$$\Omega_{11}'^{(w)}(w,i\alpha,k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\log\frac{\Theta_{11}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{11}(w+i\alpha,k)}\right]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{11}(w-i\alpha,k)]'^{(w)}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot[\log\Theta_{11}(w+i\alpha,k)]'^{(w)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{11}'^{(w)}(w-i\alpha,k)}{\Theta_{11}(w-i\alpha,k)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_{11}'^{(w)}(w+i\alpha,k)}{\Theta_{11}(w+i\alpha,k)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot Z_{11}(w-i\alpha,k)-\frac{1}{2}\cdot Z_{11}(w+i\alpha,k). \qquad (2,9)$$

Utvorme ďalej súčet a rozdiel týchto derivácií

$$\Omega_{00}'^{(w)}(w,i\alpha,k)\pm\Omega_{11}'^{(w)}(w,i\alpha,k)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot[\{Z_{00}(w-i\alpha,k)-Z_{00}(w+i\alpha,k)\}\pm\{Z_{11}(w-i\alpha,k)-Z_{11}(w+i\alpha,k)\}].$$

Pre zvláštne hodnoty argumentu w vychádza

$$[\Omega_{00}'^{(w)}(w,i\alpha,k)\pm\Omega_{11}'^{(w)}(w,i\alpha,k)]_{w=0}=-[Z_{00}(i\alpha,k)\pm Z_{11}(i\alpha,k)]; \qquad (2,10)$$

$$[\Omega_{00}'^{(w)}(w,i\alpha,k)\pm\Omega_{11}'^{(w)}(w,i\alpha,k)]_{w=K}=-[Z_{01}(i\alpha,k)\pm Z_{10}(i\alpha,k)]. \qquad (2,11)$$

3. Π-funkcie.

a) Definície:

Podľa Jacobiho označenia

$$\Pi_{01}(\eta,v,\varkappa)=\eta\cdot Z_{01}(v,\varkappa)+\Omega_{01}(\eta,v,\varkappa)$$

zaveďme funkcie

$$\Pi_{00}(\eta,v,\varkappa)=\eta\cdot Z_{00}(v,\varkappa)+\Omega_{00}(\eta,v,\varkappa); \qquad (3,1)$$

$$\Pi_{11}(\eta,v,\varkappa)=\eta\cdot Z_{11}(v,\varkappa)+\Omega_{11}(\eta,v,\varkappa). \qquad (3,2)$$

Argument η, parameter v a modul $\varkappa$ týchto funkcií môžu byť ľubovoľné čísla.

b) T r a n s f o r m á c i a Π_{01}-f u n k c i e z v ä č š e n í m j e j p a r a m e t r a o iK':

Ak sa zväčší parameter Π_{01}-funkcie o hodnotu iK', bude na základe (2,1)

$$\Pi_{01}(\eta, v + iK', \varkappa) = \eta \cdot Z_{01}(v + iK', \varkappa) + \Omega_{01}(\eta, v + iK', \varkappa) =$$
$$= \eta \cdot Z_{11}(v, \varkappa) - i\frac{\pi\eta}{2K} + \Omega_{11}(\eta, v, \varkappa) + i \cdot \frac{\pi\eta}{2K} \pm i\frac{\pi}{2} =$$
$$= \eta \cdot Z_{11}(v, \varkappa) + \Omega_{11}(\eta, v, \varkappa) \pm i\frac{\pi}{2} = \Pi_{11}(\eta, v, \varkappa) \pm i\frac{\pi}{2}. \tag{3,3}$$

c) T r a n s f o r m á c i a Π-f u n k c i í n a t v a r s r e á l n y m m o d u l o m:

Nech je argument η číslo reálne, parameter v a modul $\varkappa = i\bar{k}$ nech sú imaginárne čísla.

Použitím výsledkov (1,1); (1,2); (2,2) a (2,3) pre transformáciu imaginárneho modulu dzétafunkcií a omegafunkcií dostaneme

$$\Pi_{01}(\eta, v, i\bar{k}) = \Pi_{00}(\eta^*, v^*, k) = \Pi_{00}(w, v^*, k); \tag{3,4}$$
$$\Pi_{11}(\eta, v, i\bar{k}) = \Pi_{11}(\eta^*, v^*, k) = \Pi_{11}(w, v^*, k). \tag{3,5}$$

Nový argument $\eta^* = w$, parameter v^* a reálny modul k sú rovnako definované, ako pri transformáciách dzétafunkcií a omegafunkcií.

d) D e r i v á c i e Π-f u n k c i í:

Derivácie Π-funkcií podľa argumentu w budú vzhľadom na výsledky (2,7); (2,8) a (2,9)

$$\Pi'^{(w)}_{01}(w, i\alpha, k) =$$
$$= Z_{01}(i\alpha, k) + \frac{1}{2} \cdot Z_{01}(w - i\alpha, k) - \frac{1}{2} \cdot Z_{01}(w + i\alpha, k);$$
$$\Pi'^{(w)}_{00}(w, i\alpha, k) =$$
$$= Z_{00}(i\alpha, k) + \frac{1}{2} \cdot Z_{00}(w - i\alpha, k) - \frac{1}{2} \cdot Z_{00}(w + i\alpha, k);$$
$$\Pi'^{(w)}_{11}(w, i\alpha, k) =$$
$$= Z_{11}(i\alpha, k) + \frac{1}{2} \cdot Z_{11}(w - i\alpha, k) - \frac{1}{2} \cdot Z_{11}(w + i\alpha, k).$$

Súčet a rozdiel týchto výrazov je

$$\Pi'^{(w)}_{00}(w, i\alpha, k) \pm \Pi'^{(w)}_{11}(w, i\alpha, k) = [Z_{00}(i\alpha, k) \pm Z_{11}(i\alpha, k)] +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot [Z_{00}(w - i\alpha, k) \pm Z_{11}(w - i\alpha, k)] - \frac{1}{2} \cdot [Z_{00}(w + i\alpha, k) \pm Z_{11}(w + i\alpha, k)].$$

Pre špeciálne hodnoty argumentu w vychádzajú z nich v súhlase s (2,10) a (2,11) výsledky

$$[\Pi'^{(w)}_{00}(w, i\alpha, k) \pm \Pi'^{(w)}_{11}(w, i\alpha, k)]_{w=0} = 0; \tag{3,6}$$
$$[\Pi'^{(w)}_{00}(w, i\alpha, k) \pm \Pi'^{(w)}_{11}(w, i\alpha, k)]_{w=K} =$$
$$= [Z_{00}(i\alpha, k) - Z_{01}(i\alpha, k)] \pm [Z_{11}(i\alpha, k) - Z_{10}(i\alpha, k)].$$

Keď použijeme vzťahy (1,4) a (1,5), bude

$$[\Pi'^{(w)}_{00}(w, i\alpha, k) \pm \Pi'^{(w)}_{11}(w, i\alpha, k)]_{w=K} =$$
$$= -i \cdot k^2 \frac{sn(\alpha, k')}{cn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')} \mp i \cdot \frac{cn(\alpha, k') \cdot dn(\alpha, k')}{sn(\alpha, k')}. \tag{3,7}$$

e) V y j a d r e n i e Π_{01}-f u n k c i e v t v a r e i n t e g r á l u:

Na základe relácie

$$Z_{01}(v, \varkappa) + \frac{1}{2} \cdot Z_{01}(\eta - v, \varkappa) - \frac{1}{2} \cdot Z_{01}(\eta + v, \varkappa) =$$
$$= \frac{\varkappa^2 \cdot sn(v, \varkappa) \cdot cn(v, \varkappa) \cdot dn(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)} =$$
$$= \Pi'^{(\eta)}_{01}(\eta, v, \varkappa)$$

integrovaním dostaneme

$$\Pi_{01}(\eta, v, \varkappa) = \int_0^\eta \frac{\varkappa^2 \cdot sn(v, \varkappa) \cdot cn(v, \varkappa) \cdot dn(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)},$$

z čoho je

$$\int_0^\eta \frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(v, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)} =$$
$$= \frac{sn(v, \varkappa)}{cn(v, \varkappa) \cdot dn(v, \varkappa)} \cdot \Pi_{01}(\eta, v, \varkappa). \tag{3,8}$$

4. Riešenie Eulerovho diferenciálneho systému.

a) D e f i n í c i e:

Lagrangeovo tuhé teleso spĺňuje podmienky:

α) jeden bod telesa, ležiaci mimo hmotného stredu telesa, je pevný;

β) elipsoid zotrvačnosti telesa so stredom v pevnom bode telesa je rotačný s pólovou osou prechádzajúcou hmotným stredom telesa;

γ) teleso sa roztočí okolo tejto pólovej osi v homogennom silovom poli.

Zaveďme v priestore pevný ortogonálny pravotočivý systém osí súradníc (x, y, z) s jednotkovými vektormi $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, a s telesom pevne spojený ortogonálny pravotočivý systém (x', y', z') s jednotkovými vektormi $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ tak, aby spoločný počiatok obidvoch sústav bol v pevnom bode telesa.

Hmotný stred telesa nech je na osi z', vo vzdialenosti s od pevného bodu telesa.

Os z pevného systému osí súradníc zvoľme tak, aby bolo $\bar{k} = -\bar{g}^\circ$, kde $\bar{g}^\circ$ je jednotkový vektor intenzity daného silového poľa. Ak je hmota telesa m a intenzita silového poľa $\bar{g}$, hybná sila $m\bar{g}$, účinkujúca na teleso, pôsobí momentom sily

$$\bar{M} = [s\bar{k}', -mg\bar{k}]$$

v smere priesečnice rovín (x, y) a (x', y'), ktorá je uzlovou priamkou telesa, danou jednotkovým vektorom

$$\bar{i}_1 = \bar{i}' \cdot \cos\varphi - \bar{j}' \cdot \sin\varphi = \bar{i} \cdot \cos\psi + \bar{j} \cdot \sin\psi,$$

kde $\varphi, \psi, (\vartheta)$ sú Eulerove uhly.

b) K i n e m a t i c k é   r o v n i c e:

Pohyb Lagrangeovho tuhého telesa je rotačný okolo okamžitej osi otáčania, prechádzajúcej pevným bodom telesa, danej vektorom okamžitej uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}$, časove premenným v telese i v priestore. Vektor $\bar{\omega}$ môžeme vyjadriť anholonomnými složkami v systéme (x', y', z') v tvare

$$\bar{\omega} = p \cdot \bar{i}' + q \cdot \bar{j}' + r \cdot \bar{k}',$$

alebo holonomnými Eulerovými složkami rýchlosti v tvare

$$\bar{\omega} = (\dot{\vartheta}\bar{i}_1 + \dot{\psi}\bar{k}) + \dot{\varphi}\bar{k}' = (\dot{\vartheta}\cos\psi\bar{i} + \dot{\vartheta}\sin\psi\bar{j} + \dot{\psi}\bar{k}) + \dot{\varphi}\bar{k}' =$$
$$= (\dot{\vartheta}\cos\varphi\bar{i}' - \dot{\vartheta}\sin\varphi\bar{j}' + \dot{\varphi}\bar{k}') + \dot{\psi}\bar{k}.$$

Časť v zátvorke je premenný vektor v systéme (x, y, z) resp. (x', y', z').

Porovnaním obidvoch vyjadrení

$$p\bar{i}' + q\bar{j}' + r\bar{k}' = \dot{\vartheta}\cos\psi\bar{i} + \dot{\vartheta}\sin\psi\bar{j} + \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}'$$

vychádzajú kinematické rovnice

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cdot \cos\varphi; \\ q &= \dot{\psi} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi - \dot{\vartheta} \cdot \sin\varphi; \\ r &= \dot{\psi} \cdot \cos\vartheta + \dot{\varphi}; \end{aligned} \qquad (4,1)$$

alebo tiež

$$\dot{\psi} = \frac{p \cdot \sin\varphi + q \cdot \cos\varphi}{\sin\vartheta};$$

$$\dot{\varphi} = r - (p \cdot \sin\varphi + q \cdot \cos\varphi) \cdot \operatorname{cotg}\vartheta;$$

$$\dot{\vartheta} = p \cdot \cos\varphi - q \cdot \sin\varphi.$$

c) E u l e r o v   d i f e r e n c i á l n y   s y s t é m:

Eulerov systém diferenciálnych rovníc pre Lagrangeovo tuhé teleso je

$$\begin{aligned} A \cdot \dot{p} + (C - A) \cdot q \cdot r &= \mathrm{mgs} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi; \\ A \cdot \dot{q} + (A - C) \cdot r \cdot p &= -\,\mathrm{mgs} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi; \\ C \cdot \dot{r} &= 0, \end{aligned}$$

kde A a C sú hlavné momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na osi jeho elipsoidu zotrvačnosti, ktorého stred je v pevnom bode telesa.

Z tretej rovnice je

$$C \cdot r = \text{konšt.},$$

teda $r = r_0 =$ konšt. Rotačná rýchlosť (relatívna) r okolo osi z', pevnej v telese, a následkom toho aj složka momentu hybnosti $\bar{G}_z$, v smere osi z' sú hodnoty stále.

d) E u l e r o v e   s l o ž k y   r ý c h l o s t i:

Násobme prvú Eulerovu rovnicu hodnotou p, druhú hodnotou q a sčítajme ich, dostaneme

$$A \cdot (p\dot{p} + q\dot{q}) = \mathrm{mgs} \cdot \sin\vartheta \cdot (p \cdot \cos\varphi - q \cdot \sin\varphi) = \mathrm{mgs} \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta},$$

z tohto vzťahu integrovaním máme

$$\tfrac{1}{2} \cdot A \cdot (p^2 + q^2) = -\,\mathrm{mgs} \cdot \cos\vartheta + c_1,$$

kde c_1 je integračná konštanta.

Pre počiatočný stav pohybu $(t = 0)$ pri uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}_0 = \bar{r}_0$ je $p_0 = q_0 = 0$; v dôsledku toho konštanta c_1 je $c_1 = \mathrm{mgs} \cdot \cos\vartheta_0$, kde ϑ_0 je uhol medzi osami z a z' na začiatku pohybu.

Keď sčítame druhé mocniny prvých dvoch kinematických rovníc (4,1), vychádza

$$p^2 + q^2 = \dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi}^2;$$

na základe toho je

$$A \cdot (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi}^2) = 2c_1 - 2\,\mathrm{mgs} \cdot \cos\vartheta. \qquad (4,2)$$

Moment sily $\bar{M}$ je kolmý na os z, preto je jeho složka v smere osi z: $\bar{M}_z = 0$ a v dôsledku toho je složka momentu hybnosti $\bar{G}$ v smere osi z konštantná

$$|\bar{G}_z| = A \cdot p \cdot (\bar{i}' \cdot \bar{k}) + A \cdot q\,(\bar{j}' \cdot \bar{k}) + C \cdot r_0 \cdot (\bar{k}' \cdot \bar{k}) =$$
$$= A \cdot p \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + A \cdot q \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + C \cdot r_0 \cdot \cos\vartheta = \text{konšt.} = c_2.$$

Pre počiatočný stav pohybu $(t = 0)$ je $p_0 = q_0 = 0$, preto platí $c_2 = C \cdot r_0 \cdot \cos\vartheta_0$.

Z kinematickej rovnice (4,1) pre $\dot{\psi}$ je

$$p \cdot \sin\varphi + q \cdot \cos\varphi = \sin\vartheta \cdot \dot{\psi},$$

resp.

$$A \cdot \sin\vartheta \cdot (p \cdot \sin\varphi + q \cdot \cos\varphi) = A \cdot \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi}.$$

Porovnaním tohto výrazu so vzťahom pre složku momentu hybnosti $\bar{G}_z$ máme

$$A \cdot \sin^2\vartheta \cdot \dot{\psi} = c_2 - C \cdot r_0 \cdot \cos\vartheta. \qquad (4,3)$$

Vylúčením hodnoty $\dot{\psi}$ z relácií (4,2) a (4,3) bude

$$\dot{\vartheta}^2 \cdot \sin^2\vartheta = \sin^2\vartheta \cdot (\alpha - a \cdot \cos\vartheta) - (\beta - b \cdot \cos\vartheta)^2,$$

kde konštanty α, a, β, b sú

$$\alpha = \frac{2c_1}{A}; \qquad a = \frac{2\,\mathrm{mgs}}{A}; \qquad (4,4)$$

$$\beta = \frac{c_2}{A}; \qquad b = \frac{Cr_0}{A}. \qquad (4,5)$$

Vzhľadom na výrazy

$c_1 = \mathrm{mgs} \cdot \cos\vartheta_0$, $c_2 = Cr_0 \cdot \cos\vartheta_0$ je $\alpha = a \cdot \cos\vartheta_0$, $\beta = b \cdot \cos\vartheta_0$.

Zaveďme substitúciu

$$\cos\vartheta = u, \qquad (4,6)$$

takže je

$$-\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \dot{u},$$

dostaneme

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \cdot (\alpha - a u) - (\beta - b u)^2.$$

Z rovnice (4,3) máme

$$\dot{\varphi} = \frac{\beta - bu}{1 - u^2} = b \cdot \frac{u_1 - u}{1 - u^2} \qquad (4{,}7)$$

a z tretieho vzťahu (4,1) vzhľadom na $r = r_0$ vychádza

$$\dot{\varphi} = r_0 - b \cdot u \cdot \frac{u_1 - u}{1 - u^2}, \qquad (4{,}8)$$

keď sme zaviedli označenie $\cos\vartheta_0 = u_1$.

Keďže je výraz pre $\dot{u}^2$ tretieho stupňa, $\cos\vartheta = u$ je eliptickou funkciou času. Označme ho

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \cdot (\alpha - a u) - (\beta - b u)^2 \equiv f(u). \qquad (4{,}9)$$

e) Rozbor funkcie (4,9):

Prepíšme funkciu $f(u)$ do tvaru

$$\begin{aligned} f(u) &= (1 - u^2) \cdot a \cdot (\cos\vartheta_0 - u) - b^2 \cdot (\cos\vartheta_0 - u)^2 = \\ &= (1 - u^2) \cdot a \cdot (u_1 - u) - b^2 \cdot (u_1 - u)^2 = \\ &= (u_1 - u) \cdot [a \cdot (1 - u^2) - b^2 \cdot (u_1 - u)]. \end{aligned}$$

Hodnota $u_1 = \cos\vartheta_0$ je nulovým bodom funkcie $f(u)$, preto môžeme písať

$$f(u) = (u_1 - u) \cdot g(u),$$

kde $g(u)$ je kvadratický trojčlen

$$g(u) = -a u^2 + b^2 u - (b^2 u_1 - a). \qquad (4{,}10)$$

Riešením rovnice $g(u) = 0$ vychádza

$$u_{32} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4ab^2u_1 + 4a^2}}{2a}.$$

Diskriminant tejto rovnice

$$D = b^4 - 4ab^2u_1 + 4a^2$$

je najmenší pre $u_1 = 1$. Vtedy je

$$D_{\min} = (b^2 - 2a)^2 \geqq 0,$$

keďže je $a > 0$. Preto platí obecne

$$D \geqq 0$$

a rovnica $g(u) = 0$ má dva reálne korene.

Funkcia $f(u)$ má teda tri reálne nulové body. Je racionálnou celistvou funkciou tretieho stupňa s kladným koeficientom $a > 0$ kubického člena. Preto pre argument u rastúci od $-\infty$ do $+\infty$ sa menia hodnoty funkcie $f(u)$ od $-\infty$ do $+\infty$. V bodoch $u = \pm 1$ je funkcia $f(u)$ záporná (prípadne sa rovná nule, ak by sme pripustili hodnoty $u_1 = \pm 1$)

$$[f(u)]_{u=\pm 1} = -b^2 \cdot (u_1 - u)^2 < 0.$$

Keďže pre $u = u_1$ má $f(u)$ nulový bod

$$[f(u)]_{u=u_1} = 0$$

a v tomto bode je jej derivácia zápornej hodnoty (alebo sa rovná nule, ak by bolo $u_1 = \pm 1$)

$$[f'(u)]_{u=u_1} = -a \cdot \sin^2\vartheta_0 < 0,$$

v intervale $(-1; +1)$ ležia jej dva nulové body, o ktorých platí $u_1 > u_2$. Tretí nulový bod u_3 leží mimo intervalu $\langle -1; +1 \rangle$.

Pre $u_1 > 0$ sú hodnoty u_2 záporné $u_2 < 0$, alebo sa rovnajú nule $u_2 = 0$, ak je absolútny člen rovnice $g(u) = 0$ záporný $a > b^2u_1$, resp. rovný nule $a = b^2u_1$. Ak je absolútny člen rovnice $g(u) = 0$ kladný $a < b^2u_1$, sú hodnoty u_2 kladné $u_2 > 0$. Pre $u_1 \lesseqgtr 0$ je absolútny člen rovnice $g(u) = 0$ vždy záporný. V dôsledku vzťahu $u_2 < u_1$ je potom aj hodnota u_2 záporná.

f) Vzťahy medzi koreňmi rovnice $f(u) = 0$:

Upravením výrazu $f(u)$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(u) &= (1 - u^2) \cdot a \cdot (u_1 - u) - b^2 \cdot (u_1 - u)^2 = \\ &= a u^3 - (b^2 + a u_1) \cdot u^2 + (2b^2 u_1 - a) \cdot u - u_1 \cdot (b^2 u_1 - a). \end{aligned}$$

Pre rovnicu $f(u) = 0$ z toho vychádza

$$u^3 - \left(\frac{b^2}{a} + u_1\right) \cdot u^2 + \left(2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot u_1 - 1\right) \cdot u - u_1 \cdot \left(\frac{b^2}{a} \cdot u_1 - 1\right) = 0.$$

Základné symetrické funkcie koreňov tejto rovnice sú

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{b^2}{a} + u_1,$$

$$u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot u_3 + u_2 \cdot u_3 = 2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot u_1 - 1,$$

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = u_1 \cdot \left(\frac{b^2}{a} \cdot u_1 - 1\right).$$

Z nich dostávame

$$u_3 + u_2 = \frac{b^2}{a}, \qquad (4{,}11)$$

$$u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot u_3 - u_2 \cdot u_3 = 1,$$

$$u_2 \cdot u_3 = \frac{b^2}{a} \cdot u_1 - 1. \qquad (4{,}12)$$

Pomocou týchto výsledkov môžeme odvodiť vzťahy

$$(1 + u_1) \cdot (1 - u_1) = (u_1 - u_2) \cdot (u_3 - u_1); \qquad (4{,}13)$$

$$(1 + u_2) \cdot (1 - u_2) = (u_1 - u_2) \cdot (u_3 + u_2); \qquad (4{,}14)$$

$$(u_3 + 1) \cdot (u_3 - 1) = (u_3 - u_1) \cdot (u_3 + u_2);$$

$$(1 + u_1)\cdot(1 - u_2) = (u_3 + 1)\cdot(u_1 - u_2); \qquad (4{,}15)$$
$$(1 - u_1)\cdot(1 + u_2) = (u_3 - 1)\cdot(u_1 - u_2);$$
$$(1 + u_1)\cdot(u_3 - 1) = (1 + u_2)\cdot(u_3 - u_1);$$
$$(1 - u_1)\cdot(u_3 + 1) = (1 - u_2)\cdot(u_3 - u_1); \qquad (4{,}16)$$
$$(1 + u_2)\cdot(u_3 + 1) = (1 + u_1)\cdot(u_3 + u_2); \qquad (4{,}17)$$
$$(1 - u_2)\cdot(u_3 - 1) = (1 - u_1)\cdot(u_3 + u_2). \qquad (4{,}18)$$

Z relácie $u_3 + u_2 = \frac{b^2}{a} > 0$ vyplýva

$$u_3 > -u_2.$$

Pre záporné hodnoty u_2 je $-u_2 > 0$, preto je $u_3 > 0$. Pre kladné hodnoty u_2 je $u_2 < 1$, $-u_2 > -1$, tedy je $u_3 > -1$.

Tretí nulový bod u_3 funkcie $f(u)$ je podľa toho vždy $u_3 > 1$.

g) Riešenie diferenciálnej rovnice $\dot{u}^2 = f(u)$:

Rozložme výraz $f(u)$ na prvočiniteľov

$$f(u) = a\cdot(u - u_1)\cdot(u - u_2)\cdot(u - u_3) = a\cdot(u_1 - u)\cdot(u - u_2)\cdot(u_3 - u).$$

Zaveďme substitúciu

$$u_1 - u = (u_1 - u_2)\cdot\xi^2.$$

Pre $\xi = 0$ je $u = u_1$; pre $\xi = 1$ je $u = u_2$.

Ďalej máme

$$u - u_2 = (u_1 - u_2) - (u_1 - u) = (u_1 - u_2) - (u_1 - u_2)\cdot\xi^2 = (u_1 - u_2)\cdot(1 - \xi^2);$$
$$u_3 - u = (u_3 - u_1) + (u_1 - u) = (u_3 - u_1) + (u_1 - u_2)\cdot\xi^2 = (u_3 - u_1)\cdot\left[1 + \frac{u_1 - u_2}{u_3 - u_1}\cdot\xi^2\right].$$

Na základe týchto vzťahov je

$$f(u) = a\cdot(u_1 - u_2)^2\cdot(u_3 - u_1)\cdot\xi^2\cdot(1 - \xi^2)\cdot\left(1 + \frac{u_1 - u_2}{u_3 - u_1}\cdot\xi^2\right).$$

Derivovaním výrazu $u_1 - u = (u_1 - u_2)\cdot\xi^2$ vychádza

$$-\dot{u} = (u_1 - u_2)\cdot 2\xi\cdot\dot{\xi}.$$

Pomocou odvodených výsledkov je

$$\dot{\xi}^2 = \frac{f(u)}{4\cdot(u_1 - u_2)^2\cdot\xi^2} = \frac{1}{4}\,a\cdot(u_3 - u_1)\cdot(1 - \xi^2)\cdot(1 - \varkappa^2\cdot\xi^2),$$

keď sme zaviedli označenie

$$\frac{u_1 - u_2}{u_3 - u_1} = -\varkappa^2.$$

Ďalšou úpravou máme

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a\,(u_3 - u_1)}\cdot dt = \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)\cdot(1 - \varkappa^2\cdot\xi^2)}}.$$

Tento výraz je Legendreov eliptický diferenciál, z ktorého vyplýva

$$\xi = sn\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a\,(u_3 - u_1)}\cdot t; \varkappa\right].$$

Modul $\varkappa$ je imaginárne číslo

$$\varkappa = i\cdot\frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_1}}.$$

Komplementárny modul $\varkappa'$ je číslo reálne

$$\varkappa' = \frac{\sqrt{u_3 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_1}};$$

väčšie ako 1.

Na základe zavedenej substitúcie $u_1 - u = (u_1 - u_2)\cdot\xi^2$ pre u je

$$u = u_1 - (u_1 - u_2)\cdot sn^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a\,(u_3 - u_1)}\cdot t; \varkappa\right].$$

h) Transformácia imaginárneho modulu vo výraze pre u:

Preveďme transformáciu imaginárneho modulu

$$\varkappa = i\bar{k} = i\cdot\frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_1}}$$

na modul reálny

$$k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1 + \bar{k}^2}} = \frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u_1 - u_2}{u_3 - u_1}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_1}}\cdot\frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{u_3 - u_2}} = \frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_2}} < 1, \qquad (4{,}19)$$

dostaneme

$$u = u_1 - (u_1 - u_2)\cdot\frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2}\cdot sd^2\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a\,(u_3 - u_2)}\,t; k\right],$$

resp. po malej úprave

$$u = u_3 - \frac{u_3 - u_1}{dn^2\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a\,(u_3 - u_2)}\cdot t; k\right]}. \qquad (4{,}20)$$

Pre čas $t = 0$ je $u = u_1$; ak sa argument funkcie dn rovná hodnote konštanty periódy K Jacobiho eliptických funkcií, je $u = u_2$.

Komplementárny modul k' má hodnotu

$$k' = \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{u_3 - u_2}} < 1. \qquad (4{,}21)$$

Odvodený výsledok (4,20) prepíšme do tvaru

$$u = u_3 - \frac{u_3 - u_1}{dn^2(w, k)},$$

z ktorého je

$$dn^2(w, k) = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u}. \qquad (4{,}22)$$

Ďalej máme

$$k^2 \cdot sn^2(w, k) = 1 - dn^2(w, k) =$$
$$= 1 - \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u} = \frac{u_1 - u}{u_3 - u},$$

z čoho vyplýva

$$sn^2(w, k) = \frac{u_1 - u}{u_3 - u} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2}; \tag{4,23}$$
$$cn^2(w, k) = 1 - sn^2(w, k) =$$
$$= 1 - \frac{u_1 - u}{u_3 - u} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2} =$$
$$= \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u} \cdot \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}. \tag{4,24}$$

ch) Úprava výrazu (4,7):

Vo výraze (4,7) pre $\dot{\varphi}$ rozložme posledného činiteľa na parciálne zlomky, potom bude

$$\dot{\varphi} = \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{u_1 - u}{1 + u} + \frac{u_1 - u}{1 - u}\right].$$

Pre menovateľov je

$$1 + u = (1 + u_1) - (u_1 - u_2) \cdot \xi^2 =$$
$$= (1 + u_1) \cdot \left[1 - \frac{u_1 - u_2}{1 + u_1} \cdot \xi^2\right], \tag{4,25}$$
$$1 - u = (1 - u_1) + (u_1 - u_2) \cdot \xi^2 =$$
$$= (1 - u_1) \cdot \left[1 + \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1} \cdot \xi^2\right]. \tag{4,26}$$

Dosadením do výrazu pre $\dot{\varphi}$ máme

$$\dot{\varphi} = \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{u_1 - u}{1 + u} + \frac{u_1 - u}{1 - u}\right] =$$
$$= \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{(u_1 - u_2) \cdot \xi^2}{(1 + u_1) \cdot \left[1 - \frac{u_1 - u_2}{1 + u_1} \cdot \xi^2\right]} + \frac{(u_1 - u_2) \cdot \xi^2}{(1 - u_1) \cdot \left[1 + \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1} \cdot \xi^2\right]}\right].$$

Substitúciami

$$\xi = sn\left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a(u_3 - u_1)} \cdot t;\ \varkappa\right] = sn(\eta, \varkappa);$$
$$\frac{u_1 - u_2}{1 + u_1} = \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa);$$
$$\frac{u_1 - u_2}{1 - u_1} = -\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa)$$

prejde výraz pre $\dot{\varphi}$ do tvaru

$$\dot{\varphi} = \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)} - \frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}\right].$$

Vzhľadom na reláciu

$$dt = \frac{2 \cdot d\eta}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}$$

je

$$d\varphi = \frac{b}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}} \cdot \left[\frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)} - \frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}\right].$$

i) Riešenie diferenciálnej rovnice (4,7):

Integrovaním máme

$$\varphi = \frac{b}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}} \cdot \left[\int_0^\eta \frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)} - \int_0^\eta \frac{\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa) \cdot d\eta}{1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) \cdot sn^2(\eta, \varkappa)}\right];$$

z čoho na základe (3,8) je

$$\varphi = \frac{b}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}} \cdot \left[\frac{sn(\alpha_1, \varkappa)}{cn(\alpha_1, \varkappa) \cdot dn(\alpha_1, \varkappa)} \cdot \Pi_{01}(\eta, \alpha_1, \varkappa) - \frac{sn(\alpha_2, \varkappa)}{cn(\alpha_2, \varkappa) \cdot dn(\alpha_2, \varkappa)} \cdot \Pi_{01}(\eta, \alpha_2, \varkappa)\right].$$

Ak do vzťahu $\frac{u_1 - u_2}{1 + u_1} = \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa)$ dosadíme $\varkappa^2 = -\frac{u_1 - u_2}{u_3 - u_1}$,

dostaneme $\qquad sn^2(\alpha_1, \varkappa) = -\frac{u_3 - u_1}{1 + u_1}.$

Analogicky máme z relácie $\frac{u_1 - u_2}{1 - u_1} = -\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa)$,

$$sn^2(\alpha_2, \varkappa) = \frac{u_3 - u_1}{1 - u_1}.$$

Z týchto hodnôt ďalej vychádza

$$cn^2(\alpha_1, \varkappa) = 1 - sn^2(\alpha_1, \varkappa) = 1 + \frac{u_3 - u_1}{1 + u_1} = \frac{u_3 + 1}{1 + u_1};$$
$$dn^2(\alpha_1, \varkappa) = 1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa) = 1 - \frac{u_1 - u_2}{1 + u_1} = \frac{1 + u_2}{1 + u_1};$$
$$cn^2(\alpha_2, \varkappa) = 1 - sn^2(\alpha_2, \varkappa) = 1 - \frac{u_3 - u_1}{1 - u_1} = -\frac{u_3 - 1}{1 - u_1};$$
$$dn^2(\alpha_2, \varkappa) = 1 - \varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) = 1 + \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1} = \frac{1 - u_2}{1 - u_1};$$

takže je

$$sn(\alpha_1, \varkappa) = i \cdot \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{1 + u_1}};$$
$$cn(\alpha_1, \varkappa) = \frac{\sqrt{u_3 + 1}}{\sqrt{1 + u_1}};$$
$$dn(\alpha_1, \varkappa) = \frac{\sqrt{1 + u_2}}{\sqrt{1 + u_1}};$$
$$sn(\alpha_2, \varkappa) = \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{1 - u_1}};$$
$$cn(\alpha_2, \varkappa) = i \cdot \frac{\sqrt{u_3 - 1}}{\sqrt{1 - u_1}};$$
$$dn(\alpha_2, \varkappa) = \frac{\sqrt{1 - u_2}}{\sqrt{1 - u_1}}.$$

Použitím odvodených vzťahov máme

$$\frac{sn(\alpha_1, \varkappa)}{cn(\alpha_1, \varkappa)\cdot dn(\alpha_1, \varkappa)} = i \cdot \frac{\sqrt{u_3 - u_1}\cdot\sqrt{1+u_1}\cdot\sqrt{1+u_1}}{\sqrt{1+u_1}\cdot\sqrt{u_3+1}\cdot\sqrt{1+u_2}} = $$
$$= i \cdot \frac{\sqrt{u_3+u_1}\cdot\sqrt{1+u_1}}{\sqrt{u_3+1}\cdot\sqrt{1+u_2}}.$$

Vzhľadom na (4,17) a (4,11) konečne je

$$\frac{sn(\alpha_1, \varkappa)}{cn(\alpha_1 \varkappa)\cdot dn(\alpha_1, \varkappa)} = i \cdot \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{u_3 + u_2}} = i \cdot \frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{b}. \tag{4,27}$$

Podobne dostaneme

$$\frac{sn(\alpha_2, \varkappa)}{cn(\alpha_2, \varkappa)\cdot dn(\alpha_2, \varkappa)} = \frac{\sqrt{u_3 - u_1}\cdot\sqrt{1-u_1}\cdot\sqrt{1-u_1}}{\sqrt{1-u_1}\cdot i\cdot\sqrt{u_3-1}\cdot\sqrt{1-u_2}},$$

z čoho vzhľadom na (4,18) a (4,11) je

$$\frac{sn(\alpha_2, \varkappa)}{cn(\alpha_2, \varkappa)\cdot dn(\alpha_2, \varkappa)} = -i \cdot \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{u_3 + u_2}} = -i \cdot \frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{b}. \tag{4,28}$$

Dosadením týchto hodnôt do výrazu pre ψ dostaneme

$$\psi = i \cdot [\Pi_{01}(\eta, \alpha_1, \varkappa) + \Pi_{01}(\eta, \alpha_2, \varkappa)].$$

j) Ú p r a v a v ý r a z u p r e ψ:

Utvorme súčin

$$\varkappa^2 \cdot sn^2(\alpha_1, \varkappa)\cdot sn^2(\alpha_2, \varkappa) = \frac{-(u_1 - u_2)}{u_3 - u_1}\cdot\frac{-(u_3 - u_1)}{1+u_1}\cdot\frac{u_3 - u_1}{1 - u_1} =$$
$$= \frac{(u_1 - u_2)\cdot(u_3 - u_1)}{(1+u_1)\cdot(1-u_1)} = 1,$$

keď sme vzali do úvahy vzťah (4,13).

Z tohto súčinu vyplýva, že je

$$\alpha_2 = \alpha_1 + iK'.$$

Vzhľadom na (3,3) potom je

$$\psi = i \cdot [\Pi_{01}(\eta, \alpha_1, \varkappa) + \Pi_{01}(\eta, \alpha_1 + iK', \varkappa)] =$$
$$= i \cdot \left[\Pi_{01}(\eta, \alpha_1, \varkappa) + \Pi_{11}(\eta, \alpha_1, \varkappa) \pm i \cdot \frac{\pi}{2}\right].$$

Modul $\varkappa$ je v použitých II-funkciách imaginárny. Transformáciami podľa (3,4) a (3,5) prejde modul $\varkappa = i\bar{k}$ v reálnu hodnotu

$$k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1+\bar{k}^2}} = \frac{\sqrt{u_1 - u_2}}{\sqrt{u_3 - u_2}} < 1,$$

a pre ψ dostaneme

$$\psi = i \cdot \left[\Pi_{00}(w, i\alpha, k) + \Pi_{11}(w, i\alpha, k) \pm i \cdot \frac{\pi}{2}\right]. \tag{4,29}$$

Argument w po transformácii je definovaný výrazom

$$w = \eta^* = \eta \cdot \sqrt{1+\bar{k}^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a(u_3 - u_1)}\cdot t \cdot \frac{\sqrt{u_3 + u}}{\sqrt{u - u}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a(u_3 - u_2)}\cdot t. \tag{4,30}$$

Parameter $i\alpha$ je imaginárne číslo. Pre pôvodný parameter α_1 je $dn^2(\alpha_1, \varkappa) = \frac{1+u_2}{1+u_1}$.

Transformáciou na reálny modul prejde α_1 v hodnotu $i\alpha$, pre ktorú platí

$$dn^2(i\alpha, k) = \frac{1}{dn^2(\alpha_1, \varkappa)} = \frac{1+u_1}{1+u_2}.$$

Z toho ďalej máme

$$k^2 \cdot sn^2(i\alpha, k) = 1 - dn^2(i\alpha, k) =$$
$$= 1 - \frac{1+u_1}{1+u_2} = -\frac{u_1 - u_2}{1+u_2},$$

resp.

$$sn^2(i\alpha, k) = -\frac{u_1 - u_2}{1+u_2}\cdot\frac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2} = -\frac{u_3 - u_2}{1+u_2},$$

konečne

$$cn^2(i\alpha, k) = 1 - sn^2(i\alpha, k) =$$
$$= 1 + \frac{u_3 - u_2}{1+u_2} = \frac{u_3 + 1}{1 + u_2}.$$

Jacobiho imaginárna transformácia prevedie parameter $i\alpha$ na reálnu hodnotu α, ak použijeme namiesto modulu k komplementárny modul k'. Tak dostaneme

$$cn(i\alpha, k) = \frac{\sqrt{u_3+1}}{\sqrt{1+u_2}} = \frac{1}{cn(\alpha, k')},$$

z čoho je

$$cn(\alpha, k') = \frac{\sqrt{1+u_2}}{\sqrt{u_3+1}} \tag{4,31}$$

a ďalej

$$sn(\alpha, k') = \sqrt{1 - cn^2(\alpha, k')} = \sqrt{1 - \frac{1+u_2}{u_3+1}} = \frac{\sqrt{u_3 - u_2}}{\sqrt{u_3+1}}, \tag{4,32}$$

$$dn(\alpha, k') = \sqrt{1 - k'^2\cdot sn^2(\alpha, k')} = \sqrt{1 - \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2}\cdot\frac{u_3 - u_2}{u_3+1}} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{u_3 - u_1}{u_3 + 1}} = \frac{\sqrt{1+u_1}}{\sqrt{u_3+1}}. \tag{4,33}$$

V týchto reláciách je argument α definovaný výrazom (1,6).

k) Ú p r a v a v ý r a z u (4,8):

V rovnici (4,8) rozkladom

$$-\frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u}\right]$$

bude

$$\dot{\varphi} = r_0 + \frac{b}{2}\cdot\left[\frac{u_1-u}{1+u} - \frac{u_1-u}{1-u}\right].$$

Keď dosadíme za menovateľov vzťahy (4,25) a (4,26) máme

$$\dot{\varphi} = r_0 + \frac{b}{2}\cdot\left[\frac{(u_1-u_2)\cdot\xi^2}{(1+u_1)\cdot\left[1-\frac{u_1-u_2}{1+u_1}\cdot\xi^2\right]} - \frac{(u_1-u_2)\cdot\xi^2}{(1-u_1)\cdot\left[1+\frac{u_1-u_2}{1-u_1}\cdot\xi^2\right]}\right].$$

Substitúciami

$$\xi = sn\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a(u_3-u_1)}\cdot t;\varkappa\right] = sn(\eta,\varkappa);$$

$$\frac{u_1-u_2}{1+u_1} = \varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa);$$

$$\frac{u_1-u_2}{1-u_1} = -\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)$$

prejde výraz pre $\dot{\varphi}$ do tvaru

$$\dot{\varphi} = r_0 + \frac{b}{2}\cdot\left[\frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)} + \frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)}\right].$$

Vzhľadom na vzťah

$$dt = \frac{2\cdot d\eta}{\sqrt{a(u_3-u_1)}}$$

je

$$d\varphi = r_0 dt + \frac{b}{\sqrt{a(u_3-u_1)}}\cdot\left[\frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)\cdot d\eta}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)\cdot d\eta}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)}\right].$$

l) R i e š e n i e d i f e r e n c i á l n e j r o v n i c e (4,8):

Integrovaním bude

$$\varphi = r_0\cdot t + \frac{b}{\sqrt{a(u_3-u_1)}}\cdot\left[\int_0^\eta \frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)\cdot d\eta}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_1,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)} + \right.$$
$$\left. + \int_0^\eta \frac{\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)\cdot d\eta}{1-\varkappa^2\cdot sn^2(\alpha_2,\varkappa)\cdot sn^2(\eta,\varkappa)}\right],$$

z čoho na základe (3,8) je

$$\varphi = r_0\cdot t + \frac{b}{\sqrt{a(u_3-u_1)}}\cdot\left[\frac{sn(\alpha_1,\varkappa)}{cn(\alpha_1,\varkappa)\cdot dn(\alpha_1,\varkappa)}\cdot\Pi_{01}(\eta,\alpha_1,\varkappa) + \right.$$
$$\left. + \frac{sn(\alpha_2,\varkappa)}{cn(\alpha_2,\varkappa)\cdot dn(\alpha_2,\varkappa)}\cdot\Pi_{01}(\eta,\alpha_2,\varkappa)\right].$$

Dosadením hodnôt (4,27) a (4,28) bude

$$\varphi = r_0\cdot t + i\cdot[\Pi_{01}(\eta,\alpha_1,\varkappa) - \Pi_{01}(\eta,\alpha_2,\varkappa)].$$

Vzhľadom na reláciu $\alpha_2 = \alpha_1 + iK'$ podľa (3,3) je ďalej

$$\varphi = r_0\cdot t + i\cdot[\Pi_{01}(\eta,\alpha_1,\varkappa) - \Pi_{01}(\eta,\alpha_1+iK',\varkappa)] =$$
$$= r_0\cdot t + i\cdot\left[\Pi_{01}(\eta,\alpha_1,\varkappa) - \Pi_{11}(\eta,\alpha_1,\varkappa) \mp i\cdot\frac{\pi}{2}\right].$$

Modul $\varkappa$ je imaginárne číslo. Transformáciou podľa (3,4) a (3,5) prejde v reálnu hodnotu $k = \frac{\sqrt{u_1-u_2}}{\sqrt{u_3-u_2}}$, a pre φ dostaneme

$$\varphi = r_0\cdot t + i\cdot\left[\Pi_{00}(w,i\alpha,k) - \Pi_{11}(w,i\alpha,k) \mp i\cdot\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (4,34)$$

Argument w je definovaný vzťahom

$$w = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a(u_3-u_2)}\cdot t;$$

parameter $i\alpha$ je imaginárne číslo, pre ktoré je

$$sn^2(i\alpha,k) = -\frac{u_3-u_2}{1+u_2}.$$

Pre hodnotu α platí (4,32)

$$sn(\alpha,k') = \frac{\sqrt{u_3-u_2}}{\sqrt{u_3+1}},$$

takže je definovaná výrazom (1,6).

m) V ý s l e d k y:

Rovnice (4,20) v spojení s (4,6), ďalej (4,29) a (4,34) určujú Eulerove uhly; sú riešením Eulerovho diferenciálneho systému Lagrangeovho tuhého telesa.

Uhol ϑ popisuje nutačný pohyb telesa; φ je uhol vlastnej rotácie a ψ je uhol precesie.

Ak určíme pre daný čas t Eulerove uhly ϑ, φ a rýchlosť $\dot{\vartheta}$ nutácie (5,3) a precesie $\dot{\psi}$ (4,7), môžeme z kinematických rovníc (4,1) vypočítať rýchlosti p a q. Rotačná rýchlosť $r = r_0$ je konštantná; rovná sa počiatočnej uhlovej rýchlosti telesa.

Eulerove uhly ϑ, φ, ψ a vektor okamžitej uhlovej rýchlosti $\overline{\omega}$ určujú polohu a pohybový stav telesa v danom čase.

5. Nutácia.

Rovnica (4,20) popisuje nutáciu telesa. Pre periódu tohto pohybu vyplýva z nej

$$T = \frac{4K}{\sqrt{a(u_3-u_2)}}. \qquad (5,1)$$

Pre čas $t = 0$ je $u = u_1$; v čase $t = \frac{T}{2}$ je $u = u_2$. Pre čas $t = \frac{T}{4}$ a $t = \frac{3T}{4}$ je

$$[u]_{t=\frac{T}{4}} = [u]_{t=\frac{3T}{4}} = u_3 - \sqrt{u_3 - u_1} \cdot \sqrt{u_3 - u_2}. \tag{5,2}$$

Pre nutačný pohyb v jednotlivých štvrtinách periódy vychádza

$$u_1 - u_{\frac{T}{4}} < u_{\frac{T}{4}} - u_2;$$
$$u_1 - u_{\frac{3T}{4}} < u_{\frac{3T}{4}} - u_2.$$

V prvej a poslednej štvrtine periódy je priemerná rýchlosť nutácie menšia ako v druhej a tretej štvrtine.

Uhlovú rýchlosť $\dot{\vartheta}$ nutačného pohybu určuje vzťah

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{a \cdot (u_1 - u)(u - u_2)(u_3 - u)}}{\sqrt{1 - u^2}}. \tag{5,3}$$

6. Vlastná rotácia.

Vlastnú rotáciu telesa určuje rovnica (4,34). Jej upravením vzhľadom na definičné vzťahy Π-funkcií (3,1) a (3,2) podľa (1,3) a (2,6), ďalej (4,31), (4,32), (4,33), (4,22), (4,23), (4,24) a (4,30) po krátení a použití relácií (4,17) a (4,11) pri počiatočnej podmienke $[\varphi]_{t=0} = 0$ vychádza

$$\varphi = r_0 \cdot \left(1 - \frac{C}{2A}\right) \cdot t + \operatorname{arc\,cotg} \frac{\sqrt{u_3 - u} \cdot \sqrt{u - u_2}}{\sqrt{u_3 + u_2} \cdot \sqrt{u_1 - u}}. \tag{6,1}$$

Okamžitú uhlovú rýchlosť vlastnej rotácie určuje (4,8). Vo význačných časových okamihoch periódy nutácie je

$$[\dot{\varphi}]_{t=0} = r_0; \ [\dot{\varphi}]_{t=\frac{T}{2}} = r_0 - \frac{2\,mgs}{Cr_0} \cdot u_2; \ [\dot{\varphi}]_{t=T} = r_0. \tag{6,2}$$

Hodnoty uhla vlastnej rotácie za periódu nutácie sú

$$[\varphi]_{t=0} = 0; [\varphi]_{t=\frac{T}{2}} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{C}{2A}\right) \cdot \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2}; \ [\varphi]_{t=T} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{C}{2A}\right) \cdot T + \pi.$$

Z týchto výsledkov vyplýva

$$[\varphi]_{t=\frac{T}{2}} - [\varphi]_{t=0} = [\varphi]_{t=T} - [\varphi]_{t=\frac{T}{2}};$$

priemerná uhlová rýchlosť vlastnej rotácie v prvej polovici periódy nutácie sa rovná priemernej uhlovej rýchlosti vlastnej rotácie v druhej polovici periódy nutácie.

Priemernú uhlovú rýchlosť $\dot{\varphi}'$ vlastnej rotácie telesa, pripadajúcu na časový interval polovice periódy nutácie, udáva výraz

$$\dot{\varphi}' = r_0 \cdot \left(1 - \frac{C}{2A}\right) + \frac{\pi}{T}. \tag{6,3}$$

Na základe tohto vzťahu môžeme vypočítať uhol vlastnej rotácie telesa pre daný čas t.

Absolútna chyba $\triangle\varphi$ tohto výpočtu bude

$$\triangle\varphi = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\sqrt{u_3 - u} \cdot \sqrt{u - u_2}}{\sqrt{u_3 + u_2} \cdot \sqrt{u_1 - u}} - \frac{\pi}{T} \cdot \tau, \tag{6,4}$$

kde τ je najmenší čas, o ktorý prevyšuje daný čas t celistvý násobok polovice periódy nutácie

$$\tau = t - h \cdot \frac{T}{2}; \ h = 0; 1; 2 \ldots \tag{6,5}$$

Pre $\tau = 0$ a $\tau = \frac{T}{2}$ je $t = h \cdot \frac{T}{2}$, resp. $t = (h+1) \cdot \frac{T}{2}$; chyba výpočtu pri týchto hodnotách τ je nulová

$$[\triangle\varphi]_{\tau=0} = [\triangle\varphi]_{\tau=\frac{T}{2}} = 0.$$

Pomocou absolútnej chyby $\triangle\varphi$ výpočtu môžeme určiť hodnotu uhla φ vlastnej rotácie telesa v danom čase t z relácie

$$\varphi = \dot{\varphi}' \cdot t + \triangle\varphi. \tag{6,6}$$

Výrazy (6,3), (6,4), (6,5) a (6,6) môžeme ľahko vyčísliť.

7. Precesia.

Precesný pohyb telesa popisuje rovnica (4,29).

Na základe definičných relácií Π-funkcií (3,1) a (3,2), podľa (1,8) a (2,5), dosadením hodnôt (4,31), (4,32), (4,33), (4,21) a (4,30), vzhľadom na vzťahy (4,4), (4,5), (4,11), (4,16), (4,17) a (4,18) pri počiatočnej podmienke $[\psi]_{t=0} = 0$ vychádza

$$\psi = \frac{mgs}{Cr_0} \cdot t \cdot [2 - (u_3 - u_2)] + \sqrt{a(u_3 - u_2)} \cdot t \cdot \left[E(\varphi, k') - F(\varphi, k') \cdot \left(1 - \frac{E}{K}\right)\right] - \\ - \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi\alpha}{2K}\right] - \\ - \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(-1)^{h-1} \cdot 2q^h \cdot \sin \frac{\pi w}{K} \cdot \sinh \frac{\pi\alpha}{K}}{(-1)^{h-1} \cdot 2q^h \cdot \cos \frac{\pi w}{K} \cdot \cosh \frac{\pi\alpha}{K} + 1 + q^{2h}}. \tag{7,1}$$

Podľa (1,7) a (4,32) pre argument φ v (7,1) je

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{u_3 - u_2}}{\sqrt{u_3 + 1}}. \tag{7,2}$$

Okamžitú uhlovú rýchlosť precesie telesa určuje rovnica (4,7). V čase $t = 0$ je $[\dot{\varphi}]_{t=0} = 0$. Pre čas $t = \frac{T}{2}$ je $[\dot{\varphi}]_{t=\frac{T}{2}} = \frac{2\,mgs}{Cr_0}$, keď použijeme vzťahy (4,5), (4,4) (4,11) a (4,14).

Hodnoty uhla ψ precesie telesa za periódu nutácie sú

$$[\psi]_{t=0} = 0;$$

$$[\psi]_{t=\frac{T}{2}} = \frac{mgs}{Cr_0}\cdot\frac{T}{2}\cdot[2-(u_3-u_2)] + \sqrt{a\,(u_3-u_2)}\cdot\frac{T}{2}\cdot\left[E(\varphi,k')-F(\varphi,k')\cdot\left(1-\frac{E}{K}\right)\right]-\frac{\pi}{2};$$

$$[\varphi]_{t=T} = \frac{mgs}{Cr_0}\cdot T\cdot[2-(u_3-u_2)] + \sqrt{a\,(u_3-u_2)}\cdot T\cdot\left[E\,(\varphi,k')-F\,(\varphi,k')\cdot\left(1-\frac{E}{K}\right)\right]-\pi.$$

Z týchto výsledkov vyplýva

$$[\varphi]_{t=\frac{T}{2}} - [\varphi]_{t=0} = [\varphi]_{t=T} - [\varphi]_{t=\frac{T}{2}};$$

priemerná uhlová rýchlosť precesie v prvej polovici periódy nutácie sa rovná priemernej uhlovej rýchlosti precesie v druhej polovici periódy nutácie.

Priemernú uhlovú rýchlosť $\dot{\varphi}'$ precesie telesa, pripadajúcu na časový interval polovice periódy nutácie, udáva výraz

$$\dot{\varphi}' = \frac{mgs}{Cr_0}\cdot\left[2-(u_3-u_2)\right]+\frac{4}{T}\cdot\left[K\cdot E(\varphi,k')-(K-E)\cdot F(\varphi,k')-\frac{\pi}{4}\right]. \tag{7,3}$$

Na základe tohto vzťahu môžeme vypočítať uhol precesie pre daný čas. Absolútna chyba $\triangle\psi$ tohto výpočtu bude

$$\triangle\psi = \frac{\pi}{T}\cdot\tau - \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K}\cdot\operatorname{tgh}\frac{\pi\alpha}{2K}\right] - \sum_{h=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(-1)^{h-1}\cdot 2q^h\cdot\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\alpha}{K}}{(-1)^{h-1}\cdot 2q^h\cdot\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\alpha}{K}+1+q^{2h}}. \tag{7,4}$$

V tomto výraze je w definované vzťahom (4,30), α reláciou (1,6), q (2,4) a τ (6,5).

Pre čas $\tau = 0$ a $\tau = \frac{T}{2}$ je chyba $\triangle\psi$ výpočtu nulová

$$[\triangle\psi]_{\tau=0} = [\triangle\psi]_{\tau=\frac{T}{2}} = 0.$$

Ak určíme absolútnu chybu $\triangle\psi$ výpočtu, hodnotu precesného uhla ψ pre daný čas t dostaneme z rovnice

$$\psi = \dot{\varphi}'\cdot t + \triangle\psi. \tag{7,5}$$

Výrazy (7,3), (6,5), (7,4) a (7,5) sa môžu ľahko vyčísliť.

8. Numerický výpočet konkrétneho prípadu pohybu.

Riešme konkrétny prípad pohybu Lagrangeovho tuhého telesa, ktorého hmota je 1587 g, rovníkový moment zotrvačnosti $A = 39\,032$ gcm², pólový moment zotrvačnosti $C = 17\,458$ gcm² a hmotný stred je od pevného bodu telesa vzdialený 4 cm. Teleso sa roztočí v zemskom gravitačnom poli; $g = 981$ cm · sec⁻².

Konštanty telesa sú

$m = 1587$ g; $A = 39\,032\ \mathrm{gcm}^2$; $C = 17\,458\ \mathrm{gcm}^2$; $s = 4$ cm.

Z nich vychádza podľa (4,4)

$$a = \frac{2\,mgs}{A} = 319{,}091\ \mathrm{sec}^{-2};$$

ďalej je

$$1 - \frac{C}{2A} = 0{,}776363.$$

Nech je počiatočná uhlová rýchlosť telesa $r_0 = 50\ \mathrm{sec}^{-1}$ a sklon osi z': $\vartheta_0 = 30°$. Potom bude $u_1 = \cos\vartheta_0 = \cos 30° = 0{,}8660254$; podľa (4,5) $b = \frac{Cr_0}{A} = 22{,}3637\ \mathrm{sec}^{-1}$. Z toho ďalej je vzhľadom na (4,11) $\frac{b^2}{a} = u_3 + u_2 = 1{,}56737$.

Keďže podľa (4,12) je $u_3\cdot u_2 = \frac{b^2}{a}\cdot u_1 - 1 = 0{,}35738$, použitím týchto hodnôt dostaneme

$$\begin{aligned}(u_3+u_2)^2 &= 2{,}45665;\\ -4u_3\cdot u_2 &= -1{,}42952\\ \hline (u_3-u_2)^2 &= 1{,}02713;\\ u_3-u_2 &= 1{,}01347.\end{aligned}$$

Ďalším riešením vychádza

$$\begin{aligned}u_3+u_2 &= 1{,}56737;\\ u_3-u_2 &= 1{,}01347\\ \hline 2u_3 &= 2{,}58084;\\ 2u_2 &= 0{,}55390;\end{aligned}$$

$$u_3 = 1{,}29042;\quad u_2 = 0{,}27695.$$

Podľa (4,19) máme $k^2 = 0{,}581238$. Z toho je

$$\arcsin k = 49°\,40'\,31'';\quad \arcsin k' = 40°\,19'\,29''.$$

Vzhľadom na (7,2) je $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{u_3 - u_2}}{\sqrt{u_3 + 1}} = 41° 41' 50''$.

Z vypočítaných hodnôt vychádza

$$K = 1{,}9299; \qquad E = 1{,}3085;$$
$$F(\varphi, k') = 0{,}7544; \qquad E(\varphi, k') = 0{,}7028.$$

Dosadením do (5,1), (5,2), (6,3) a (7,3) dostaneme

$$T_\vartheta = 0{,}42927 \text{ sec}; \quad u_{\frac{T}{4}} = u_{\frac{3T}{4}} = 0{,}63459;$$
$$\dot{\varphi}' = 46{,}13659 \text{ sec}^{-1}; \; \dot{\psi}' = 7{,}98957 \text{ sec}^{-1}.$$

Podľa (6,2) je $\dot{\varphi}_{\frac{T}{2}} = 46{,}04841 \text{ sec}^{-1}$; analogicky pre okamžitú uhlovú rýchlosť precesie v čase $t = \frac{T}{2}$ vychádza $\dot{\psi}_{\frac{T}{2}} = \frac{2\,mgs}{Cr_0} = 14{,}2682 \text{ sec}^{-1}$.

Periódy vlastnej rotácie a precesie sú

$$T_\varphi \doteq 0{,}136186 \text{ sec}; \quad T_\psi \doteq 0{,}786423 \text{ sec}.$$

ВЫВОДЫ

Общее аналитическое решение сферического движения твердого тела не известно. Случай Лагранжа ведет при угле нутации к эллиптическим функциям Якоби, а при углах собственной ротации и прецессии к двум эллиптическим интергалам третьего рода.

При нормальных исходных условиях движения разбор кубической функции квадрата скорости изменения косинуса мгновенного значения угла нутации дает ряд соотношений, при помощи которых редуцируют общее выражение углов Эйлера на выражения, которые можно легко высчитать и численно.

Из-за этой редукции общие реляции решения выражены через п-функции, определяемые при помощи транщендент Якоби второго и третьего рода с мнимым модулем и параметром.

После трансформирования эллиптических функций Якоби, дзета-функций, Ω-функций, ичи п-функций, на виды с реальными модулем и параметром при угле прецессии дзета-функции заменяют эллиптическими интегралами первого и второго рода с применением реляции Лежандра; Ω-функции выражены при помощи бесконечных гэта-произведений очень быстро сходящихся рядов. Из результатов выведены соотношения для совершающегося движения в интервале периода нутации.

Кроме редукции общих соотношений решения, движение описывают выражениями, соответствующими нормальным исходным условиям псевдорегулярной прецессии, которая является общим движением твердого тела случая Лагранжа.

Легкость использования результатов иллюстрируется численным решением конкретного случая движения.

LITERATÚRA

1. N. I. A c h i e z e r, *Elementy teorii elliptičeskich funkcij*, Ogiz, Moskva 1948.
2. C. B r u h n s, *Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen*, Leipzig 1928.
3. C. G. J. J a c o b i's *gesammelte Werke I*, Berlin 1881.
4. C. G. J. J a c o b i's *gesammelte Werke II*, Berlin 1882.
5. E. J a h n k e—F. E m d e, *Tablicy funkcij s formulami i krivymi*, Moskva 1949.
6. E. L. N i k o l a j, *Teorija giroskopov* Ogiz, Moskva 1948.