MATEMATICKO-FYZIKALNY SBORNÍK

Roč. I., čís. 2, 3, 4.

JÁN JAKUBÍK

JEDNOZNAČNOSŤ ROZKLADU SVÄZU NA DIREKTNÝ SÚČIN

Venované s. prof. Dr. J. Hroncovi k 70. narodeninám.

Pre čiastočne usporiadané systémy platí veta: Nech čiastočne usporiadaný systém S má najmenší a najväčší prvok. Ak sa S dá rozložiť na direktný súčin nerozložiteľných faktorov, je tento rozklad jednoznačný. Existujú čiastočne usporiadané systémy, nemajúce najmenší a najväčší prvok, ktorých rozklad na nerozložiteľné faktory nie je jednoznačný.[1]

Pre špeciálny prípad, keď S je sväz, majúci najmenší a najväčší prvok, dokázal túto vetu G. Birkhoff[2]. Zároveň G. Birkhoff[3] položil problém: vyšetriť, či jednoznačnosť rozkladu platí alebo neplatí pre sväzy obecne (aj bez predpokladu existencie najmenšieho a najväčšieho prvku).

Dokážeme, že odpoveď na Birkhoffov problém je kladná. Pritom pôvodný Birkhoffov problém zovšeobecníme v tom, že budeme uvažovať aj rozklady, v ktorých počet direktných faktorov môže byť nekonečný.

Najprv stručne uvedieme základné definície.

Definícia 1. Nech L_ι, $\iota \in \mathfrak{M}$ je systém sväzov. Priraďme každému indexu $\iota \in \mathfrak{M}$ nejaký prvok $x^\iota \in L_\iota$. Dostávame množinu dvojíc $\{(\iota, x^\iota)\} = x$. Pritom $x^\iota \in L_\iota$ a pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$ existuje presne jedna taká dvojica $(\iota, x^\iota) \in x$, pre ktorú platí $\iota = \alpha$. Kvôli stručnému označeniu budeme množinu dvojíc $x = \{(\iota, x^\iota)\}$ označovať symbolom $x = \{x^\iota\}$. Systém všetkých takýchto množín označme $\prod_\iota L_\iota = L$. Nech $x_1 = \{x_1^\iota\}$, $x_2 = \{x_2^\iota\}$, $x_1, x_2 \in L$. Definujeme v L operácie $x_1 \cap x_2$, $x_1 \cup x_2$ rovnicami $x_1 \cap x_2 = \{x_1^\iota \cap x_2^\iota\}$, $x_1 \cup x_2 = \{x_1^\iota \cup x_2^\iota\}$. Množina L s takýmito operáciami je zrejme sväz. Nazývame ho direktným súčinom sväzov L_ι. Sväzy L_ι voláme faktormi direktného súčinu.

---

[1] Junji Hashimoto, *On the product decomposition of partially ordered sets*, Math. Japonicae, 1, 1948. Referát v Math. Rewiews, January 1950.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, II. Ed., Theorem 2, 9, Cor. 1.

[3] Porov. pozn. 2, problém 11.

Budeme písať $L \simeq L'$, ak sväzy L, L' sú izomorfné. Ak v izomorfizme $L \simeq L'$ (i) prvky $x \in L$, $x' \in L'$ sú si navzájom priradené, píšeme $x \longleftrightarrow x'$.

Definícia 2. Ak $L \simeq \prod_\iota L_\iota$ (i) hovoríme, že izomorfizmus (i) určuje rozklad sväzu L na direktný súčin $\prod_\iota L_\iota$. Ak prvku $x \in L$ je priradený prvok $\{x^\iota\} \in \prod_\iota L_\iota$, nazývame x^ι priemetom prvku x do sväzu L_ι v rozklade (i). Ak $M \subset L$, nazývame priemetom množiny M do L_ι (vzhľadom na rozklad (i)) množinu všetkých priemetov prvkov $x \in M$ do sväzu L_ι. Priemet prvku x do L_ι budeme označovať $[x]_{L_\iota}$, priemet množiny M do L_ι označujeme $[M]_{L_\iota}$.

Lemma 1. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \prod_\iota L_\iota$. Označme $[X]_{L_\alpha} = X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{M}$. Potom X_α je konvexný podsväz sväzu L_α.*

Dôkaz. a) Nech $x_1^\alpha \in X_\alpha$, $x_2^\alpha \in X_\alpha$. Potom existujú prvky $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ také, že ich priemety do L_α sú x_1^α resp. x_2^α. Keďže $x_1 \cap x_2 \in X$, $x_1 \cup x_2 \in X$, platí $x_1^\alpha \cap x_2^\alpha = [x_1 \cap x_2]_{L_\alpha} \in X_\alpha$, $x_1^\alpha \cup x_2^\alpha = [x_1 \cup x_2]_{L_\alpha} \in X_\alpha$.

b) Nech $x_1^\alpha \in X_\alpha$, $x_2^\alpha \in X_\alpha$, $z^\alpha \in L_\alpha$, $x_1^\alpha \leq z^\alpha \leq x_2^\alpha$. Potom existujú prvky $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ také, že $[x_1]_{L_\alpha} = x_1^\alpha$, $[x_2]_{L_\alpha} = x_2^\alpha$. Sostrojme prvok $z_1 = \{z_1^\iota\} \in L$ takto: $z_1^\iota = [x_1]_{L_\iota}$, ak $\iota \neq \alpha$, $z_1^\alpha = z^\alpha$. Zrejme platí $x_1 \cap x_2 \leq z_1 \leq x_1 \cup x_2$, teda $z_1 \in X$, $z_1^\alpha = z^\alpha \in X_\alpha$.

Lemma 2. *Nech $L = \prod_\iota L_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$. Predpokladajme, že $\mathfrak{M}$ obsahuje viac ako jeden prvok. Nech $a \in L$, $a = \{a^\iota\}$, a nech systém prvkov $M = \{x_\iota\}$, $x_\iota \in L$ má nasledujúcu vlastnosť: $[x_\iota]_{L_\alpha} = a^\alpha$ pre $\alpha \neq \iota$ a pre každé $\iota \in \mathfrak{M}$. Potom existujú prvky $\bigcap_\iota x_\iota$, $\bigcup_\iota x_\iota$ a pri označení $[x_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$ platí*

$$\bigcap_\iota x_\iota = \{a^\iota \cap x^\iota\}, \quad \bigcup_\iota x_\iota = \{a^\iota \cup x^\iota\}.$$

Dôkaz. Označme $\{a^\iota \cup x^\iota\} = \xi$. Zrejme platí pre každé ι a každé α $[x_\iota]_{L_\alpha} \leq x^\alpha \cup a^\alpha = [\xi]_{L_\alpha}$, teda $x_\iota \leq \xi$. Predpokladajme, že pre nejaký prvok $\eta \in L$ platí $x_\iota \leq \eta$ pre všetky $\iota \in \mathfrak{M}$.

Nech $\eta = \{\eta^\iota\}$. Teda $[x_\iota]_{L_\alpha} \leq [\eta]_{L_\alpha}$ pre všetky $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\iota \in \mathfrak{M}$. Ak $\alpha = \iota$, dostávame z predchádzajúcej nerovnosti $x^\iota \leq \eta^\iota$. Ak $\alpha \neq \iota$, dostávame $a^\alpha \leq \eta^\alpha$ pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$. Vždy teda platí $x^\iota \cup a^\iota \leq \eta^\iota$, takže $\xi \leq \eta$. Tým je dokázané tvrdenie pre $\bigcup_\iota x_\iota$. Dôkaz pre $\bigcap_\iota x_\iota$ je duálny.

Lemma 3. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \prod_\iota L_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, nech $a \in X$, $x \in X$, $a = \{a^\iota\}$, $x = \{x^\iota\}$. Nech α je ľubovoľný index z množiny $\mathfrak{M}$. Utvorme prvok $y \in L$ tak, že $[y]_{L_\alpha} = x^\alpha$, $[y]_{L_\iota} = a^\iota$, pre $\iota \neq \alpha$. Tvrdíme: $y \in X$.*

Dôkaz. Prvky $a \cup x = \{a^\iota \cup x^\iota\}$, $a \cap x = \{a^\iota \cap x^\iota\}$ ležia v X. Zrejme platí $[a \cap x]_{L_\iota} \leq [y]_{L_\iota} \leq [a \cup x]_{L_\iota}$ pre každé $\iota \in \mathfrak{M}$, teda $a \cap x \leq y \leq a \cup x$. Z toho plynie $y \in X$.

Lemma 4. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \prod L_\iota$, nech X_ι je priemet sväzu X do L_ι. Potom $X = \prod_\iota X_\iota$.*

Dôkaz. a) Označme $\prod_\iota X_\iota = Y$. X a Y sú podsväzy sväzu L. Stačí teda dokázať, že množiny X a Y sú si rovné. Nech $x = \{x^\iota\} \in X$. Potom $x^\iota \in X_\iota$, takže $x \in Y$. Dostávame množinovú nerovnosť $X \subset Y$.

b) Nech $y = \{x^\iota\} \in Y$, potom $x^\iota \in X_\iota$ a z definície množiny X_ι vyplýva, že existujú prvky $x_\iota \in X$ také, že pre každé ι platí $[x_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$.

Nech $a = \{a^\iota\}$ je ľubovoľný prvok podsväzu X. Ku každému x_ι sostrojme $u_\iota \in L$ takto: $[u_\iota]_{L_\alpha} = a^\alpha$ pre $\alpha \neq \iota$, $[u_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$. Podľa lemmy 3 $u_\iota \in X$. Podľa lemmy 2 ležia aj prvky $\xi = \{x^\iota \cap a^\iota\}$, $\eta = \{x^\iota \cup a^\iota\}$ v množine X. Zrejme $\xi \leq y \leq \eta$, teda $y \in X$. Dostali sme množinovú nerovnosť $Y \subset X$, čo spolu s a) dáva $X = Y$.

Definícia 3. Nech $L \simeq \prod_\iota L_\iota (i)$, $u \in L$. Nech $M_\alpha \subset L_\alpha$. Sostrojme podmnožinu $M_\alpha(u)$ sväzu L [vzhľadom k rozkladu (i)] takto: prvok $x \in L$ je prvkom množiny $M_\alpha(u)$ vtedy a len vtedy, keď

$$1) \quad [x]_{L_\alpha} \in M_\alpha, \qquad 2) \quad [x]_{L_\iota} = [u]_{L_\iota} \text{ pre } \alpha \neq \iota.$$

Poznámka. Z predchádzajúcej definície vyplýva bezprostredne: 1. množina $L_\iota(u)$ je konvexný podsväz sväzu L. 2. Nech $x = \{x^\iota\}$, $x \in M_\alpha(u)$, t. j. $x^\alpha \in M_\alpha$. Potom jednojednoznačné priradenie $x \longleftrightarrow x^\alpha$ určuje izomorfizmus čiastočne usporiadaných systémov M_α a $M_\alpha(u)$.

Lemma 5. *Nech $L \simeq \prod_\iota A_\iota$, (i_1), $\iota \in \mathfrak{M}$ a súčasne $L \simeq \prod_\nu B_\nu$ (i_2), $\nu \in \mathfrak{N}$. Nech $u \in L$. Sostrojme množinu $A_\alpha(u)$ [vzhľadom k izomorfizmu (i_1)]. Priemet množiny $A_\alpha(u)$ do B_β [vzhľadom k izomorfizmu (i_2)] označme A_α^β. Sostrojme množiny $A_\alpha^\beta(u)$, $B_\beta(u)$ [vzhľadom k izomorfizmu (i_2)]. Potom platí následujúca množinová rovnosť:*

$$A_\alpha^\beta(u) = A_\alpha(u) \cap B_\beta(u).$$

Dôkaz. a) Označme $A_\alpha(u) \cap B_\beta(u)$ znakom X[4]. Nech $x \in A_\alpha^\beta(u)$. Zrejme platí $A_\alpha^\beta \subset B_\beta$, teda $A_\alpha^\beta(u) \subset B_\beta(u)$. Z toho plynie $x \in B_\beta(u)$. Z predpokladu $x \in A_\alpha^\beta(u)$ dostávame ďalej, že existuje prvok $z \in A_\alpha(u)$ taký, že $[x]_{B_\beta} = [z]_{B_\beta}$.

Nech v izomorfizme (i_2) $u \longleftrightarrow \{u^\nu\}$, $z = \{z^\nu\}$, $x = \{x^\nu\}$. Z predchádzajúceho plynie: $x^\nu = u^\nu$ pre $\nu \neq \beta$, $x^\beta = z^\beta$.

---

[4] Množina X je neprázdna, keďže $u \in X$.

Zrejme $u \in A_\alpha(u)$. Sostrojme prvky $\xi = u \cap z$, $\eta = u \cup z$. Keďže pre každý index $\nu \in \mathfrak{N}$ platí $[\xi]_{B_\nu} \leq [x]_{B_\nu} \leq [\eta]_{B_\nu}$, dostávame $\xi \leq x \leq \eta$. Podľa lemmy 1 a poznámky za definíciou 3 je množina $A_\alpha(u)$ konvexným podsväzom sväzu L, teda prvky ξ, η, x patria do $A_\alpha(u)$. Zistili sme: $x \in A_\alpha(u) \cap B_\beta(u) = X$, teda $A_\alpha^\beta(u) \subset X$.

b) Nech $x \in X$. Teda $x \in A_\alpha(u)$, $[x]_{B_\beta} \in [A_\alpha(u)]_{B_\beta} = A_\alpha^\beta$. Ďalej, keďže $x \in B_\beta(u)$, platí $[x]_{B_\nu} = [u]_{B_\nu}$ pre $\nu \neq \beta$. Teda podľa definície 3 $x \in A_\alpha^\beta(u)$. Dostávame $X \subset A_\alpha^\beta(u)$. Úhrnne podľa a) máme rovnosť $X = A_\alpha^\beta(u)$.

Poznámka. Podľa predchádzajúcej lemmy a lemmy 4 dostávame $A_\alpha \simeq \prod_\nu A_\alpha^\nu(u)$. Ak definujeme analogickým spôsobom $B_\beta^\alpha(u)$, platí $B_\beta \simeq \prod_\iota B_\beta^\iota(u)$. Pritom je podľa predchádzajúcej lemmy $B_\beta^\alpha(u) = A_\alpha^\beta(u)$.

Poznámka. Ak $L \simeq \prod_\iota L_\iota$ a ak všetky L_ι okrem najviac jedného (napr. L_1) obsahujú jediný prvok, je zrejme $L \simeq L_1$. Je teda prirodzená nasledujúca definícia:

Definícia 4. Hovoríme, že sväz L je nerozložiteľný, ak z izomorfizmu $L \simeq \prod_\iota L_\iota$ vyplýva, že existuje najviac jeden taký faktor L_ι, ktorý obsahuje viac ako jeden prvok.

Veta. *Nech $L \simeq \prod_\iota A_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, $L \simeq \prod_\nu B_\nu$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Nech každý faktor A_ι, B_ν obsahuje viac ako jeden prvok a nech sú všetky tieto faktory nerozložiteľné. Potom existuje jednojednoznačné zobrazenie množiny $\mathfrak{M}$ na množinu $\mathfrak{N}$, ktoré má túto vlastnosť: ak sa prvok $\alpha \in \mathfrak{M}$ zobrazí na prvok $\beta \in \mathfrak{N}$, potom sú sväzy A_α, B_β izomorfné.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady, uvedené vo vete. Podľa poznámky za lemmou 5 môžeme písať pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{N}$:

$$A_\alpha \simeq \prod_\nu A_\alpha^\nu(u), \qquad B_\beta \simeq \prod_\iota B_\beta^\iota(u),$$

pričom $A_\alpha^\nu(u) = B_\nu^\alpha(u)$. Keďže sväz A_α je nerozložiteľný a má viac ako jeden prvok, existuje presne jeden taký sväz $A_\alpha^\nu(u)$ [označme ho $A_\alpha^\beta(u)$], ktorý má viac ako jeden prvok. Potom $A_\alpha \simeq A_\alpha^\beta(u)$. Prvku $\alpha \in \mathfrak{M}$ priraďme prvok $\beta \in \mathfrak{N}$.

Ak by sa pri takomto zobrazení aj prvok $\alpha_1 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_1 \neq \alpha$ zobrazil na prvok β, vystupovaly by v rozklade sväzu B_β aspoň dva faktory, a to $B_\beta^\alpha(u) = A_\alpha^\beta(u)$ a $B_\beta^{\alpha_1}(u) = A_{\alpha_1}^\beta(u)$, z ktorých každý by obsahoval viac ako jeden prvok. To je v rozpore s predpokladom o nerozložiteľnosti sväzu B_β. Z toho plynie ďalej $B_\beta \simeq B_\beta^\alpha(u) \simeq A_\alpha$.

Nech $\beta_1 \in \mathfrak{N}$. Keďže sväz B_{β_1} obsahuje viac ako jeden prvok a je nerozložiteľný, musí v jeho rozklade vystupovať presne jeden faktor, ktorý obsahuje viac ako jeden prvok. Označme tento faktor $B_{\beta_1}^{\alpha_1}(u)$. Podľa lemmy 5 platí $B_{\beta_1}^{\alpha_1}(u) = B_{\alpha_1}^{\beta_1}(u)$. Keďže $B_{\alpha_1}^{\beta_1}(u)$ má viac ako jeden prvok, index $\alpha_1 \in \mathfrak{M}$ sa zobrazí na index $\beta_1 \in \mathfrak{N}$. Teda každý prvok $\beta \in \mathfrak{N}$ má pri uvedenom zobrazení vzor v $\mathfrak{M}$. Previedli sme dôkaz, že zobrazenie má všetky vlastnosti, vyslovené v predchádzajúcej vete. Tým je dôkaz jednoznačnosti rozkladu sväzu na nerozložiteľné faktory vykonaný.

ВЫВОДЫ

Г. Биркгоф доказал однозначность разложения в прямое произведение для структур, в которых находятся самый больший и самый меньший элементы. В монографии „Lattice theory" Биркгоф положил проблему: имеет-ли место теорема об однозначности разложения для всех структур. В настоящей работе мы даем положительный ответ на проблему Биркгофа. При этом мы обобщаем теорему в том смысле, что мы допускаем разложения, имеющие бесконечное число факторов.

Мы будем употреблять следующие определения и обозначения: если $L \simeq \prod\limits_{\iota} L_\iota$ (i) и если в изоморфизме (i) $x \longleftrightarrow \{x^\iota\}$, $x \in L$, $\{x^\iota\} \in \prod\limits_{\iota} L_\iota$, $x^\iota \in L_\iota$, то мы будем называть элемент x^ι проекцией x на структуру L_ι и писать $x^\iota = (x)_{L_\iota}$. Если $M \subset L$, то множество всех проекций элементов $x \in M$ на L_ι обозначаем $[M]_{L_\iota}$. Заметим, что слово проекция употребляем относительно изоморфизма (i). Если $u \in L$, $M_\alpha \subset L_\alpha$, определим множество $M_\alpha(u)$ следующим образом: $x \in M_\alpha(u)$ тогда и только тогда, если 1. $[x]_{L_\alpha} \in M_\alpha$, 2. $[x]_\iota = [u]_{L_\iota}$ для $\iota \neq \alpha$. Очевидно, что частично упорядоченные множества M_α, $M_\alpha(u)$ изоморфны.

Основная теорема: Пусть $L \simeq \prod A_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, $L \simeq \prod B_\nu$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Пусть в каждом множестве A_ι, B_ν находится более чем один елемент и пусть все факторы A_ι, B_ν неразложимы. То существует взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{N}$ обладающие следующим свойством: если $\beta \in \mathfrak{N}$ — образ элемента $\alpha \in \mathfrak{M}$, то структуры A_α, B_β изоморфны.

Доказательство основной теоремы опирается на следующие леммы:

1. Естои X — конвексная подструктура структуры $L = \prod L_\iota$, то $[X]_{L_\iota}$ — конвексная подструктура структуры L_ι (лемма 1). 2. Имеет место изоморфизм $X \simeq \prod [X]_{L_\iota}$ (лемма 4). 3. Теорема об однозначности разложения вытекает без трудностей из следующей леммы 5: Пусть $L \simeq \prod A_\iota$, (i_1), $L \simeq \prod B_\iota (i_2)$. Построим множество $A_\alpha(u)$ [относительно (i_2)]. Проекцию $A_\alpha(u)$ на B_β [относительно (i_2)] обозначим $A_\alpha{}^\beta$. Построим множества $A_\alpha{}^\beta(u)$, $B_\beta(u)$ [относительно (i_2)]. Имеет место равенство $A_\alpha{}^\beta(u) = A_\alpha(u) \cap B_\beta(u)$.