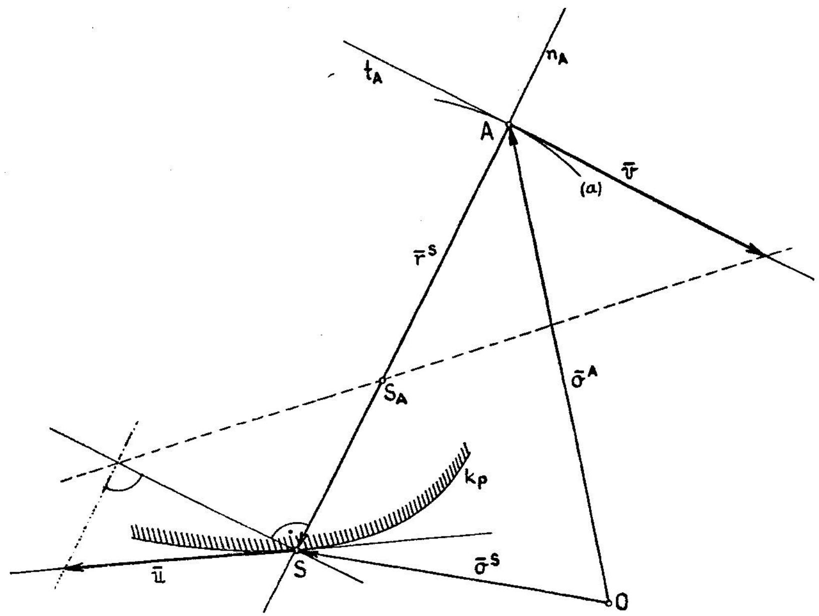
JOZEF KOVÁČ

PRÍSPEVOK K DÔKAZU HARTMANNOVEJ VETY

Hartmannova veta hovorí: Spojnica koncového bodu kolmého priemetu vektora postupovej rýchlosti $\bar{u}$ okamžitého stredu otáčania S po pevnej poloide k_p, do kolmice v bode S na normálu n_A dráhy (a) ľubovoľného bodu A nepremennej rovinnej sústavy Σ pri jej pohybe v rovine, s koncovým bodom vektora rýchlosti $\bar{v}$ bodu A, pretína normálu n_A v strede krivosti S_A dráhy bodu A (obr. 1).



Obr. 1.

Zvoľme v rovine nákresnej Σ_o bod O a polohové vektory ľubovoľného bodu A a okamžitého stredu otáčania S pohybujúcej sa nepremennej rovinnej sústavy Σ v jej určitej okamžitej polohe označme $\bar{o}^A = \overrightarrow{OA}$, $\bar{o}^S = \overrightarrow{OS}$. Je potom

$$\bar{o}^S = \bar{o}^A + \bar{r}^S, \tag{1}$$

kde $\bar{r}^S = \overrightarrow{AS}$ je polohový vektor bodu S vzhľadom na bod A (obr. 1).

Deriváciou rovnice (1) podľa času,

$$\dot{\bar{o}}^S = \dot{\bar{o}}^A + \dot{\bar{r}}^S,$$

$$\bar{u} = \bar{v} + \dot{\bar{r}}^S, \tag{2}$$

dostávame vektor postupovej rýchlosti $\bar{u}$ okamžitého stredu otáčania S po pevnej poloide; pričom $\dot{\bar{o}}^A = \bar{v}$ je vektor rýchlosti bodu A.

Vektor uhlovej rýchlosti sústavy Σ označme $\bar{\omega}$. Vektor rýchlosti $\bar{v}$ bodu A môžeme písať

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{3}$$

kde $\bar{r} = \overrightarrow{SA}$ je polohový vektor bodu A vzhľadom na okamžitý stred otáčania S a je $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{AS}$, čiže

$$\bar{r} = -\bar{r}^S. \tag{4}$$

Po dosadení zo (4) do rovnice (3) dostávame

$$\bar{v} = \bar{r}^S \times \bar{\omega}. \tag{5}$$

Vynásobme rovnicu (5) vektorove vektorom $\bar{\omega}$:

$$\bar{v} \times \bar{\omega} = (\bar{r}^S \times \bar{\omega}) \times \bar{\omega}. \tag{6}$$

Pravú stranu relácie (6) môžeme písať

$$(\bar{r}^S \times \bar{\omega}) \times \bar{\omega} = (\bar{r}^S \,.\, \bar{\omega})\, \bar{\omega} - (\bar{\omega} \,.\, \bar{\omega})\, \bar{r}^S,$$

a pretože uhol sovretý vektormi $\bar{\omega}$ a $\bar{r}^S$ je $\frac{\pi}{2}$, je

$$(\bar{r}^S \,.\, \bar{\omega})\, \bar{\omega} = \bar{0},$$

čiže

$$(\bar{r}^S \times \bar{\omega}) \times \bar{\omega} = -\omega^2\, \bar{r}^S. \tag{7}$$

Po dosadení zo (7) do rovnice (6) je

$$\bar{v} \times \bar{\omega} = -\omega^2\, \bar{r}^S,$$

z čoho

$$\bar{r}^S = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}}{\omega^2}. \tag{8}$$

Preveďme deriváciu rovnice (8) podľa času

$$\dot{\bar{r}}^S = \frac{\mathrm{d}\,\bar{r}^S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\bar{\omega} \times \bar{v}}{\omega^2}\right)}{\mathrm{d}t},$$

$$\dot{\bar{r}}^S = (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{v} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{v}})\frac{1}{\omega^2} + (\bar{\omega} \times \bar{v})\,\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\mathrm{d}t} =$$

$$= (\bar{\varepsilon} \times \bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{a})\frac{1}{\omega^2} + (\bar{\omega} \times \bar{v})\left(-\frac{2\varepsilon}{\omega^3}\right) =$$

$$= \frac{\bar{\omega} \times \bar{a}}{\omega^2} + \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{v}}{\omega^2} - \frac{2\varepsilon}{\omega^3}(\bar{\omega} \times \bar{v}).$$

Po úprave je

$$\dot{\bar{r}}^S = \frac{\bar{\omega} \times \bar{a}}{\omega^2} + \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\omega^2} - \frac{2\varepsilon\bar{\omega}}{\omega^3}\right) \times \bar{v}, \tag{9}$$

kde $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$ je vektor uhlového zrýchlenia sústavy Σ a $\dot{\bar{v}} = \bar{a}$ je vektor zrýchlenia bodu A.

Zaveďme jednotkový vektor $\bar{k}$ orientovaný súhlasne rovnobežne s vektorom $\bar{\omega}$. Vektor uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}$ a vektor uhlového zrýchlenia $\bar{\varepsilon}$, ktoré sú na rovinu Σ_0 kolmé, môžeme potom písať

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}, \tag{10}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k}. \tag{11}$$

Dosadením výrazov (10) a (11) do rovnice (9) dostávame

$$\dot{\bar{r}}^S = \frac{\omega(\bar{k} \times \bar{a})}{\omega^2} + \left(\frac{\varepsilon\bar{k}}{\omega^2} - \frac{2\varepsilon\omega\bar{k}}{\omega^3}\right) \times \bar{v},$$

$$\dot{\bar{r}}^S = \frac{\bar{k} \times \bar{a}}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega^2}(\bar{k} \times \bar{v}). \tag{12}$$

Rovnicu (2) môžeme potom písať

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{\bar{k} \times \bar{a}}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega^2}(\bar{k} \times \bar{v}). \tag{13}$$

V druhom člene pravej strany rovnice (13) rozložme vektor zrýchlenia $\bar{a}$ bodu A v složku normálnu a tangenciálnu

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_t. \tag{14}$$

Rovnica (13) je potom

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{\bar{k} \times (\bar{a}_n + \bar{a}_t)}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega^2}(\bar{k} \times \bar{v}),$$

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{\bar{k} \times \bar{a}_n}{\omega} + \frac{1}{\omega}\left[\bar{k} \times \bar{a}_t - \frac{\varepsilon}{\omega}(\bar{k} \times \bar{v})\right]. \tag{15}$$

Pretože uhol sovretý vektormi $\bar{v}$ a $\bar{a}_n$ je $\frac{\pi}{2}$, je vektor $\bar{k} \times \bar{a}_n$ rovnobežný s vektorom $\bar{v}$, čiže s tangentou dráhy bodu A. Vektory $\bar{v}$

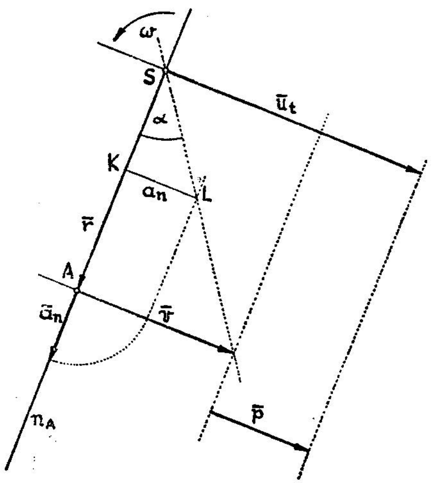
a $\bar{a}_t$ sú tiež rovnobežné s tangentou dráhy bodu A a preto vektory $\bar{k} \times \bar{v}$ a $\bar{k} \times \bar{a}_t$ sú rovnobežné s normálou dráhy bodu A. Previedli sme teda rozklad vektora postupovej rýchlosti $\bar{u}$ okamžitého stredu otáčania S po pevnej poloide do dvoch vzájomne kolmých vektorových složiek, z ktorých jedna je rovnobežná s tangentou a druhá s normálou dráhy bodu A

$$\bar{u} = \bar{u}_t + \bar{u}_n , \tag{16}$$

$$\bar{u}_t = \bar{v} + \frac{\bar{k} \times \bar{a}_n}{\omega} , \tag{17}$$

$$\bar{u}_n = \frac{1}{\omega} \left[\bar{k} \times \bar{a}_t - \frac{\varepsilon}{\omega} (\bar{k} \times \bar{v}) \right] . \tag{18}$$

Keď poznáme vektor rýchlosti $\bar{v}$, vektor normálneho zrýchlenia $\bar{a}_n$ bodu A a okamžitý stred otáčania S sústavy Σ, môžeme sostrojiť tangenciálnu vektorovú složku $\bar{u}_t$ vektora postupovej rýchlosti $\bar{u}$ okamžitého stredu otáčania S po pevnej poloide (obr. 2).



Obr. 2.

Druhý člen pravej strany rovnice (17) označme

$$\bar{p} = \frac{\bar{k} \times \bar{a}_n}{\omega} . \tag{19}$$

Absolútna hodnota vektora $\bar{p}$, pretože uhol sovretý vektormi $\bar{k}$ a $\bar{a}_n$ je $\frac{\pi}{2}$, je

$$|\bar{p}| = \frac{|\bar{a}_n|}{\omega} , \tag{20}$$

z čoho absolútna hodnota vektora uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}$ je

$$\omega = \frac{|\bar{a}_n|}{|\bar{p}|} . \tag{21}$$

Z rovnice (3) absolútna hodnota vektora rýchlosti $\bar{v}$ bodu A, pretože uhol sovretý vektormi $\bar{\omega}$ a $\bar{r}$ je $\frac{\pi}{2}$, je

$$|\bar{v}| = \omega |\bar{r}| , \tag{22}$$

z čoho absolútna hodnota vektora uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}$ je

$$\omega = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{r}|} = \operatorname{tg} \alpha . \tag{23}$$

Porovnaním rovníc (21) a (23) dostávame

$$\frac{|\bar{v}|}{|\bar{r}|} = \frac{|\bar{a}_n|}{|\bar{p}|} = \operatorname{tg} \alpha \tag{24}$$

a absolútnu hodnotu vektora $\bar{p}$ sostrojíme ako priľahlú odvesnu pravouhlého trojuholníka SKL. Orientáciu vektora $\bar{p}$ určuje rovnica (19).

Tangenciálna vektorová složka $\bar{u}_t$ podľa rovnice (17) je potom

$$\bar{u}_t = \bar{v} + \bar{p} . \tag{25}$$

Zaveďme vektor $\bar{\tau}$ kolmý na rovinu Σ_0

$$\bar{\tau} = \tau \bar{k} \tag{26}$$

tak, aby platila relácia

$$\bar{v} = \bar{\tau} \times \bar{\varrho} , \tag{27}$$

kde $\bar{v}$ je vektor rýchlosti bodu A a $\bar{\varrho} = \overrightarrow{S_A A}$ je polohový vektor bodu A vzhľadom na stred krivosti S_A dráhy bodu A.

Absolútna hodnota vektora rýchlosti $\bar{v}$ bodu A, pretože uhol sovretý vektormi $\bar{\tau}$ a $\bar{\varrho}$ je $\frac{\pi}{2}$, je

$$|\bar{v}| = |\bar{\tau}| \, |\bar{\varrho}| . \tag{28}$$

Vektor normálneho zrýchlenia $\bar{a}_n$ bodu A môžeme potom písať

$$\bar{a}_n = \bar{\tau} \times (\bar{\tau} \times \bar{\varrho}) = - \tau^2 \bar{\varrho} \tag{29}$$

a keď jednotkový vektor rovnobežný s normálou dráhy bodu A a orientovaný súhlasne s vektorom $\bar{\varrho}$ označíme $\bar{n}$, je

$$\bar{a}_n = - \tau^2 |\bar{\varrho}| \, \bar{n} . \tag{30}$$

Po dosadení z (23), (28), (30) do rovnice (19) dostávame

$$\bar{p} = \frac{|\bar{r}|}{|\bar{v}|}(\bar{k}\times\bar{a}_n) = -\frac{\tau^2|\bar{\varrho}||\bar{r}|}{|\bar{\tau}||\bar{\varrho}|}(\bar{k}\times\bar{n}) = -|\bar{\tau}||\bar{r}|(\bar{k}\times\bar{n}). \qquad (31)$$

Podľa relácií (3) a (27) je

$$\bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{\tau}\times\bar{\varrho}$$

a teda, keď vektory $\bar{r}$ a $\bar{\varrho}$ sú rovnako orientované, sú aj vektory $\bar{\omega}$ a $\bar{\tau}$ súhlasnej orientácie, resp. keď vektory $\bar{r}$ a $\bar{\varrho}$ sú opačnej orientácie, je aj vzájomná orientácia vektorov $\bar{\omega}$ a $\bar{\tau}$ opačná, podľa toho, či body S_A a S ležia na tejže strane od bodu A alebo na stranách opačných. V prípade súhlasnej orientácie vektorov $\bar{r}$ a $\bar{\varrho}$ a teda aj vektorov $\bar{\omega}$ a $\bar{\tau}$ je

$$|\bar{\tau}|\bar{k} = \bar{\tau}; \qquad |\bar{r}|\bar{n} = \bar{r}, \qquad (32\text{a, b})$$

resp. keď vektory $\bar{r}$ a $\bar{\varrho}$ a teda aj vektory $\bar{\omega}$ a $\bar{\tau}$ sú vzájomne opačnej orientácie, je

$$|\bar{\tau}|\bar{k} = -\bar{\tau}; \qquad |\bar{r}|\bar{n} = -\bar{r}, \qquad (33\text{a, b})$$

takže v obidvoch prípadoch, keď dosadíme (32a, b), resp. (33a, b) do rovnice (31), dostávame

$$\bar{p} = -(\bar{\tau}\times\bar{r}). \qquad (34)$$

Rovnica (17) po dosadení z (27) a (34) je

$$\bar{u}_t = \bar{\tau}\times\bar{\varrho} - (\bar{\tau}\times\bar{r}),$$
$$\bar{u}_t = \bar{\tau}\times(\bar{\varrho} - \bar{r}), \qquad (35)$$

a keď rozdiel vektorov druhého činiteľa pravej strany tejto rovnice označíme

$$\bar{\varrho} - \bar{r} = \overrightarrow{S_A A} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{S_A A} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S_A S} = \bar{\sigma}, \qquad (36)$$

dostávame

$$\bar{u}_t = \bar{\tau}\times\bar{\sigma}. \qquad (37)$$

Absolútna hodnota vektora $\bar{u}_t$, pretože uhol sovretý vektormi $\bar{\tau}$ a $\bar{\sigma}$ je $\frac{\pi}{2}$, je

$$|\bar{u}_t| = |\bar{\tau}||\bar{\sigma}|. \qquad (38)$$

Porovnaním relácií (27) a (37), resp. absolútnych hodnôt vektorov $\bar{v}$ a $\bar{u}_t$ z rovníc (28) a (38), dostávame

$$|\bar{\tau}| = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{\varrho}|} = \frac{|\bar{u}_t|}{|\bar{\sigma}|} = \operatorname{tg}\beta, \qquad (39)$$

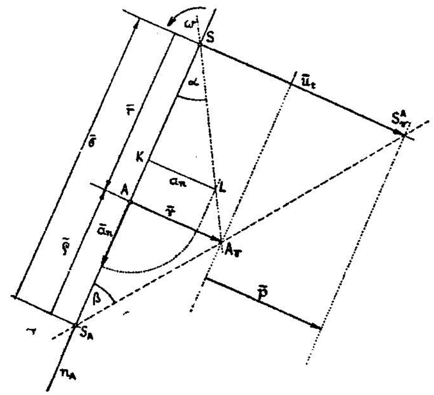
a keď dosadíme za $|\bar{\varrho}| = \overline{S_A A}$ a $|\bar{\sigma}| = \overline{S_A S}$, je

$$|\bar{v}| : \overline{S_A A} = |\bar{u}_t| : \overline{S_A S}. \qquad (40)$$

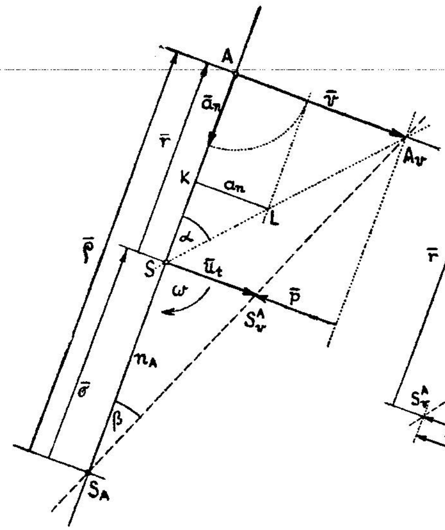
Keď označíme vektory $\bar{v} = \overrightarrow{AA_v}$ a $\bar{u}_t = \overrightarrow{SS_v^A}$ (obr. 3, 4, 5), potom spojnica koncových bodov $\overline{A_v S_v^A}$ vektorov $\bar{v}$ a $\bar{u}_t$ pretína v každom prípade normálu dráhy bodu A v strede krivosti S_A dráhy bodu A, pretože podľa (40) trojuholníky

$$\triangle S_A A A_v \sim \triangle S_A S S_v^A$$

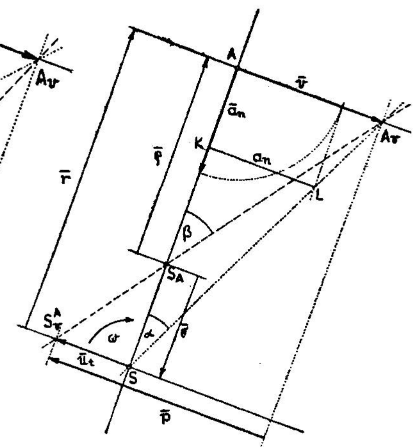
sú podobné a tým je platnosť *Hartmannovej vety* dokázaná.



Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.

LITERATÚRA

Beyer R., *Technische Kinematik*, Leipzig 1931.

Došlo 20. mája 1951.

Ústav deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ВЫВОДЫ

В статье методом векторного анализа доказывается теорема Гартманна которой пользуются для простого построения центра кривизны траектории точки неизменной системы при ее движении в плоскости.