VÁCLAV MEDEK

ZOBRAZENIE NIEKTORÝCH NELINEÁRNYCH SYSTÉMOV KUŽEĽOSEČIEK

Bodové kužeľosečky roviny sa dajú jednojednoznačne zobraziť na Body lineárneho päťrozmerného priestoru S_5 (aby som rozlíšil body roviny kužeľosečiek od Bodov a jednorozmerných útvarov priestoru S_5, budem tieto označovať veľkými začiatočnými písmenami). Toto zobrazenie má tieto vlastnosti (porov. Bertini, *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*):

1. Lineárne n-mocné systémy kužeľosečiek sa zobrazujú na lineárne n-rozmerné priestory S_n priestoru S_5. Pritom vzťah medzi kužeľosečkami sväzku a medzi Bodmi Priamky, ktorá je obrazom tohoto sväzku, je projektívny.

2. Degenerované kužeľosečky sa zobrazujú na Body nadplochy 3. stupňa M_4^3, pričom kužeľosečky degenerujúce v dvojnásobne počítanú priamku sa zobrazujú na Body Veroneseho plochy F_2^4, ktorá je dvojnásobným útvarom nadplochy M_4^3.

3. Nadplocha M_4^3 obsahuje dva druhy rovín. Body rovín 1. druhu sú obrazy kužeľosečiek degenerujúcich vo dve priamky, z ktorých jedna je všetkým spoločná. Body rovín 2. druhu sú obrazy kužeľosečiek, ktoré degenerujú vo dve priamky o spoločnom priesečníku.

4. Lineárny trojmocný systém kužeľosečiek definovaný pólom a polárou, ktorá ním neprechádza, je reprezentovaný lineárnym trojrozmerným priestorom 1. druhu S_3, ktorý je charakterizovaný tým, že má s plochou F_2^4 spoločnú Kužeľosečku a ešte jeden Bod, ktorý na nej neleží. Kužeľosečky dotýkajúce sa danej priamky v pevnom bode zobrazujú sa na lineárny trojrozmerný priestor 2. druhu, ktorý má s plochou F_2^4 spoločnú Kužeľosečku. Podobne vzťah lineárneho n-rozmerného priestoru S_n k ploche F_2^4 charakterizuje vlastnosti n-mocného lineárneho systému kužeľosečiek ním reprezentovaného.

Účelom tejto práce je odvodiť niektoré vety o zobrazení nelineárnych systémov kužeľosečiek.

Veta 1. *Všetky kužeľosečky, pre ktoré priamky tt' sú párom konjugovaných polár, sa zobrazujú na Body nadplochy 2. stupňa T_4^2, ktorú tvoria priestory S_3 prechádzajúce jednou Priamkou. Nadplocha T_4^2* obsahuje *plochu F_2^4.*

Dôkaz: Každý svázok kužeľosečiek Σ_1 obsahuje dve kuželosečky, pre ktoré sú priamky tt' párom konjugovaných polár. Ak obsahuje viac ako dve kužeľosečky vyhovujúce tejto požiadavke, potom vyhovujú všetky a jedna z priamok tt' musí splývať s jednou stranou spoločného polárneho trojuholníka všetkých kužeľosečiek svázku. Nech teraz všetky kužeľosečky majúce pár priamok tt' za pár konjugovaných polár zobrazia sa na istú množinu Bodov M. Keďže svázky kužeľosečiek sa zobrazujú na Priamky, vyplýva z predchádzajúceho, že množina M musí byť nadplochou 2. stupňa T_4^2.

Obraz každej kužeľosečky degenerujúcej v dvojnásobne počítanú priamku musí ležať na nadploche T_4^2, pretože každý pár priamok tvorí pár konjugovaných polár vzhľadom na každú kužeľosečku degenerujúcu v dvojnásobne počítanú priamku. Nadplocha T_4^2 obsahuje teda plochu F_2^4.

Označme Ξ_4 systém kužeľosečiek určených párom konjugovaných polár tt'. Všetky kužeľosečky systému Ξ_4 dostaneme tak, že volíme napr. na priamke t rad bodov ${}^xT'$. Každý bod ${}^xT'$ a priamka t, ako pól a polára, určujú systém kužeľosečiek ${}^x\Sigma_3'$, ktoré všetky prislúchajú systému Ξ_4. Ak vyčerpáme všetky body priamky t vyčerpáme všetky kužeľosečky systému Ξ_4, čo priamo vyplýva z definície konjugovaných polár. Všetky systémy ${}^x\Sigma_3'$ majú spoločný svázok degenerovaných kužeľosečiek o spoločnom vrchole v priesečníku priamok tt'. Tým sú ale vyčerpané všetky možnosti kužeľosečiek spoločných všetkým systémom ${}^x\Sigma_3'$, pretože žiadna iná kužeľosečka nemôže mať pre tú istú poláru t' dva od seba rôzne póly ${}^{x_1}T'$ a ${}^{x_2}T'$. Všetky kužeľosečky systému Ξ_4 dostaneme však aj tým spôsobom, že volíme póly ${}^xT$ poláry t na priamke t'. Dostávame tak systémy ${}^x\Sigma_3$, ktoré majú spoločný ten istý svázok degenerovaných kužeľosečiek ako systémy ${}^x\Sigma_3'$. Dva čiarkované, alebo nečiarkované systémy nemajú okrem uvedeného svázku spoločnú žiadnu inú kužeľosečku. Čiarkovaný a nečiarkovaný systém majú spoločný celý systém Σ_2 kužeľosečiek určený polárnym trojuholníkom ${}^xT{}^xT'{}^oT$, kde ${}^oT$ je priesečník polár tt'.

Nadplocha T_4^2 obsahuje teda dva systémy priestorov S_3. Dva priestory tohože systému majú spoločnú iba Priamku ${}^iS_1$, spoločnú všetkým priestorom S_3 na nadploche T_4^2. Dva priestory rôznych systémov majú spoločnú rovinu, ktorá pretína nadplochu M_4^3 v troch Priamkach. Okrem dvoch priestorov 2. druhu, ktoré zobrazujú systémy ${}^o\Sigma_3$ a ${}^o\Sigma_3'$ všetky ostatné priestory sú 1. druhu.

Prenik nadplochy T_4^2 s nadplochou M_4^3 okrem plochy F_2^4 tvorí ešte systém kvadratických kužeľov, ktorých vrcholy ležia na Priamke ${}^iS_1$ a majú túto Priamku spoločnú.

Bod T, ktorý je obrazom kužeľosečky degenerovanej vo dve priamky tt' leží na nadploche T_4^2 a to v rovine, v ktorej sa pretínajú dva priestory ${}^oS_3{}^oS_3'$ 2. druhu.

Táto veta je len špeciálnym prípadom obecnejšej vety.

Veta 2. *Všetky kužeľosečky, ktoré sú harmonicky vpísané danej kužeľosečke k, zobrazujú sa na Body istej kvadratickej nadplochy K_4^2, ktorá obsahuje plochu F_2^4.*

Dôkaz. Daná je kužeľosečka k a svázok kužeľosečiek Σ_1, ktorý neobsahuje kužeľosečku k. Každému bodu ${}^xK$ kužeľosečky k odpovedá vzhľadom na svázok Σ_1 jeden bod ${}^xK'$, harmonicky sdružený k bodu ${}^xK$. Body ${}^xK'$ vyplnia krivku 4. stupňa, ktorá pretína kužeľosečku k v štyroch pároch konjugovaných pólov ${}^iK{}^iK'$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ vzhľadom na svázok Σ_1. Uvažujme o jednom takomto páre ${}^1K{}^1K'$. Spojnici týchto dvoch bodov odpovedá vzhľadom na svázok Σ_1 pólová kužeľosečka ${}^1k$, ktorá prechádza bodmi ${}^1K{}^1K'$ a pretína teda kužeľosečku k ešte vo dvoch bodoch ${}^{x_1}K{}^{x_2}K$. Polárnym trojuholníkom ${}^{x_1}K{}^1K{}^1K'$ je určená jediná kužeľosečka ${}^{a_1}k$ svázku Σ_1 a polárnym trojuholníkom ${}^{x_2}K{}^1K{}^1K'$ ďalšia kužeľosečka ${}^{x_2}k$. Kužeľosečky ${}^{x_1}k\,{}^{x_2}k$ sú harmonicky vpísané kužeľosečke k. Výsledok je nezávislý na voľbe ktoréhokoľvek zo štyroch párov pólov k. Výsledok je nezávislý na voľbe ktoréhokoľvek zo štyroch párov pólov ${}^iK{}^iK'$, pretože potom by musela každá ďalšia kužeľosečka ${}^{x_3}k$, harmonicky vpísaná kužeľosečke k mať jeden bod ${}^1K$ za vrchol polárneho trojuholníka. Ale sme zistili, že tejto podmienke vyhovujú iba dve kužeľosečky, preto žiadne iné kužeľosečky svázku Σ_1 nemôžu byť už harmonicky vpísané kužeľosečke k.

Keby existovaly tri kužeľosečky ${}^{x_1}k\,{}^{x_2}k\,{}^{x_3}k$ svázku Σ_1 harmonicky vpísané kužeľosečke k, potom by pólová kužeľosečka spojnice ${}^1K{}^1K'$ mala s kužeľosečkou k päť bodov spoločných a musela by s ňou splynúť. Potom musí byť kužeľosečka k opísaná spoločnému polárnemu trojuholníku kužeľosečiek svázku Σ_1 a každá kužeľosečka tohto svázku je harmonicky vpísaná kužeľosečke k.

Každému Bodu K, obrazu kužeľosečky k, odpovedá teda taká množina Bodov, ktorá má s ľubovoľnou Priamkou spoločné dva Body, alebo ju obsahuje celú. Týmto podmienkam vyhovuje iba istá nadplocha K_4^2.

Táto nadplocha musí obsahovať i plochu F_2^4, pretože kužeľosečka k je harmonicky opísaná každej kužeľosečke degenerujúcej v dvojnásobne počítanú priamku.

Je zrejmé, ak kužeľosečka k degeneruje vo dve priamky, dostávame z 2. vety vetu 1. ako špeciálny prípad; ak kužeľosečka k degeneruje na dvojnásobne počítanú priamku, dostávame:

Veta 3. *Všetky kužeľosečky, ktoré sa dotýkajú priamky t, zobrazujú sa na istú nadplochu 2. stupňa T_4^2, ktorá má singulárnu rovinu a tvoria ju priestory S_3 2. druhu.*

Dôkaz. Všetky kužeľosečky systému Ξ_4 o spoločnej tangente t dostaneme tak, že volíme dotykové body ^xT na tangente t; tangenta t s dotykovým bodom ^xT určuje kužeľosečky systému $^x\Sigma_3$, ktoré sa zobrazia na priestor $^xS_3$ 2. druhu. Všetky tieto priestory určia nadplochu T_4^2. Všetky systémy $^x\Sigma_3$ majú spoločný systém Σ_2 degenerovaných kužeľosečiek o spoločnej priamke t. Všetky priestory $^xS_3$ majú teda spoločnú rovinu 1. druhu. Bod T, ktorý je obrazom kužeľosečky degenerujúcej v dvojnásobne počítanú priamku t, leží tiež na nadploche T_4^2. Nadplochy T_4^2 a M_4^3 majú okrem plochy F_2^4 spoločný ešte systém rovín 2. druhu, ktoré sú spoločné priestorom $^xS_3$ a nadploche M_4^3.

Definícia 1. *O troch pároch konjugovaných pólov PP', QQ' a RR' hovoríme, že tvoria sdruženú trojicu, ak všetky body sú navzájom rôzne a $R \equiv (PQ' \times P'Q)$, $R' \equiv (PQ \times P'Q')$.*

Veta 4. *Kužeľosečky systému S, ktoré majú spoločné tri páry konjugovaných pólov PP', QQ', RR', ktoré netvoria sdruženú trojicu a pár konjugovaných polár tt', zobrazujú sa na Kužeľosečku, ležiacu na nadploche T_4^2.*

Dôkaz. Všetky obrazy kužeľosečiek, ktoré majú spoločný pár konjugovaných polár, ležia na nadploche T_4^2. Všetky obrazy kužeľosečiek o spoločných pároch konjugovaných pólov PP', QQ' a RR' ležia v istej rovine S_2. Prenik roviny S_2 s nadplochou T_4^2 je Kužeľosečka, ktorej Body sú obrazy kužeľosečiek systému S.

Predpokladajme, že rovina S_2 neleží ani v jednom z priestorov $^xS_3{}^xS_3'$ tvoriacich nadplochu T_4^2 a nemá ani s jedným z nich spoločnú Priamku. Tento prípad by mohol nastať len vtedy, ak by sa páry konjugovaných pólov PP', QQ', RR' premietaly z priesečníka priamok tt' jednou involúciou. Potom môže mať rovina S_2 s každým z priestorov $^xS_3$ spoločný iba jeden Bod ^xS_o, z ktorých ani jeden neleží na Priamke $'S_1$. Bodom ^xS_o a Priamkou $'S_1$ je určená rovina, ktorou prechádza jediný priestor S_3' a označme ho $^xS_3'$. Dostávame tak jednojednoznačnú príbuznosť

priestorov $^xS_3{}^xS_3'$, ktorej odpovedá jednojednoznačná príbuznosť pólov $^xT^xT'$ na priamkach $t't$. Z toho vyplýva, že poláry pólu ^oT vzhľadom na kužeľosečky systému S obaľujú kužeľosečku, ktorá sa dotýka priamok tt'.

Poznámka. Zaujímavým spôsobom dostaneme kužeľosečky, ktoré sa zobrazujú na ľubovoľnú Kužeľosečku v S_5. Pretože vieme, že každou Kužeľosečkou môžeme položiť zbortenú, ale nedegenerovanú plochu 2. stupňa, môžeme považovať Kužeľosečky za rezy týchto plôch. Zvoľme dva mimobežné rady Bodov $^1S_1{}^2S_1$ a určíme projektívny vzťah medzi Bodmi. Priamky $^1S_1$ a $^2S_1$. Spojnice odpovedajúcich si Bodov vyplnia regulus, ktorý leží v priestore S_3 určenom Mimobežkami $^1S_1{}^2S_1$. Priamkam $^1S_1{}^2S_1$ odpovedajú svázky $^1\Sigma_1{}^2\Sigma_1$, v ktorých sú si kužeľosečky navzájom projektívne priradené. Nech kužeľosečke ^1k_x odpovedá kužeľosečka ^2k_x. Na Body regulu sa zobrazia potom kužeľosečky všetkých svázkov určených vždy kužeľosečkami $^1k_x{}^2k_x$. Pritom je dôležité, že všetky takto skonštruované kužeľosečky patria systému Σ_3. Ak teraz určíme nejakú ľubovoľnú ďalšiu lineárnu podmienku pre kužeľosečky systému Σ_3, dostávame v každom zo svázkov určených kužeľosečkami $^1k_x{}^2k_x$ vždy jednu kužeľosečku. Všetky tieto kužeľosečky sa zobrazujú na Kužeľosečku v S_5.

Definícia 2. *Obálke polár ľubovoľného pólu vzhľadom na všetky kužeľosečky systému S budeme hovoriť polárna krivka tohto pólu.*

Veta 5. *Ak sa kužeľosečky systému S zobrazujú na Krivku n-tého stupňa, potom polárna krivka ľubovoľného pólu vzhľadom na kužeľosečky systému S je n-tej triedy.*

Dôkaz. Pól P a polára p je definovaná priestorom S_3 1. druhu, ktorý pretína plochu F_2^4 v Kužeľosečke K_1^2 a ešte v jednom Bode. Ak necháme pól P pevný a poláru p meníme, dostávame síce rôzne priestory S_3 1. druhu, ale všetky majú spoločnú Kužeľosečku K_1^2 a aj celú rovinu 2. druhu S_2, ktorá obsahuje Kužeľosečku K_1^2. Nech teraz kužeľosečky systému S sa zobrazia na Krivku L_1^n. Každý Bod ^xL na Krivke L_1^n spolu s rovinou S_2 určujú priestor $^xS_3$, ktorý vlastne reprezentuje poláru ^xp pólu P vzhľadom na kužeľosečku ^xl systému S. Keď sostrojíme všetky priestory $^xS_3$, vyplnia nám nadplochu K_4^n. Že nadplocha K_4^n je naozaj stupňa n zistíme tak, že ľubovoľnou Priamkou S_1 a rovinou S_2 určíme nadrovinu S_4, ktorá pretne Krivku L_1^n v n Bodoch. Zvoľme teraz k pólu P ľubovoľný konjugovaný pól P'. Sostrojme ďalej ľubovoľný svázok kužeľosečiek Σ_1, ktorý má pár bodov PP' za pár konjugovaných pólov. V tomto svázku existuje n kužeľosečiek, ktoré majú spoločné poláry s n, prípadne s viacerými kužeľosečkami systému S a bodom P' prechádza teda n polár pólu P. Pretože bod P je pevný a bod P' ľubovoľne volený, prechádza každým bodom n tangent k polárnej krivke pólu P vzhľadom na kužeľosečky systému S.

Ak Krivka K_1^n sa rozpadá v niekoľko Kriviek $K_1^{n_1} K_1^{n_2} \dots K_1^{n_m}$, kde

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n,$$

potom aj polárna krivka pólu P zrejme sa rozpadá v m kriviek tried $n_1, n_2, \dots n_m$.

Poznámka. Z tejto vety hneď vyplýva, že polárna krivka ľubovoľného bodu vzhľadom na kužeľosečky systému S (PP', QQ', RR', tt'), t. j. kužeľosečky, ktoré majú spoločné páry konjugovaných pólov PP', QQ', RR' a pár konjugovaných polár tt', je druhej triedy, teda kužeľosečka.

Definícia 3. *Ak systém kužeľosečiek S sa zobrazuje na Krivku K_1^n, hovoríme, že systém S je stupňa n.*

Veta 6. *Najobecnejší kvadratický systém kužeľosečiek je systém kužeľosečiek popísaný v poznámke k 4. vete.*

Dôkaz priamo vyplýva z toho, že tam udaná Kužeľosečka K_1^2 bola volená v priestore S_5 celkom ľubovoľne.

V súvislosti s kvadratickými systémami kužeľosečiek môžeme uviesť túto vetu.

Veta 7. *Každým Bodom T na ploche F_2^4 prechádza systém Kužeľosečiek, ktoré okrem Bodu T nemajú žiaden další Bod spoločný a vyplnia celú plochu F_2^4.*

Dôkaz: Nadplocha T_4^2, na ktorej ležia obrazy všetkých kužeľosečiek dotýkajúcich se priamky t, obsahuje i plochu F_2^4. Singulárna rovina nadplochy T_4^2 má s plochou F_2^4 spoločný Bod T. Každý priestor ${}^xS_3$ nadplochy T_4^2 má s plochou F_2^4 spoločnú Kužeľosečku ${}^xK_1^2$, ktorá prechádza Bodom T. Pretože nadplochu tvoria všetky priestory ${}^xS_3$, musia Kužeľosečky ${}^xK_1^2$ vyplniť plochu F_2^4.

Poznámka. Ak namiesto uvedenej nadplochy T_4^2 uvažujeme nadplochu T_4^2, na ktorú sa zobrazujú kužeľosečky, ktoré majú spoločný pár konjugovaných polár tt', dostávame podobnú vetu: Každými dvoma bodmi TT' na ploche F_2^4 prechádzajú dva systémy Kužeľosečiek, ktoré vyplnia celú plochu F_2^4. Dve Kužeľosečky tohože systému majú spoločné iba Body TT', dve Kužeľosečky rôznych systémov majú okrem Bodov TT' spoločný ešte jeden ďalší Bod.

Veta 8. *Dve nadplochy $T_4^2 U_4^2$ sa pretínajú vo variéte K_3^4, ktorú tvorí systém kvadratických zbortených plôch K_2^2. Variétou K_3^4 je obecne určená ešte jedna nadplocha V_4^2.*

Dôkaz. Uvažujme jeden systém priestorov ${}^xS_3$ na nadploche T_4^2. Každý priestor ${}^xS_3$ tohoto systému pretína nadplochu U_4^2 v zbortenej kvadratickej ploche ${}^xK_2^2$. Keď vyčerpáme všetky priestory ${}^xS_3$, dostaneme všetky plochy ${}^xK_2^2$, ktoré vytvoria variétu K_3^4. Variéta K_3^4 musí obsahovať plochu F_2^4, pretože táto plocha je spoločná nadplochám $T_4^2 U_4^2$. Nadplochy $T_4^2 U_4^2$ reprezentujú dva páry konjugovaných polár tt' a uu'. Obecne existuje ešte jeden pár konjugovaných polár vv', ktorý s pármi tt' a uu' tvorí sdruženú trojicu párov konjugovaných polár. Všetky kužeľosečky, ktoré majú páry tt' a uu' za páry konjugovaných polár, majú i pár vv' za pár konjugovaných polár. Tento je reprezentovaný nadplochou V_4^2, ktorá tiež obsahuje plochu F_2^4 a aj variétu K_3^4.

Poznámka 1. Dve nadplochy ${}^1T_4^2\,{}^2T_4^2$ reprezentujúce dva systémy kužeľosečiek dotýkajúcich sa tangent ${}^1t\,{}^2t$ pretínajú sa vo variéte K_3^4, ktorá obsahuje plochu F_2^4. Túto variétu môžeme skonštruovať alebo ako prenik obidvoch nadplôch ${}^1T_4^2\,{}^2T_4^2$, alebo tiež pomocou tejto úvahy: Všetky kužeľosečky dotýkajúce sa tangent ${}^1t\,{}^2t$ dostaneme tiež tak, že uvažujeme o svázkoch definovaných vždy degenerovanou kužeľosečkou ${}^{12}k$, složenou z tangent ${}^1t\,{}^2t$ a ľubovoľnou kužeľosečkou degenerujúcou v dvojnásobne počítanú priamku. Čiže variéta K_3^4 je kužeľ, ktorý dostaneme premietnutím plochy F_2^4 z Bodu ${}^{12}K$ na nadploche M_4^3. Je to vlastne len špeciálny prípad zobrazenia systému kužeľosečiek, dvojnásobne sa dotýkajúcich danej pravej kužeľosečky. Vtedy Bod K leží mimo nadplochy M_4^3.

Poznámka 2. Nadplocha T_4^2 sa dá skonštruovať tiež takto: Uvažujme rovinu S_2, ktorá reprezentuje degenerované kužeľosečky rozpadajúce vždy v tangentu t a každú inú priamku roviny. V tejto rovine existuje Bod T ako obraz kužeľosečky degenerujúcej v dvojnásobne počítanú priamku t. Bodom T je daný v rovine S_2 svázok Priamok ${}^xS_1$. Každá Priamka ${}^xS_1$ je obrazom svázku kužeľosečiek, ktoré degenerujú v priamku t a ďalšiu priamku prechádzajúcu bodom ${}^xT$ na priamke t. Bodom T na ploche F_2^4 prechádza systém Kužeľosečiek. Tieto Kužeľosečky ležia v rovinách ${}^xS_2$ prechádzajúcich Priamkami ${}^xS_1$ roviny S_2. Každá rovina ${}^xS_2$ s rovinou S_2 určuje priestor ${}^xS_3$. Všetky priestory ${}^xS_3$ vyplňujú nadkvadriku T_4^2.

Variétu K_3^4 môžeme sostrojiť aj takto: Uvažujme nadkvadriky $T_4^2\,T_4^{2\prime}$: dostávame tak dve singulárne roviny $S_2 S_2'$ a priestory ${}^xS_3\,{}^xS_3'$, určené vždy rovinami $S_2 S_2'$ a ${}^xS_2\,{}^xS_2'$. Roviny $S_2 S_2'$ a ${}^xS_2\,{}^xS_2'$ majú spoločný vždy jeden Bod. Preto ľubovoľný priestor ${}^xS_3$ pretína ľubovoľný priestor ${}^xS_3'$ v Priamke, ktorá prechádza priesečníkom rovín $S_2 S_2'$

a preto priestor ${}^{x}S_3$ pretína nadkvadriku $T_4^{2'}$ v kvadratickom kuželi. Pretože jeho vrchol nie je závislý na voľbe priestoru ${}^{x}S_3$, pretínajú sa nadplochy $T_4^2 T_4^{2'}$ v sústave kvadratických kužeľov, ktoré majú spoločný vrchol v priesečníku rovín $S_2 S_2'$.

Veta 9. *Systém kužeľosečiek S (PP', QQ', tt', uu') sa zobrazuje na Krivku K_1^4, ktorá leží na istej kvadratickej zbortenej ploche K_2^2.*

Dôkaz. Všetky kužeľosečky, ktoré majú spoločné dva páry konjugovaných polár tt' a uu', sa zobrazujú na variétu K_3^4 z predchádzajúcej vety. Všetky kužeľosečky, ktoré majú spoločné dva páry konjugovaných pólov, sa zobrazujú na istý priestor S_3. Prenik priestoru S_3 s variétou K_3^4 môžeme dostať týmto spôsobom: Uvažujme systém priestorov ${}^{x}S_3$ ako pri dôkaze predchádzajúcej vety. Priestor S_3 má s každým z týchto priestorov spoločnú Priamku ${}^{x}S_1$ a na nej dva Body ${}^{x}S_0{}^{x}S_0'$ v priesečníkoch s kvadrikou ${}^{x}K_2^2$. Priamky ${}^{x}S_1$ vytvoria regulus v priestore S_3 a Body ${}^{x}S_0{}^{x}S_0'$ Krivku K_1^4 na tomto regulu. Keď nadplocha T_4^2 obsahuje druhý systém priestorov ${}^{x}S_3'$, vytvoria Priamky ${}^{x}S_1'$ druhý systém Priamok na kvadrike K_2^2.

Veta 10. *U systému S (P, Q, t, u) rozpadá sa Krivka K_1^4 vo dve Kužeľosečky.*

Dôkaz. Nájdeme také dve Priamky ${}^{x_1}S_1{}^{x_2}S_1$, na ktorých existuje vždy len jeden Bod ${}^{x_1}S_0{}^{x_2}S_0$. Priestory ${}^{x}S_3$ reprezentujú kužeľosečky dotýkajúce sa priamky t v bode ${}^{x}T$. Uvažujme bod ${}^{x_0}T \equiv (t\,.\,u)$. Kužeľosečka systému S prechádzajúca bodom ${}^{x_1}T$ musí degenerovať, lebo má v tom bode dve rôzne tangenty t, u. Ďalej musí prechádzať bodmi PQ. Taká je len jedna. Z toho vyplýva, že na Priamke ${}^{x_1}S_1$ existuje len jeden Bod ${}^{x_1}S_0$. Ďalej uvažujme Bod ${}^{x_2}T$, v ktorom pretína spojnica PQ tangentu t. Týmto bodom môže prechádzať tiež len degenerovaná kužeľosečka systému S, lebo spojnica PQ pretína túto kužeľosečku v troch bodoch ${}^{x_2}TPQ$. A zas existuje taká len jedna. Čiže i na Priamke ${}^{x_2}S_1$ existuje len jeden Bod ${}^{x_2}S_0$. Z toho ale vyplýva, že Krivka K_1^4 na kvadrike K_2^2 má dva dvojné Body ${}^{x_1}S_0{}^{x_2}S_0$, teda sa rozpadá vo dve Kužeľosečky ${}^{1}K_1^2\,{}^{2}K_1^2$. Potom systém S (P, Q, t, u) sa rozpadá vo dva kvadratické systémy kužeľosečiek.

Veta 11. *Tri nadplochy $T_4^2 U_4^2 V_4^2$ pretínajú sa v ploche K_2^8, ktorá sa rozpadá v plochu F_2^4 a plochu K_2^4. Obecne existuje celý systém plôch ${}^{x}W_4^2$, ktoré prechádzajú plochou K_2^8.*

Dôkaz: Nadplochy $T_4^2 U_4^2$ sa pretínajú vo variéte K_3^4. Nadplocha V_4^2 pretína variétu K_3^4 v ploche K_2^8, ktorá musí obsahovať plochu F_2^4. Preto sa musí rozpadnúť v plochu F_2^4 a v plochu K_2^4. Podľa 8. vety

k nadplochám $T_4^2 U_4^2$ existuje obecne ešte jedna nadplocha ${}^{1}W_4^2$, ktorá má spoločný prenik s nadplochami $T_4^2 U_4^2$. Rôznymi kombináciami nadplôch $T_4^2 U_4^2 V_4^2\,{}^{1}W_4^2$ a nadplôch takto vzniklých dostávame systém nadplôch ${}^{x}W_4^2$, ktoré všetky majú spoločnú plochu K_2^8.

Priamym dôsledkom tejto vety je, že systém kužeľosečiek S (PP', tt', uu', vv') je, odhliadnuc od kužeľosečiek degenerujúcich v dvojnásobne počítané priamky prechádzajúce bodmi PP', 4. stupňa. Polárna krivka ľubovoľného bodu sa rozpadá vo dva svázky priamok o vrcholoch v bodoch PP' a v krivku 2. stupňa.

LITERATÚRA

Bertini E., *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*, Wien 1924.

Durell C. V., *Projective Geometry*, London 1945.

Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme* (Encyklopädie der math. Wissenschaften, III, 2, 1.).

ВЫВОДЫ

В статье рассматривается отображение конических сечений данной плоскости на точках пятимерного пространства. Сначала приведены основные свойства этого отображения. Затем рассматривается отображение четырёхпараметрической квадратической системы конических сечений. В качестве примера приведено отображение системы конических сечений определенной тремя парами сопряженных полюсов и одной парой сопряженных поляр. Главным результатом является 5 положение: Если конические сечения системы S изображаются на точках кривой n-ого порядка, то полярная кривая любой точки в отношении к коническим сечениям системы S является кривой n-ого класса. На основании этого положения составлена общая однопараметрическая квадратическая система конических сечений. Из остальных систем рассматриваются системы, принадлежащие двум или трем квадратическим четырехпараметрическим системам и удовлетворяют еще некоторым линейным условиям. Приведено также несколько конструкций многообразий, на которых эти системы отображаются.