

VLADIMÍR HAJKO

DISKONTINUITY NA CHARAKTERISTIKÁCH A REZONANČNÝCH KRIVKÁCH OSCILAČNÝCH OKRUHOV S CIEVKOU SO ŽELEZNYM JADROM

Riešenie problému tzv. pseudoharmonických oscilácií, ktoré vznikajú v oscilačných okruhoch s cievkou so železným jadrom, pri zachovaní úplnej obečnosti problému, dosiaľ nie je vykonané. Jestvuje však viac riešení približných, a to alebo početných¹ alebo grafických², ktoré sú v dost dobrej shode s experimentom. Tento príspevok chceme podať ako doplnok Schunckovej a Zenneckovej metódy³ riešenia uvedeného problému. Podávame súčasne aj vysvetlenie vzniku diskontinuit na charakteristikách a rezonančných krivkách takýchto okruhov.

I.

Schunckova a Zenneckova metóda riešenia problému pseudoharmonických oscilácií, ktorej dost dobrú shodu s experimentom potvrdili Casper, Hubmann a Zenneck⁴, vyzerať takto:

Máme oscilačný okruh (obr. 1), pozostávajúci z ohmického odporu R , kapacity C a cievky so železným jadrom, ktorému je vnutená strieďavá elektromotorická sila

$$e = E \sin(\omega t + \varphi).$$

Rovnica tohto okruhu je

$$iR + \frac{1}{C} \int i dt + z \frac{d\Phi}{dt} = e, \quad (1)$$

¹ Martienssen, *Physikalische Zeitschrift* II, 448—460, 1910.

Schunck a Zenneck, *Jahrb. der drahtlos. Telegr. u. Telegraph.* 19, 170—194, 1922.

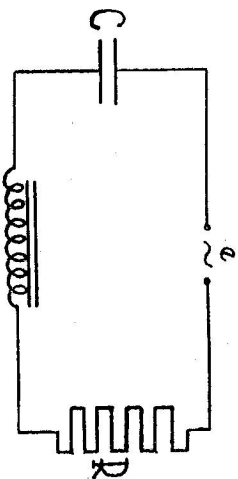
² Lehr, *Schwingungstechnik*, II, 336—367, Berlin 1934.

³ Kalantarov, Neiman, *Teoretič. osnovy elektrotechniki*, II, 254—264, Moskva-Leningrad 1948.

⁴ Porov, pozn. 1.

⁵ Casper, Hubmann, Zenneck, *Jahrb. d. drahtlos. Telegr.*, 63—77, 1924.

kde i je prúd prechádzajúci okruhom, z počet závitov cievky a Φ celkový magnetický indukčný tok prierezom cievky, ktorý nie je priamo úmerný intenzite prúdu, ako v prípade cievky bez železného jadra, ale je komplikovanejšou funkciou prúdu, resp. aj jeho závislosti od času.



Obr. 1.

Pre riešenie uvedené okruhu zavádzajú Schunck a Zenneck predpoklady:

$$1. \text{ Prúd v okruhu je tvaru sinusového a dá sa vyjadriť vzťahom} \quad (2)$$

$$i = J \sin \omega t.$$

2. Závislosť indukčného toku Φ prierezom cievky na intenzite magnetizujúceho prúdu vyjadruje vzorec

$$\Phi = A_0 \operatorname{arctg} \frac{z^2 i}{S} + B_0 \frac{z^2 i}{S}, \quad (3)$$

kde A_0, B_0, S sú konštanty a z počet závitov cievky.

3. Okrem strát hysterézy, ktorých zanedbanie je obsažené už v predpoklade 2., zanedbávajú sa aj straty spôsobené vírivými prúdmi. Pri týchto predpokladoch môžeme rovnicu (1) prepísať na tvar

$$iR + \frac{1}{C} \int i dt + (L_e + L_a) \frac{di}{dt} = e, \quad (4)$$

$$\text{kde } L_e = \frac{z^2 B_0}{S} \text{ a } L_a = \frac{L_0}{1 + \left(\frac{z^2 A_0}{S}\right)^2}, \text{ pričom } L_0 = \frac{z^2 A_0}{S}.$$

Výraz $L = L_e + L_a$ možno nazvať koeficientom samoindukcie cievky so železným jadrom, ktorý však vzhľadom na to, že L_a je funkciou i , teraz už nie je veličinou konštantnou. Vsaďením výrazu (2) do rovnice (4) dostávame ďalej

$$JR \sin \omega t + \left[\omega (L_e + L_a) - \frac{1}{\omega C} \right] J \cos \omega t = E \sin (\omega t + \varphi). \quad (5)$$

$$\text{Vyšetrujeme výraz } L_a \cos \omega t = \frac{L_0 \cos \omega t}{1 + \left(\frac{z^2 J}{S} \sin \omega t\right)^2}. \quad (6)$$

Výraz (6) je periodickou funkciou času. Možno ho teda vyjadriť Fourierovým radom

$$L_a \cos \omega t = \frac{L_0 \cos \omega t}{1 + \left(\frac{z^2 J}{S} \sin \omega t\right)^2} = L_0 \left[p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n \omega t + q_n \sin n \omega t) \right].$$

Obmedzíme sa len na prvé 3 členy Fourierovho radu s koeficientmi p_0, p_1 a q_1 . Výpočtom zistíme, že $p_0 = 0, q_1 = 0, a$

$$p_1 = \frac{2}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1),$$

kde $a = \frac{z^2 J}{S}$. Je teda

$$L_a \cos \omega t = L_0 p_1 \cos \omega t$$

$$\text{a ďalej } L_a = L_0 p_1 = \frac{2 L_0}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1). \quad (7)$$

Výraz (7) hovorí, že L_a je funkciou len amplitúdy intenzity prúdu.

Koeficient samoindukcie cievky so železným jadrom je daný potom vzťahom

$$L = L_e + L_a = \frac{z^2 B_0}{S} + \frac{2 L_0}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1). \quad (8)$$

Pretože je L funkciou len amplitúdy intenzity prúdu, vyplýva z rovnice (5) pre túto amplitúdu, J , a amplitúdu napätia, E , jednoduchý vzťah

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad 9$$

kde však J vystupuje aj v L .

Rovnica (9) umožňuje zostrojiť krivky závislosti intenzity prúdu od napätia, resp. od vnútornej kruhovej frekvencie. Pri zostrojení týchto kriviek podľa rovnice (9) musíme však postupovať obrátene, a to tak, že k určitej hodnote intenzity prúdu hľadáme príslušnú hodnotu napätia, resp. príslušné hodnoty kruhovej frekvencie.

Schunck a Zenneck použili túto metódu vo svojej práci na vyšetrovanie vlastností okruhu (obr. 2), ktorého ohmický odpor je $R = 5 \Omega$,

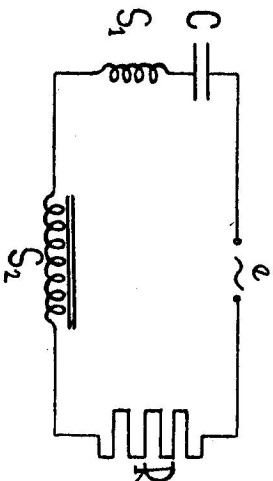
kapacita $C = 0,1 \mu F$, cievka bez železného jadra S_1 má koeficient samoindukcie $L_1 = 0,2533 \cdot 10^{-3} H$ a magnetický indukčný tok železným jadrom v cievke S_2 je v závislosti na intenzite prúdu daný vzťahom

$$\Phi = \left(8700 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{i}{100} + 183 \frac{i}{100} \right) M$$

kde i je prúd v ampéroch a M znamená jeden maxwell. Je teda v (3)

$$\frac{z}{S} = \frac{1}{100} A^{-1}, B_o = 183 M \text{ a } A_o = 8700 M, \text{ takže}$$

$$\frac{L_e}{L_o} = \frac{B_o}{A_o} = \frac{183}{8700}. \quad (10)$$



Obr. 2.

Rezonancia v okruhu pre minimálne hodnoty amplitúdy intenzity prúdu, kedy $L_e = L_o$, nastala pri frekvencii

$$\nu_o = 10\,000/\operatorname{sec} \quad (\omega_o = 2\pi \cdot 10^4/\operatorname{sec}).$$

Z toho vyplýva

$$\omega_o (L_1 + L_e + L_o) = \frac{1}{\omega_o C} = 159,15 \Omega. \quad (11)$$

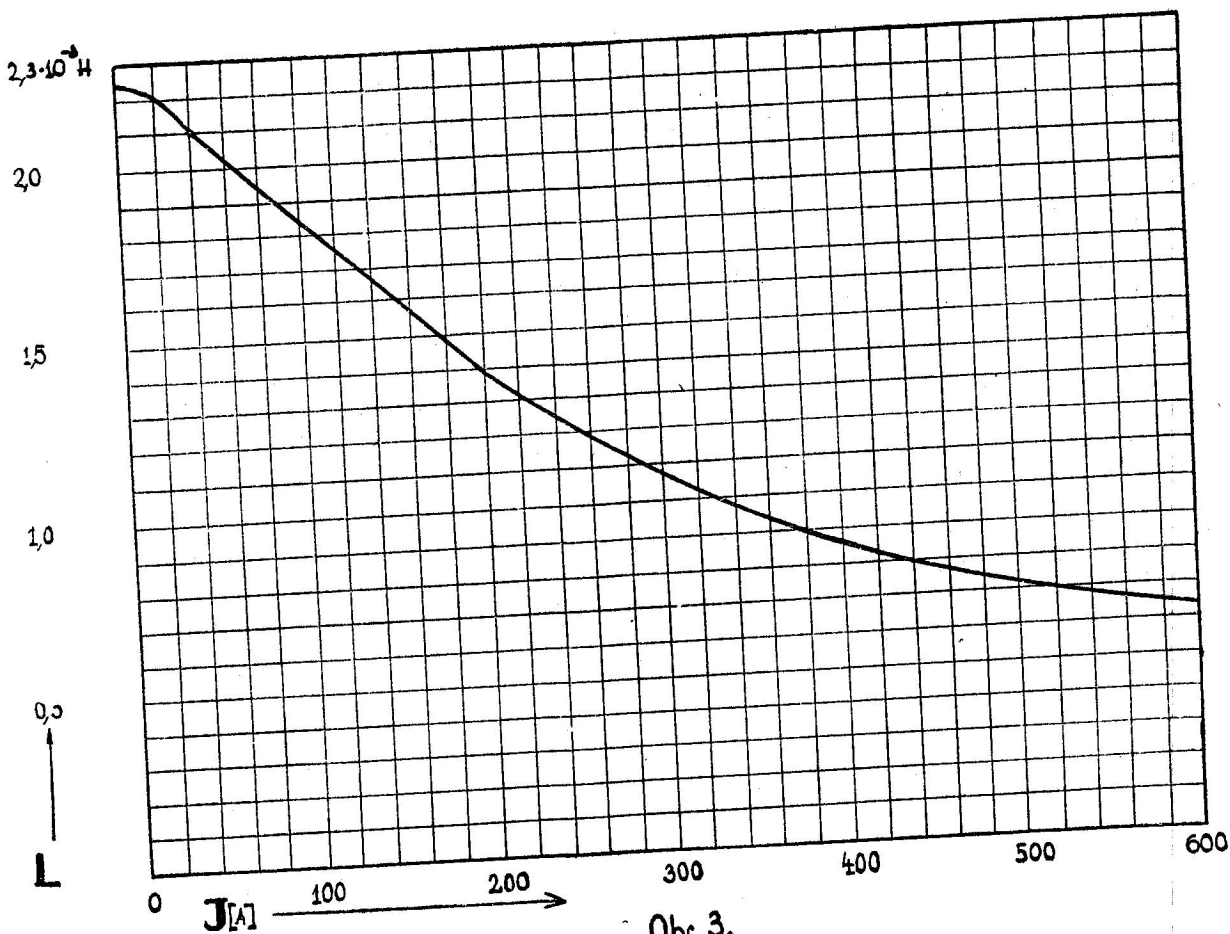
Zo vzťahov (10) a (11) je možno určiť L_e a L_o , a to

$$L_e = 4,6963 \cdot 10^{-5} H, \quad L_o = 2,2327 \cdot 10^{-3} H.$$

Celkový koeficient samoindukcie okruhu je potom daný vzťahom

$$L = L_1 + L_e + L_o = 0,3003 \cdot 10^{-3} H + \frac{4,4654 \cdot 10^{-3} H}{\left(\frac{J}{100} \right)^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{J}{100} \right)^2} - 1 \right)$$

a grafický obraz závislosti celkového koeficientu samoindukcie okruhu na amplitúde intenzity prúdu je znázornený na obr. 3.



Obr. 3.

Charakteristika okruhu, t. j. závislosť amplitúdy prúdu od amplitúdy vnúteného napätia pri kruhovej frekvencii $\omega = 2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4/\text{sec}$, vypočítaná podľa rovnice (9), je znázornená na obr. 4. Rezonančná krivka okruhu, t. j. závislosť amplitúdy prúdu od kruhovej frekvencie vnúteného napätia pri amplitúde vnúteného napätia $E = 1200$ V, vypočítaná tiež podľa rovnice (9), je znázornená na obr. 5.

Experimentálne sa zistilo, že časti kriviek, vyjadrujúcich uvedené závislosti, narysované čiarkovane, sú nerealizovateľné a intenzita prúdu pri hodnotách napätia E_1 (pri stúpačacom E) a E_2 (pri klesajúcom E) (obr. 4), resp. pri kruhových frekvenciách ω_1 (pri stúpačacom ω) a ω_2 (pri klesajúcom ω) (obr. 5), sa *diskontinuitne* mení.

II.

Z uvedeného je zrejmé, že Schunck a Zenneck hľadali tvar charakteristík a rezonančných kriviek v podstate skusmo. V ďalšom ukážeme, že je možné kvantitatívne aj kvalitatívne vyšetrovať charakteristiky a rezonančné krivky oscilačných okruhov s cievkou so železným jadrom aj metódou priamou.

Krivka závislosti koeficientu samoindukcie cievky so železným jadrom (obr. 3) od amplitúdy prúdu je takého tvaru, že ju možno s veľkou presnosťou vyjadriť analyticky vzťahom

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2}, \quad (12)$$

kde α , β , γ sú konštanty, závislé od geometrického tvaru a počtu závitov cievky ako aj od rozmerov a akosti železného jadra.

Ak teda položíme do rovnice (9) za L výraz (12), dostávame po úprave rovnicu tvaru

$$A_1 J^6 + (A_2 - B_1 E^2) J^4 + (A_3 - B_2 E^2) J^2 - B_3 E^2 = 0, \quad (13)$$

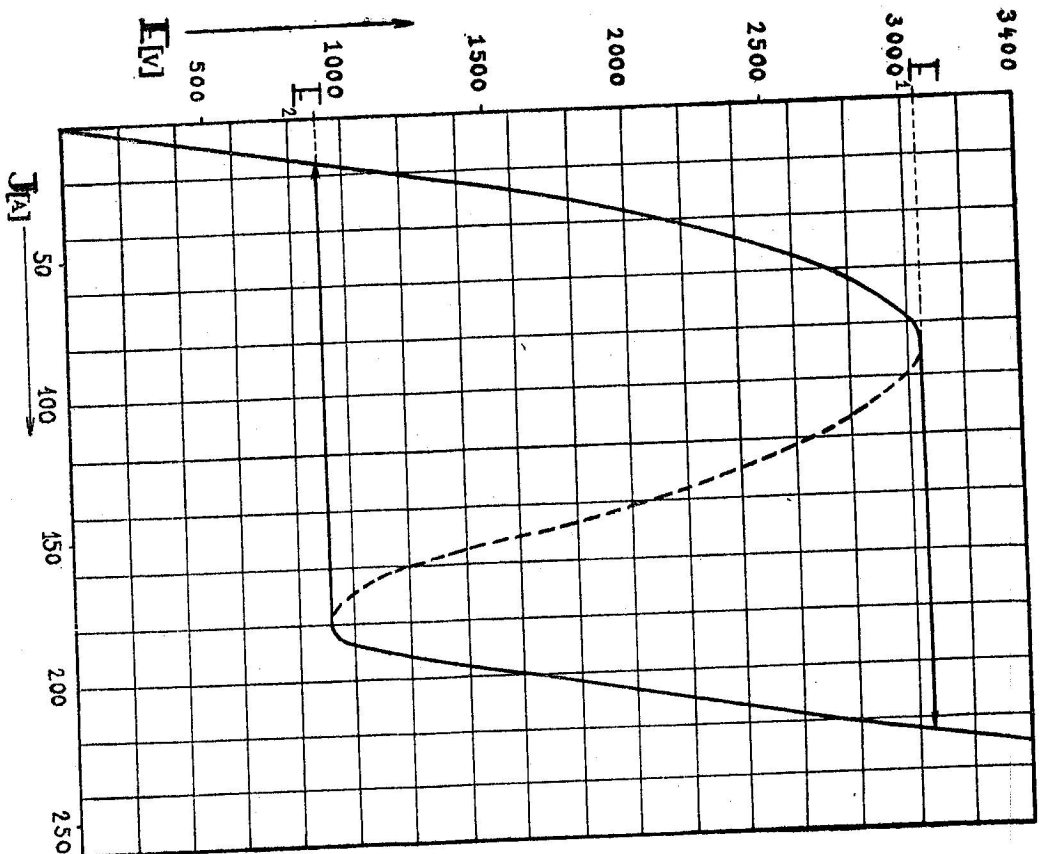
kde

$$A_1 = \omega^4 C^2 \alpha^2 \gamma^2 + \omega^2 (\gamma^2 R^2 C^2 - 2\alpha\gamma^2 C) + \gamma^2,$$

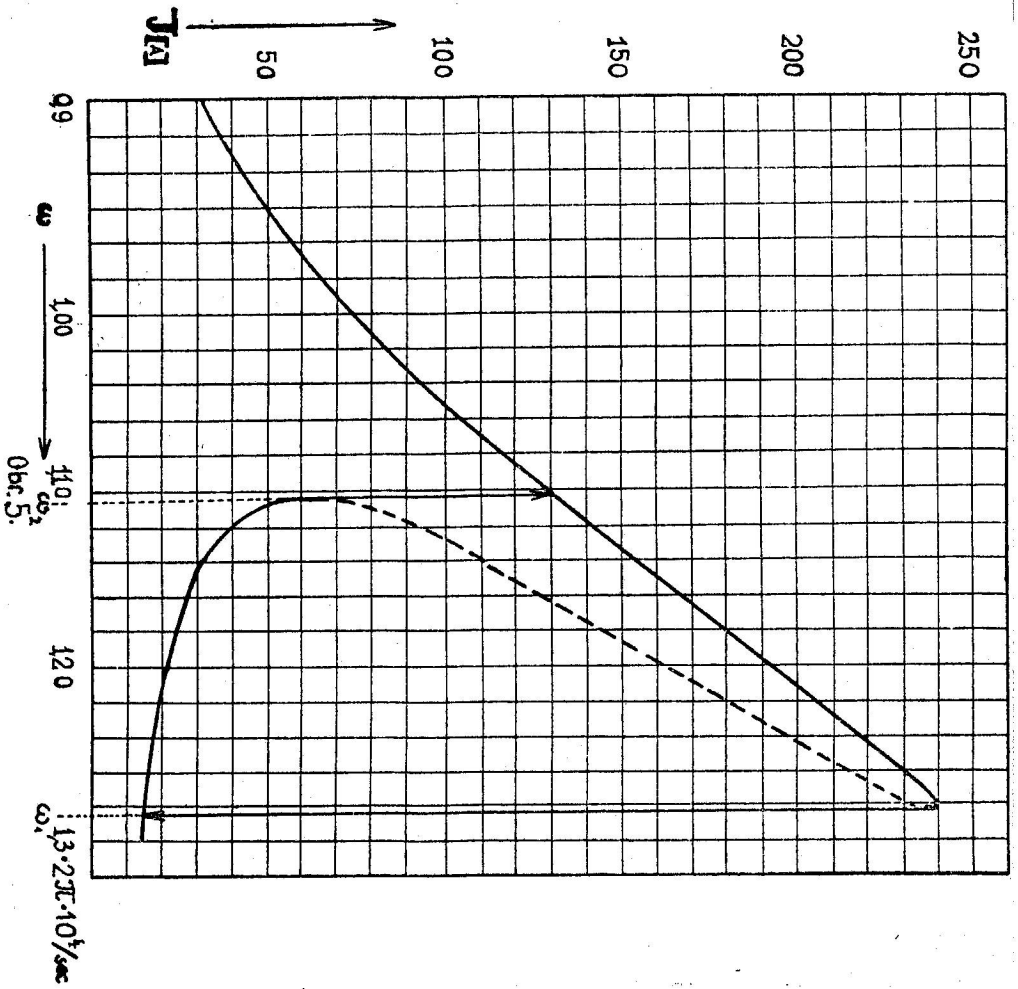
$$A_2 = \omega^4 (2\alpha\beta\gamma C^2 + 2\gamma\alpha^2 C^2) + \omega^2 (2\gamma R^2 C^2 - 4\alpha\gamma C - 2\beta\gamma C) + 2\gamma,$$

$$A_3 = \omega^4 (C^2 \alpha^2 + 2\alpha\beta C^2 + C^2 \beta^2) + \omega^2 (R^2 C^2 - 2\alpha C - 2\beta C) + 1,$$

$$B_1 = \omega^3 C^2 \gamma^2, \quad B_2 = 2\omega^2 \gamma C^2, \quad B_3 = \omega^2 C^2.$$



Obr. 4.



Rovnica (13) je kubickou rovnicou pre J^2 . Jej koeficienty sú funkciami odporu R , kapacity C , amplitúdy vnutného napätia E ako aj vnutenej kruhovej frekvencie ω . Obsahuje teda táto rovnica v sebe analytické vyjadrenie závislosti amplitúdy prúdu J od vnutného napätia E ako aj od kruhovej frekvencie ω . Tvar rovnice (13) umožňuje aj vysvetliť vznik diskontinuity na charakteristikách, resp. rezonančných krivkách.

Koeficienty rovnice (13) môžu sa pri konštantných a vhodných hodnotách R , C , ω meniť s vnutným napätím E tak, že pre napätia E , spadajúce do určitého intervalu $< E_1$, $E_2 >$ poskytuje rovnica (13) pre J^2 tri reálne kladné korene. To znamená, že hodnotám napätia z tohto intervalu odpovedajú tri hodnoty prúdu a že teda charakteristika má tvar podľa obr. 4, čo z rovnice (9) zrejme nebolo možno predvídať. Diskontinuity vznikajú práve pri hraničných hodnotách intervalu E_1 a E_2 . Podobne pri konštantných a vhodných hodnotách R , C a E môžu sa koeficienty rovnice (13) v závislosti od ω meniť tak, že pre určité hodnoty ω z intervalu $< \omega_1$, $\omega_2 >$ poskytuje rovnica (13) pre J^2 opäť tri reálne kladné korene. To znamená, že hodnotám kruhovej frekvencie z uvedeného intervalu odpovedajú tri hodnoty intenzity prúdu a rezonančná krivka má tvar podľa obr. 5, čo opäť z rovnice (9) nebolo možno predvídať. Rovnica (13) hovorí však aj to, že diskontinuity na charakteristikách, resp. rezonančných krivkách nemusia nevyhnutne vzniknúť a ako to vyplýva z meraní Caspera, Hubmanna a Zennecka⁴, ani vždy nevznikajú. Ak totiž koeficienty rovnice (13) sa pri konštantných hodnotách R , C , ω , resp. R , C , E menia v závislosti od E , resp. od ω tak, že rovnica (13) neposkytuje pre J^2 pri nijakej hodnote E , resp. ω tri reálne kladné korene, potom na charakteristike, resp. rezonančnej krivke príslušného okruhu diskontinuity nevznikajú.

Na základe tvaru koeficientov rovnice (13) je možno predpokladať, že diskontinuity môžu vzniknúť aj na krivkách, vyjadrujúcich závislosť prúdu od kapacity, C , resp. odporu, R , okruhu pri konštantných a vhodných hodnotách E , ω , R resp. E , ω , C . Ako vyplýva z meraní Rouelleových⁵, diskontinuity na krivkách, vyjadrujúcich uvedené závislosti, skutočne aj za vhodných podmienok vznikajú.

⁵ Rouelle, *Revue generale de l'electricité*, 1934 (24. nov., 1. et 8. dec.).

V miestach charakteristiky, kde sa intenzita prúdu mení skokom, platí

$$\frac{dE}{dJ} = 0.$$

Kedže diskontinuity na charakteristikách vznikajú pri konečných a nenulových hodnotách napätia, resp. prúdu, platí tiež

$$\frac{dE^2}{dJ^2} = \frac{E dE}{J dJ} = 0. \quad (14)$$

Z rovnice (13) vyplýva

$$E^2 = \frac{A_1 y^2 + A_2 y^2 + A_3 y}{B_1 y^2 + B_2 y + B_3}, \quad (15)$$

keď sme položili $y = J^2$. Derivovaním vzťahu (15) podľa y dostávame po úprave

$$\frac{dE^2}{dy} = \frac{A_1 B_1 y^4 + 2A_1 B_2 y^3 + (A_2 B_1 + 3A_1 B_2 - A_3 B_1) y^2 + 2A_2 B_2 y + A_3 B_2}{(B_1 y^2 + B_2 y + B_3)^2}. \quad (16)$$

V miestach charakteristiky, v ktorých sa intenzita prúdu mení skokom, musí teda s ohľadom na (14) a (16) platiť rovnica

$$A_1 B_1 y^4 + 2A_1 B_2 y^3 + (A_2 B_1 + 3A_1 B_2 - A_3 B_1) y^2 + 2A_2 B_2 y + A_3 B_2 = 0. \quad (17)$$

Táto rovnica nám umožňuje vypočítať prúd a jeho vrsadením do vzťahu (15), napätia, pri ktorých vznikajú diskontinuity na charakteristikách.

Riešime teraz použitím rovnice (13) Schunckom a Zenneckom vyšetruovaný okruh podľa obr. 2. Koefficienty α, β, γ vzťahu (12) pre závislosť koefficientu samoindukcie od amplitúdy prúdu tohto okruhu (obr. 3) v časti, na ktorej okruh pracuje, majú hodnoty

$$\alpha = 1,0869 \cdot 10^{-3} \text{ H}, \quad \beta = 1,4486 \cdot 10^{-3} \text{ H}, \quad \gamma = 3,5903 \cdot 10^{-5} \text{ A}^{-2}$$

a rovnica (13) pre tento okruh je

$$\begin{aligned} J^6 [& \omega^4 \cdot 15,9280 \cdot 10^{-30} - \omega^2 \cdot 27,9884 \cdot 10^{-30} + 12,8900 \cdot 10^{-10}] + \\ & + J^4 [\omega^4 \cdot 19,7938 \cdot 10^{-25} - \omega^2 (25,9933 \cdot 10^{-15} + 12,8900 \cdot 10^{-24} E^2) + \\ & + 7,1806 \cdot 10^{-5}] + \\ & - 1 \cdot 10^{-14} \omega^2 E^2 = 0, \end{aligned}$$

kde J je prúd v A a E je napätie vo V. Riešenia tejto rovnice pri $\omega = 2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4$ /sec pre rôzne hodnoty napätia E sú uvedené v tabuľke 1.

a riešenia tejto rovnice pri $E = 1200$ V pre rôzne hodnoty kruhovej frekvencie ω sú uvedené v tabuľke 2.

E	J_1	J_2	J_3
900 V	15,5 A	—	—
1000 V	17,3 A	170,0 A	186,0 A
1200 V	21,3 A	162,7 A	191,0 A
2000 V	37,4 A	140,4 A	208,8 A
3000 V	71,8 A	103,4 A	226,3 A
3100 V	—	—	227,1 A

ω	J_1	J_2	J_3
$2\pi \cdot 10^4$	72,1 A	—	—
$2\pi \cdot 1,10 \cdot 10^4$	130,7 A	—	—
$2\pi \cdot 1,12 \cdot 10^4$	143,6 A	94,8 A	31,6 A
$2\pi \cdot 1,20 \cdot 10^4$	189,1 A	164,9 A	21,0 A
$2\pi \cdot 1,26 \cdot 10^4$	230,7 A	218,9 A	16,4 A
$2\pi \cdot 1,29 \cdot 10^4$	—	—	14,9 A

Rovnica (17) pre tento okruh pri $\omega = 2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4$ /sec je

$$1,3923 \cdot 10^{-23} y^4 + 1,5512 \cdot 10^{-18} y^3 - 3,0925 \cdot 10^{-14} y^2 - 1,3636 \cdot 10^{-9} y + 1,1148 \cdot 10^{-5} = 0$$

a jej reálne kladné korene (len tie majú fyzikálny význam) sú $y_1 = 3,1596 \cdot 10^4$ a $y_2 = 0,7423 \cdot 10^4$. Druhú dva korene sú komplexne sdružené. Hodnoty prúdu, pri ktorých vznikajú na charakteristikách diskontinuity, sú teda $J_1 = 177,753$ A a $J_2 = 86,157$ A. Vrsadením týchto hodnôt do výrazu (15) dostávame pre napätia, pri ktorých vznikajú na charakteristikách diskontinuity, hodnoty $E_1 = 912,1$ V a $E_2 = 307,5$ V.

Vidíme, že výsledky, získané riešením rovnice (13) a (17), sú v úplnej shode s výsledkami, vypočítanými podľa rovnice (9) Schunckom a Zenneckom a znázornenými na obr. 4 a 5.

LITERATÚRA

Casper, Hubmann, Zenneck, *Jahrb. d. drahtlos. Telegr.*, 63—77, 1924.
 Kalantarov, Neiman, *Teoretic. osnovy elektrotechniki*, II, 254—264, Moskva-Leningrad 1948.
 Lehr, *Schwingungstechnik*, II, 336—367, Berlin 1934.
 Martienssen, *Physikalische Zeitschrift* 11, 448—460, 1910.
 Ronelle, *Revue gén. de l'électricité*, 1934.
 Schunck a Zenneck, *Jahrb. der drahtlos. Telegr. u. Teleph.* 19, 170—194, 1922.

Шунки и Ценнен¹⁾, сделав целесообразные предположения, связь между амплитудой силы тока J и амплитудой названного напряжения E с угловой частотой ω в колебательном контуре с катушкой с железным сердечником (рис. 1), выразили соотношением

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (1)$$

где, однако, коэффициент самоиндукции L катушки, является функцией амплитуды силы тока J согласно соотношению

$$L = \frac{z^2 V_0}{S} + \frac{2L_0}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1) \quad (2)$$

где $a = \frac{zJ}{S}$, $L_0 = \frac{z^2 A_0}{S}$, z — число обмоток в катушке и A_0, V_0, S — постоянные. Зависимость L от J для специальной катушки в контуре согласно рис. 2 графически изображена на рис. 3. Из уравнений (1) и (2) возможно для определенных значений амплитуды силы тока установить соответствующие амплитуды напряжения E при постоянных R, C, ω , или соответствующие значения ω при постоянных R, C, E . Таким образом можно получить графическое выражение зависимостей амплитуды силы тока от амплитуды напряжения или же от угловой частоты ω (рис. 4 или же рис. 5).

Зависимость L от J согласно (2) изображена на рис. 3 имеет однако такой вид, что можно её с удовлетворительной точностью аналитически выразить соотношением:

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2} \quad (3)$$

где α, β, γ — подходящие постоянные, зависящие от числа обмоток и от геометрической формы катушки а также от свойств железного сердечника. Вводя соотношение (3) в уравнение (1) после некоторых преобразований мы получаем уравнение

$$A_1 J^6 + (A_2 - V_1 E^2) J^4 + (A_3 - V_2 E^2) J^2 - V_3 E^2 = 0, \quad (4)$$

где $A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3$ суть коэффициенты, ближе определенные в тексте. Уравнение (4) есть кубическое уравнение для J^2 и содержит аналитическое выражение зависимости амплитуды силы тока от напряжения E при постоянных R, C, ω , или же зависимости амплитуды силы тока от угловой частоты ω при постоянных R, C, E . Если взять подходящие значения R, C, ω или же R, C, E , то коэффициенты уравнения (4) могут изменяться в зависи-

мости от E или же от ω так, что в определенном промежутке величин напряжения E или же угловых частот ω , уравнение (4) дает для J^2 три вещественных положительных корня, значит характеристистики (зависимости J от E) или же кривые резонанса (зависимости J от ω) имеют вид изображенный на рис. 4 или же на рис. 5, что из уравнения (1) нельзя было предвидеть. Таким образом опытным путем обнаруженные скачкообразные изменения силы тока при изменении зависимости силы тока от напряжения E или же от угловой частоты ω при постоянных но подходящих R, C, ω или же R, C, E теоретически следуют из уравнения (4).

Применением уравнения (4) был решен контур изображенный на рис. 2 и полученные результаты находятся в полном согласии с результатами Шункиа и Ценнена.

Résumé

Schupick et Zenneck¹⁾ en s'appuyant sur des suppositions convenables ont exprimé la relation entre l'amplitude, J , du courant et l'amplitude, E , de la tension aux bornes de la source du courant alternatif utilisée, de pulsation ω , dans un circuit comprenant un condensateur et une résistance inductive en forme d'une bobine à noyau de fer, par la formule

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (1)$$

dans laquelle la grandeur L , la self-inductance de la bobine, est fonction de l'amplitude, J , du courant d'après la formule

$$L = \frac{z^2 B_0}{S} + \frac{2 I_0}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1), \quad (2)$$

a signification des symboles a et L_0 étant, $a = \frac{z J}{S}$, $L_0 = \frac{z^2 A_0}{S}$ et z désigne le nombre des spires de la bobine. La relation entre L et J pour une bobine choisie est représentée par la figure 3.

D'équations (1) et (2), pour les amplitudes du courant données, on peut calculer les amplitudes de la tension E , si les grandeurs R , C et ω sont constantes, ou les pulsations ω , quand les grandeurs R , C et E sont constantes. Ainsi on peut obtenir une représentation géométrique de la relation entre l'amplitude du courant, J , et l'amplitude de la tension, E , ou la pulsation ω (fig. 4 et 5).

Mais la relation entre L et J , donnée par (2) et représentée par la fig. 3, est de forme qu'on peut, avec précision suffisante, l'exprimer par la formule

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2}, \quad (3)$$

où α , β , γ sont des constantes, dépendant de nombre des spires de la bobine, sa forme géométrique et les propriétés du noyau de fer. En introduisant la relation (3) dans l'équation (1) on obtient

$$A_1 J^6 + (A_2 - B_1 E^2) J^4 + (A_3 - B_2 E^2) J^2 - B_3 E^2 = 0, \quad (4)$$

où A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 sont facteurs, dont la signification est donnée dans le texte. L'équation (4) est une équation cubique en J^2 et présente une expression analytique de la relation entre J et E pour les grandeurs R , C et ω données, ou entre J et ω , si on connaît les grandeurs R , C et E . Dans certains cas les valeurs de l'équation (4) en fonction de ω ou E peuvent varier de façon que pour les valeurs de E ou ω liant dans certains intervalles l'équation (4) a 3 racines réelles positives pour J^2 , c'est-à-dire les caractéristiques (relations entre J et E) ou les courbes de résonance (relations entre J et ω) sont de formes données par les fig. 4 et 5, c'est qu'on ne peut pas prévoir directement d'après l'équation (1).

Les discontinuités du courant bien connues qu'on trouve, dans les circonstances convenables, si l'on fait la recherche de la relation entre J et E ou ω par expérience, sont donc déterminées théoriquement par l'équation (4).

A l'aide de cette équation a été fait le calcul pour le circuit donné par la fig. 2 et on a trouvé que les résultats obtenus sont en accord parfait avec ceux de Schunck et Zenneck.