MATEMATICKO-FYZIKÁLNY SBORNÍK

Roč. I., čís. 1.

JOSEF NOVÁK A LADISLAV MIŠÍK

O L-PRIESTOROCH SPOJITÝCH FUNKCIÍ

Táto práca zaoberá sa L-priestormi, v ktorých existujú body s vlastnosťou ϱ, t. j. body x, ku ktorým existujú dvojné postupnosti $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, ktorých riadky konvergujú k x, avšak nijaká vybraná diagonálna postupnosť nekonverguje k x. Špeciálne z týchto priestorov študujú sa tu priestory spojitých funkcií, v ktorých sú zavedené topologie rôznymi konvergenciami. Ukazuje sa, že v takých priestoroch existujú body s vlastnosťou ϱ. V nich U-axióma úzko súvisí s bodmi s vlastnosťou ϱ. Tento vzťah je jednoduchý najmä v tzv. komutatívnych topologických L-grupách, kde U-axióma je ekvivalentná s neexistenciou bodov s vlastnosťou ϱ. V práci sa dokázala veta: Kartézsky súčin dvoch neizolovaných L-priestorov, z ktorých aspoň jeden obsahuje bod s vlastnosťou ϱ, nie je L-priestorom. Odtiaľ vyplýva, že kartézsky súčin dvoch L-priestorov spojitých funkcií, definovaných na intervale $\langle 0,1 \rangle$ nie je L-priestorom.[1]

I.

Najprv zavedieme isté označenia, ktoré budeme v pojednaní používať.[2]

Ak x je prvkom z množiny P, značíme to $x \in P$, ak x nie je prvkom z množiny P, značíme to $x \bar{\in} P$.

Ak je daný systém množín $\{M_\alpha\}$, kde $\alpha \in A$, rozumieme znakom $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ súčet všetkých množín M_α a znakom $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha$ rozumieme prienik

[1] Je to riešenie problému položeného E. Čechom r. 1947.

[2] E. Čech, D 225—264.

všetkých množín M_α. Znak $Q \subset P$ znamená, že množina Q je časťou množiny P.

0 má v tomto pojednaní tri rôzne významy. Jednak číslo 0, jednak funkciu identicky rovnú nule a jednak prázdnu množinu. Z textu je vždy vidieť, aký význam má 0.

Množinu P nazývame L-priestorom, ak sú tam definované konvergentné postupnosti, t. z. určitým postupnostiam bodov z P sú priradené jednoznačne isté body ako limity a to priradenie spĺňuje tieto axiómy konvergencie:

1. Limita postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pre všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $x_n = x$, je x.

2. Limita postupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ vybranej z konvergentnej postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tá istá ako limita postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Znak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \not\to x$ značí, že postupnosť nekonverguje k bodu x, t. j., že x nie je limitou tejto postupnosti.

Do L-priestoru zavádzame topologiu pomocou konvergentných postupností takto: množina $U \subset P$ je okolím bodu x, ak v množine $P - U$ neexistuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej limita by bola x.

Ak ku dvom axiómam 1. a 2. pridáme ešte Urysohnovu axiómu:

3. Ak postupnosť nekonverguje k bodu x, obsahuje čiastočnú podstupnosť, ktorej nijaká vybraná postupnosť nekonverguje k x, potom dostávame novú konvergenciu. Avšak nová topologia je ekvivalentná so starou topologiou.

Ak P je L-priestor, $A \subset P$ a ak $\bar{A}$ znamená množinu tých prvkov z P, pre ktoré existujú v množine A konvergentné postupnosti, U-axióma znamená, že pre každú množinu A platí $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Množina $A \subset P$, pre ktorú je $\bar{A} = A$, nazýva sa uzavretou. Množina A, pre ktorú je $P - A$ uzavretá, je otvorenou množinou.

Nech P je ľubovoľný topologický priestor a nech Q je hustá podmnožina v P, označme $L_1(P)$, $L_2(P)$, $L_3(P)$, $L_4(P)$, $L_5(P)$, $L_6(P, Q)$, $L_7(P, Q)$, $L_8(P, Q)$, $L_9(P, Q)$ priestor spojitých funkcií definovaných na P s nasledovnými konvergenciami[3] $l_1, \ldots, l_9$:

[3] Hahn, 211—214 a 222 a B. Pospíšil, 262—268.

l_1: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak pre každé $x_0 \in P$ je $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x_0)$;

l_2: (kvázirovnomerná konvergencia podľa Hahna) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ a ku každému n_0 existuje také $n_0' > n_0$, že pre každé $x \in P$ platí aspoň jedna z $(n_0' - n_0 + 1)$ nasledovných nerovností $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre $n_0 \leqq n \leqq n_0'$;

l_3: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak ku každému $x \in P$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje isté okolie $U(x)$ a index N taký, že pre každé $y \in U(x)$ je $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ pre všetky $n > N$;

l_4: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak pre každé $x_0 \in P$ je $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x_0)$ a pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x_0$ je $\{f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x_0)$;

l_5: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje isté také $N(\varepsilon)$, že pre všetky $x \in P$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre $n > N(\varepsilon)$;

l_6: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak pre každé $q \in Q$ existuje isté okolie $U(q)$ v P tej vlastnosti, že pre každé $\varepsilon > 0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre všetky $x \in U(q)$ a pre skoro všetky prirodzené n;

l_7: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak pre každé $q \in Q$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje isté okolie $U(q, \varepsilon)$ také, že pre všetky $x \in U(q, \varepsilon)$ a pre skoro všetky prirodzené n je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

l_8: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k $f(x)$ na všetkých kompaktných podmnožinách množiny Q;

l_9: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, ak pre každé $q \in Q$ je $\{f_n(q)\}_{n=1}^{\infty} \to f(q)$.

Ak je $P = \langle 0,1 \rangle$, vynechávame v označeniach tých priestorov znak P.

Vedľa jednoduchých postupností budú sa v práci vyskytovať ešte dvojné postupnosti. Dvojnou postupnosťou rozumieme množinu bodov $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$. Podmnožinu $\bigcup_{k=1}^{\infty} x_{n,k}$, čiže postupnosť $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazývame riadkom a podmnožinu $\bigcup_{i=1}^{\infty} x_{n_i,k_i}$, čiže $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, kde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ nazývame diagonálnou postupnosťou.

Definícia: Bod x v L-priestore L má vlastnosť ϱ, keď existuje prostá dvojná postupnosť bodov $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, ktorej riadky konvergujú k bodu x, ale nijaká diagonálna postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ nekonverguje k x. Ten systém $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ budeme tiež nazývať ϱ-systémom pre bod x.

II.

V celom pojednaní funkciou rozumieme vždy reálnu funkciu.

Majme ľubovoľnú postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $<0,1>$ $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ takých, že $f_k(0)=f_k(1)$ pre $k=1,2,3,\dots$. Z tejto postupnosti utvorme dvojnú postupnosť $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ týmto spôsobom:

$$f_{1,k}(x)=f_k(x) \text{ pre } k=1,2,3,\dots$$

$$f_{2,k}(x)=f_k(2x) \text{ pre } 0\leqq x\leqq\frac{1}{2} \text{ a } f_{2,k}\left(x+\frac{1}{2}\right)=f_{2,k}(x),$$

$$f_{3,k}(x)=f_k(3x) \text{ pre } 0\leqq x\leqq\frac{1}{3} \text{ a } f_{3,k}\left(x+\frac{1}{3}\right)=f_{3,k}\left(x+\frac{2}{3}\right)=f_{3,k}(x),$$

. . . .

$$f_{i,k}(x)=f_k(ix) \text{ pre } 0\leqq x\leqq\frac{1}{i} \text{ a } f_{i,k}\left(x+\frac{1}{i}\right)=f_{i,k}\left(x+\frac{2}{i}\right)=\dots=$$

$$=f_{i,k}\left(x+\frac{i-1}{i}\right)=f_{i,k}(x),\dots \quad \text{atď.}$$

Z podmienky $f_k(0)=f_k(1)$ vyplýva, že $f_{i,k}(x)$ sú spojité funkcie pre každé $i,k=1,2,3,\dots$ Tento proces, ktorým je utvorená tá dvojná postupnosť $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$, označme d-procesom.

Vybranou dvojnou postupnosťou z dvojnej postupnosti $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ nazývame dvojnú postupnosť $\{a_{n_s,k_r}\}_{s,r=1}^{\infty}$, kde $n_1<n_2<n_3<\dots$ a $k_1<k_2<k_3<\dots$, ktorá vznikne vybraním určitých postupností z nekonečného množstva rôznych riadkov.

Veta 1. Nech prostá postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje nerovnomerne k 0 v L_1, nech $f_k(0)=f_k(1)$ pre každé $k=1,2,3,\dots$, potom z dvojnej postupnosti $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$, vytvorenej d-procesom z postupnosti $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, dá sa vybrať dvojná postupnosť $\{f_{i,k_s}(x)\}_{i,s=1}^{\infty}$, ktorá tvorí ϱ-systém pre bod 0.

Dôkaz: Najprv dokážeme, že z predpokladu $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ vyplýva, že každá riadková postupnosť $\{f_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$. Nech i je pevné a nech $x_0\in<0,1>$ je tiež pevné, potom je možné písať $x_0=\bar{x}+\frac{s}{i}$, kde $0\leqq\bar{x}\leqq\frac{1}{i}$ a $0\leqq s<i$, čiže je $f_{i,k}(x_0)=f_{i,k}\left(\bar{x}+\frac{s}{i}\right)=f_{i,k}(\bar{x})$ pre každé $k=1,2,3,\dots$. Ďalej je $f_{i,k}(\bar{x})=f_k(i\bar{x})$ pre $k=1,2,3,\dots$ a $\{f_k(i\bar{x})\}_{k=1}^{\infty}\to 0$, čiže aj $\{f_{i,k}(\bar{x})\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ a teda aj $\{f_{i,k}(x_0)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$.

Pretože $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je prostá nerovnomerne konvergentná postupnosť k bodu 0, vyplýva z kompaktnosti $<0,1>$ existencia aspoň jedného bodu $a\in<0,1>$, v ktorom nekonverguje rovnomerne.[4] To znamená, že existuje isté číslo $z>0$ s tou vlastnosťou, že pre každé okolie $U(a)$ a pre každé k je možné nájsť taký index k^* a bod x^*, že platí $k^*>k$, $x^*\in U(a)$ a nerovnosť $|f_{k^*}(x^*)|\geqq z$. Môžeme teda vybrať takú stúpajúcu postupnosť indexov $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$, že k nej existuje postupnosť $\{x_s\}_{s=1}^{\infty}$ konvergujúca k bodu a a súčasne je $|f_{k_s}(x_s)|\geqq z$. Teraz tvrdíme, že $\{f_{i,k_s}(x)\}_{i,s=1}^{\infty}$ tvorí ϱ-systém pre bod 0. Zrejme táto dvojná postupnosť je prostá. Stačí ukázať, že nijaká diagonálna postupnosť nekonverguje k 0. Nech $\{f_{i_\nu,k_{s_\nu}}(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ je diagonálna postupnosť, ktorá konverguje k 0, potom musí podľa vety 28·8·12 z Hahna[5] konvergovať rovnomerne na hustej množine. Nech $x_0\in P$ je bod, v ktorom konverguje rovnomerne k 0, t. z. ku $z>0$ existuje také okolie (interval) $U(x_0)$ a index ν_0, že pre každé $\nu>\nu_0$ je $|f_{i_\nu,k_{s_\nu}}(x)|<z$ pre každé $x\in U(x_0)$. Nech d_0 je dĺžka intervalu $U(x_0)$. Voľme i_{ν^*} tak, aby bolo súčasne $\nu^*>\nu_0$ a $\frac{2}{i_{\nu^*}}<d_0$; potom existuje isté i^* také, že $0\leqq i^*\leqq i_{\nu^*}$ a $<\frac{i^*}{i_{\nu^*}},\frac{i^*+1}{i_{\nu^*}}>\subset U(x_0)$. Pretože je $0\leqq a\leqq 1$ a tiež $0\leqq x_s\leqq 1$ pre $s=1,2,3,\dots$, je aj $\frac{a+i^*}{i_{\nu^*}}\in U(x_0)$ a $\frac{x_s+i^*}{i_{\nu^*}}\in U(x_0)$ pre $s=1,2,3,\dots$. Potom však platí

$$f_{i_{\nu^*},k_{s_{\nu^*}}}\left(\frac{x_{s_{\nu^*}}+i^*}{i_{\nu^*}}\right)=f_{i_{\nu^*},k_{s_{\nu^*}}}\left(\frac{x_{s_{\nu^*}}}{i_{\nu^*}}\right)=f_{k_{s_{\nu^*}}}(x_{s_{\nu^*}}).$$

Teda je $\left|f_{i_{\nu^*},k_{s_{\nu^*}}}\left(\frac{x_{s_{\nu^*}}+i^*}{i_{\nu^*}}\right)\right|\geqq z$, čo je sporné.

Lemma: Nech prostá postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ v L_1, nech $f_k(0)=f_k(1)$ pre každé $k=1,2,3,\dots$, potom z dvojnej postupnosti $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$, vytvorenej d-procesom z postupnosti $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, nedá sa vybrať ϱ-systém pre bod 0, keď a len keď je $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ rovnomerne v L_1.

---

[4] Hahn, 214 a veta 28·4·2 na str. 216.

[5] Veta 28·8·12 znie: Na Youngovej množine A je každá konvergentná postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých funkcií bodove nerovnomerne konvergentná.

Dôkaz: Z vety 1. je vidieť, že $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ rovnomerne v L_1 je nevyhnutnou podmienkou a stačí teda dokázať, že je aj postačujúcou podmienkou. Keď $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ rovnomerne v L_1, konverguje aj $\{f_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ rovnomerne k 0. Skutočne, nech $\varepsilon > 0$, potom existuje iste také $K(\varepsilon)$, že pre $k > K(\varepsilon)$ je $|f_k(x)| < \varepsilon$ pre všetky x. Z definície $f_{i,k}(x)$ je vidieť, že pre $k > K(\varepsilon)$ je aj $|f_{i,k}(x)| < \varepsilon$ pre všetky x a pre všetky $i = 1, 2, 3, \ldots$. Ukážeme, že nie je možné, aby dvojná postupnosť $\{g_{m,n}(x)\}_{m,n=1}^{\infty}$, kde $g_{m,n}(x) \in \{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$, tvorila ϱ-systém pre bod 0. Bez ujmy obecnosti môžeme predpokladať pre $k = 1, 2, 3, \ldots f_k(x) \neq 0$, z čoho vyplýva, že $\{f_{i,k}(x)\}_{i=1}^{\infty} \not\to 0$ pre nijaké k. Iste totiž existuje také racionálne číslo $\frac{p}{r} < 1$, že $f_k\left(\frac{p}{r}\right) = a$, kde $a \neq 0$. Voľme $i_n = n \cdot r + 1$, potom je $np < nr < i_n$, a ďalej je $f_{i_n,k}\left(\frac{p}{r}\right) = f_{i_n,k}\left(\frac{p}{r} - \frac{np}{i_n}\right) = f_{i_n,k}\left(\frac{p}{r\,i_n}\right) = f_k\left(\frac{p}{r}\right) = a$, čiže postupnosť $\{f_{i,k}(x)\}_{i=1}^{\infty} \not\to 0$, pretože nekonverguje k 0 v racionálnom čísle $\frac{p}{r}$. Pretože $\{f_{i,k}(x)\}_{i=1}^{\infty} \not\to 0$, musí dvojná postupnosť $\{g_{m,n}(x)\}_{m,n=1}^{\infty}$ v každom riadku pre každé celé číslo s obsahovať aspoň jednu takú funkciu $f_{i,k}(x)$, že $|f_{i,k}(x)| < \frac{1}{s}$. Môžeme teda vybrať takú diagonálnu postupnosť $\{g_{s,n_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$, že $|g_{s,n_s}(x)| < \frac{1}{s}$ pre každé x, t. z., že postupnosť $\{g_{s,n_s}(x)\}_{s=1}^{\infty} \to 0$ rovnomerne a $\{g_{m,n}(x)\}_{m,n=1}^{\infty}$ netvorí ϱ-systém pre bod 0, čím je lemma celkom dokázaná.

Veta 2. Nech P je L-priestor, nech $a \in P$ je bod s vlastnosťou ϱ, potom charakter bodu a $\chi(a) = \aleph_0$.[6]

Dôkaz: Predpokladajme, že platí opak, t. z., že je $\chi(a) \leq \aleph_0$ a bod a je bodom s vlastnosťou ϱ. Potom je zrejmé, že musí byť $\chi(a) = \aleph_0$, pretože $\chi(a) < \aleph_0$ značí, že bod a je izolovaným bodom, a preto nemôže byť bodom s vlastnosťou ϱ. Tak $\chi(a) = \aleph_0$ a bod a má vlastnosť ϱ, t. z. existuje taká dvojná postupnosť $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$, že platí $\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty} \to a$ pre každé $m = 1, 2, 3, \ldots$, ale nijaká diagonálna postupnosť $\{a_{m_k,n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nekonverguje k bodu a. Ak $\chi(a) = \aleph_0$, existuje spočetný monotónny úplný systém okolí bodu a, a to $[U(a)] = \{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$, kde $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$. K U_1 existuje istý index n_1 taký, že je $a_{1,n_1} \in U_1$. K U_2 existuje istý index $n_2 > n_1$ taký, že je $a_{2,n_2} \in U_2$. Úplnou indukciou sostrojíme diagonálnu postupnosť $\{a_{k,n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu a, čo je sporné.

[6] $\aleph_0$ je znak pre mohutnosť spočetnej množiny.

III.

Definícia topologickej L-grupy[7]: Nech L je L-priestor splňujúci prvé dve axiómy pre konvergenciu a Urysohnovu axiómu, v ktorej je definovaný súčet, t. z. každým dvom prvkom $x, y \in L$ je priradený prvok $z = x + y \in L$, s nasledujúcimi vlastnosťami:

A. Pre každé tri prvky $x, y, z \in L$ platí $(x + y) + z = x + (y + z)$;

B. Vo L existuje prvok, ktorý označíme 0 taký, že pre každé $x \in L$ platí $x + 0 = x$;

C. Ku každému prvku $x \in L$ existuje vo L prvok, ktorý označíme $-x$, taký, že $x + (-x) = 0$;

D. Ak konverguje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ k prvku x a postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ k prvku y, konverguje tiež postupnosť $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty}$ k prvku $x \pm y$; priestor L nazývame potom topologickou L-grupou.

$x - y$ znamená prvok $x + (-y)$.

Topologickú L-grupu nazývame komutatívnou, ak pre súčet platí zákon komutatívny, t. z. pre každé dva prvky $x, y \in L$ platí $x + y = y + x$.

Pomocná veta 1. Keď L je komutatívna topologická L-grupa ktorá má aspoň jeden neizolovaný bod, sú všetky jej prvky neizolované.

Dôkaz: Keď $x \in L$ je ten neizolovaný bod, existuje potom taká postupnosť bodov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúca k bodu x, že $x_n \neq x$ a $x_n \in L$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ak $y \in L$ je ľubovoľný bod, podľa C. je $-x \in L$, pretože je $x \in L$. Položme teraz $y_n = x_n + y - x$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zrejme je $y_n \in L$. Z vlastnosti D. a zo zákona komutatívneho vyplýva, že $\{x_n + y - x\}_{n=1}^{\infty} \to x + y - x = y$, čiže $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu y a $y_n \neq y$, $y_n \in L$ pre všetky n. Tým je tvrdenie dokázané.

Pomocná veta 2. Ak L je komutatívna topologická L-grupa a

[7] D. van Dantzig, 587—626.

existuje v nej aspoň jeden bod s vlastnosťou ϱ, majú všetky jej body vlastnosť ϱ.

Dôkaz: Nech $x \in L$ je ten bod s vlastnosťou ϱ a nech y je ľubovoľný bod z L. Existuje dvojná postupnosť $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ majúca vlastnosti: $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to x$ pre každé n, ale nijaká diagonálna postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \not\to x$. Položme $y_{n,k} = x_{n,k} + y - x$, potom $y_{n,k} \in L$ pre každé n, k a platí $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{n,k} + y - x\}_{k=1}^{\infty} \to x + y - x = y$ podľa D. Keby existovala diagonálna postupnosť $\{y_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \to y$, t. z. $\{x_{n_i,k_i} + y - x\}_{i=1}^{\infty}$ by konvergovala k bodu y, potom platí $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_{n_i,k_i} + y - x) + (x - y)\}_{i=1}^{\infty} \to y + x - y = x$ podľa D., to je však spor. Tým je veta dokázaná.

Veta 3. Ak L je komutatívna topologická L-grupa, je vo L U-axióma ekvivalentná neexistencii bodov s vlastnosťou ϱ.

Dôkaz: Ak L je komutatívna topologická L-grupa, nech splňuje U-axiómu a nech existuje v nej bod x s vlastnosťou ϱ, t. z., že existuje taká dvojná postupnosť $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, že pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ postupnosť $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to x$, ale nijaká diagonálna postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ nekonverguje k x. Podľa pomocnej vety 1. bod $0 \in L$ nie je izolovaný, existuje teda prostá postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, kde $z_n \neq 0$. Položme pre $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ $y_{n,k} = z_n + x_{n,k}$, postupnosť $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje zrejme potom k bodu $z_n + x$ pre každé n a postupnosť $\{z_n + x\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x. Ďalej platí $\bigcup_{n=1}^{\infty}(z_n + x) \subset u(\bigcup_{n,k=1}^{\infty} y_{n,k})$, z čoho vyplýva $x \in u(u(\bigcup_{n,k=1}^{\infty} y_{n,k}))$, pričom znakom $u\,M$ nejakej množiny $M \subset L$ rozumieme uzáver množiny M. Z U-axiómy však vyplýva, že je aj $x \in u(\bigcup_{n,k=1}^{\infty} y_{n,k})$. Musí teda existovať postupnosť $\{y_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergujúca k bodu x. Vzájomne sa líšiacich indexov n_i nemôže byť len konečne mnoho, pretože v tom prípade by sa tam niektorý index, ktorý označme N, nachádzal nekonečne mnoho a to vedie k sporu, lebo by sa dala vybrať riadková postupnosť konvergujúca k bodu $z_N + x \neq x$. Z toho teda nasleduje, že vzájomne sa líšiacich indexov n_i je nekonečne mnoho a je možné potom vybrať z postupnosti indexov $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ takú postupnosť $\{n_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$, že konvergujú postupnosti $\{z_{n_{i_s}}\}_{s=1}^{\infty} \to 0$ a $\{y_{n_{i_s},k_{i_s}}\}_{s=1}^{\infty} \to x$. To znamená, že postupnosť $\{y_{n_{i_s},k_{i_s}} - z_{n_{i_s}}\}_{s=1}^{\infty} \to x$. Pretože pre každé s je $y_{n_{i_s},k_{i_s}} - z_{n_{i_s}} = z_{n_{i_s}} + x_{n_{i_s},k_{i_s}} - z_{n_{i_s}} = x_{n_{i_s},k_{i_s}}$, je postupnosť $\{x_{n_{i_s},k_{i_s}}\}_{s=1}^{\infty} \to x$, čo je sporné, lebo postupnosť $\{x_{n_{i_s},k_{i_s}}\}_{s=1}^{\infty}$ je diagonálna postupnosť z dvojnej postupnosti $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Keď vo L neplatí U-axióma, existuje istá množina $M \subset L$ taká, že $u(u\,M) - u\,M \neq 0$. Nech $x \in u(u\,M) - u\,M$, potom existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$, kde $x_n \in u\,M - M$ pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ku každému x_n existuje istá postupnosť $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to x_n$, kde $x_{n,k} \in M$ pre všetky $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ Z tejto úvahy je zrejmé, že pre nijakú postupnosť indexov $\{n_i, k_i\}_{i=1}^{\infty}$ postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \not\to x$. Utvorme teraz dvojnú postupnosť $\{z_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, kde $z_{n,k} = x_{n,k} - x_n$ pre $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ Pre každé n platí $\{z_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$, ale pre každú postupnosť indexov $\{n_i, k_i\}_{i=1}^{\infty}$ diagonálna postupnosť $\{z_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \not\to 0$. Keby totiž pre nejakú postupnosť $\{n_i, k_i\}_{i=1}^{\infty}$ postupnosť $\{z_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergovala k 0, nuž podľa vlastnosti D. musela by postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x$, čo je však spor. Zistili sme teda, že platí $\{z_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ pre každé n, ale nijaká diagonálna postupnosť $\{z_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty} \not\to 0$, čiže bod $0 \in L$ je bod s vlastnosťou ϱ.

Obecne v L-priestoroch U-axióma a vlastnosť ϱ spolu nesúvisia. Existujú totiž L-priestory, v ktorých nie je splnená U-axióma a súčasne nijaký bod toho priestoru nemá vlastnosť ϱ. Ako príklad takého L-priestoru nám môže slúžiť priestor P definovaný takto:

P sa skladá z bodov roviny $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, kde $m, n = 1, 2, 3, \ldots$, ďalej z bodov $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$, kde $m = 1, 2, 3, \ldots$ a z bodu $(0, 0)$. L-topologiu l zavedieme tam takto: $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \to \left(\frac{1}{m}, 0\right)$, vtedy, ak existuje istý index K tej vlastnosti že pre $k > K$ je $x_k = \frac{1}{m}$ a ak postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \to 0$; $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \to (0, 0)$ vtedy, ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a ak existuje index K s tou vlastnosťou, že pre $k > K$ je $y_k = 0$; nijaké iné prosté konvergentné postupnosti v P neexistujú.

P zrejme splňuje axiómy 1., 2., 3. L-priestoru, v ktorom bod $(0, 0)$ a body $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ pre $m = 1, 2, 3, \ldots$ majú charakter $\aleph_0$ a body $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ sú izolované. Podľa vety 2. je vidieť, že P nemôže mať bod s vlastnosťou ϱ. U-axióma tam nie je splnená, pretože pre množinu $M = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ platí $(0, 0) \in l(lM) - lM$.

Existujú však obrátene aj L-priestory, ktoré splňujú U-axiómu a obsahujú body s vlastnosťou ϱ. Čitateľ sa ľahko presvedčí, že príkladom takého L-priestoru je priestor S_2 definovaný na str. 22 v práci J. Nováka, citovanej na konci našej práce v literatúre. Priestor S_2 splňuje U-axiómu a bod 0 má v ňom vlastnosť ϱ.

IV.

Topologia v je slabšia než topologia u, v označení $v \subset u$, keď $vM \subset uM$ pre každú podmnožinu M priestoru. Platí táto lemma:

Nech (P, u) je (H), alebo $(\overline{H})$, alebo $(\overline{\overline{H}})$-priestor[8], potom každý priestor (P, v), ktorého topologia v je slabšia než topologia u, je toho istého typu.

Veta 4. Priestory $L_1(P), \ldots, L_5(P), L_6(P, Q), \ldots, L_9(P, Q)$ sú $(\overline{\overline{H}})$-priestory.

Dôkaz: Keď Q je pevná množina, je vždy $l_i \subset l_9$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots, 8$, ako to vyplýva z definícií $l_1, \ldots, l_9$ na str. 3. Stačí teda dokázať podľa tejto lemmy, že je $L_9(P, Q)$ $(\overline{\overline{H}})$-priestor. Nech $f_1, f_2 \in L_9(P, Q)$ a $f_1 \neq f_2$, existuje isté $q^* \in Q$ také, že $f_1(q^*) \neq f_2(q^*)$, pretože f_1 a f_2 sú spojité funkcie. Vezmime $\varepsilon > 0$ a také, že je $2\varepsilon < |f_1(q^*) - f_2(q^*)|$. Množina $U(f_1)$ resp. $U(f_2)$ všetkých takých prvkov, že $|f(q^*) - f_1(q^*)| < \varepsilon$ resp. $|f(q^*) - f_2(q^*)| < \varepsilon$ je okolím bodu f_1 resp. f_2, lebo nijaká postupnosť z komplementu nemôže konvergovať k f_1 resp. f_2. Ďalej je $\overline{U(f_1)} \cap \overline{U(f_2)} = 0$, pretože keby bolo $f \in \overline{U(f_1)} \cap \overline{U(f_2)}$, bolo by súčasne platné $|f(q^*) - f_1(q^*)| \leq \varepsilon$ a $|f(q^*) - f_2(q^*)| \leq \varepsilon$, čiže $|f_1(q^*) - f_2(q^*)| \leq |f(q^*) - f_1(q^*)| + |f(q^*) - f_2(q^*)| \leq 2\varepsilon$ čo je sporné, teda je $L_9(P, Q)$ $(\overline{\overline{H}})$-priestor.

Je známe, že priestor $L_1 = L_2$ a nesplňuje U-axiómu, ďalej že $L_3 = L_4 = L_5$ je metrický priestor s metrikou: vzdialenosť $(f_1, f_2) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_1(x) - f_2(x)|$.

Všimnime si teraz kartézskeho súčinu priestorov spojitých funkcií. Kartézskym súčinom L dvoch topologických priestorov L_1 a L_2, v označení $L = L_1 \times L_2$, nazývame množinu bodov $x = (x_1, x_2)$, kde $x_1 \in L_1$ a $x_2 \in L_2$, v ktorej je topologia definovaná pomocou okolí nasledovne: Okolie bodu $x = (x_1, x_2) \in L$ je každá taká podmnožina $G_1 \times G_2 \subset L$, že G_1 je okolím bodu x_1 a G_2 je okolím bodu x_2.

Veta 5. Keď sú dané dva neizolované L-priestory L_1 a L_2 a jeden z nich obsahuje bod s vlastnosťou ϱ, kartézsky súčin $L_1 \times L_2$ nie je L-priestor.

Dôkaz: Nech L_1 obsahuje bod x s vlastnosťou ϱ, t. z. existuje taká $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, že $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to x$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a nijaká diagonálna postupnosť $\{x_{n_i, k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ nie je konvergentná k bodu x. Nech $y \in L_2$ nie je izolovaný bod, t. z. existuje taká $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$ a $y_n \neq y$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. V množine $M = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} (x_{n,k}, y_n)$ neexistuje postupnosť $\{z^i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_{n_i, k_i}, y_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ konvergujúca k bodu (x, y), pretože potom by bolo $\{x_{n_i, k_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x$, čo je sporné. Naproti tomu každé okolie bodu (x, y) na neprázdny prienik s M, ak totiž $G = G_1 \times G_2$, kde G_1 resp. G_2 je okolím bodu x resp. y v L_1 resp. L_2, potom existuje istý index $K(n)$ taký, že $x_{n,k} \in G_1$ pre $k > K(n)$ a index N taký, že $y_n \in G_2$ pre $n > N$, čiže $(x_{n,k}, y_n) \in G$ pre vhodne veľké n a k, t. z. $G \cap M \neq 0$. Z toho vyplýva, že $(x, y) \in uM$ vo L, čím je dokázané, že kartézsky súčin L nie je L-priestor.

Nech (L, u) značí priestor všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale $\langle 0,1 \rangle$ s takou topologiou u, že (L, u) je topologickou L-grupou a nech splňuje okrem toho ešte nasledujúcu podmienku: Keď $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť v priestore (L, u) a keď $f_k(0) = f_k(1)$, d-procesom utvorená dvojná postupnosť $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ má tú vlastnosť, že v každom riadku je konvergentná, čiže $\{f_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v (L, u) pre $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Veta 6. Nech (L, u_1) a (L, u_2) sú dva L-priestory všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale $\langle 0,1 \rangle$ s predchádzajúcimi

[8] Fréchet, 205. Budeme hovoriť, že (P, u) je 1. (H), 2. $(\overline{H})$, 3. $(\overline{\overline{H}})$-priestor, ak pre každé dva rôzne body $x, y \in P$ existujú také okolia $O(x)$ a $O(y)$, že platí: 1. $O(x) \cap O(y) = 0$, 2. $\{uO(x) \cap O(y)\} \cup \{O(x) \cap uO(y)\} = 0$, 3. $\{uO(x)\} \cap \{uO(y)\} = 0$.

vlastnosťami, nech $l_5 \subset l_i \subset l_1$ pre $i = 1, 2$. Potom nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby kartézsky súčin $(L, u_1) \times (L, u_2)$ bol L-priestorom je $u_1 = u_2 = l_5$.

Dôkaz: Podmienka postačujúca: Nech $u_1 = u_2 = l_5$, sú potom (L, u_1) a (L, u_2) metrické priestory, teda aj kartézsky súčin $(L, u_1) \times (L, u_2)$ je metrický priestor, čiže aj L-priestor.

Podmienka nevyhnutná: Nech $u_1 \neq l_5$, t. z. existuje aspoň jedna taká postupnosť v (L, u_1), že $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to f(x)$, ale nekonverguje rovnomerne, t. z., že $\{f_k(x) - f(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule nerovnomerne v (L, u_1). Označme $d_k = f_k(0) - f_k(1) - [f(0) - f(1)]$, potom iste $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \to 0$, teda je aj $\{d_k . x\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v L_5, teda aj $\{d_k . x\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v (L, u_1), lebo je $l_5 \subset u_1$. Položme $\varphi_k(x) = f_k(x) - f(x) + d_k x \in (L, u_1)$, potom je podľa vlastnosti D. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v (L, u_1). Ďalej je $\varphi_k(0) = f_k(0) - f(0)$ a $\varphi_k(1) = f_k(1) - f(1) + d_k = f_k(1) - f(1) + f_k(0) - f_k(1) - f(0) + f(1) = f_k(0) - f(0) = \varphi_k(0)$. Pretože $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v L_1, potom $\{\varphi_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v L_1 pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots$ kde $\{\varphi_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ je dvojná postupnosť vytvorená z postupnosti $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ d-procesom. Z tohto, z $u_1 \subset l_1$ a z predpokladu vlastnosti (L, u_1) vyplýva, že $\{\varphi_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots$. Postupnosť $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ nerovnomerne v L_1 lebo $\{f_k(x) - f(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule tiež nerovnomerne, tak je možné podľa vety 1. vybrať istý ϱ-systém, označme ho $\{\varphi_{i,k_s}(x)\}_{i,s=1}^{\infty}$, pre bod 0 v L_1. Pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots$ je $\{\varphi_{i,k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ postupnosť vybraná z i-tého riadku a teda je postupnosť $\{\varphi_{i,k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty} \to 0$ v (L, u_1) pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots$, pretože $\{\varphi_{i,k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ v (L, u_1). Keďže nijaká diagonálna postupnosť toho systému nekonverguje k 0 v L_1, nekonverguje k 0 ani v (L, u_1) pretože $u_1 \subset l_1$. Teda je $\{\varphi_{i,k_s}(x)\}_{i,s=1}^{\infty}$ ϱ-systém pre bod 0 v (L, u_1) a bod 0 má v (L, u_1) vlastnosť ϱ. Pretože (L, u_2) nie je izolovaný priestor, nie je kartézsky súčin $(L, u_1) \times (L, u_2)$ L-priestorom podľa vety 5. Celkom podobne sa dokáže tá veta, ak platí $u_2 \neq l_5$.

Špeciálne kartézske súčiny $L_1 \times L_5$ a $L_1 \times L_1$ nie sú L-priestormi.

LITERATÚRA

Čech E., *Topologické prostory*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 1937, 66.

Dantzig van D., *Zur topologischen Algebra*, Mathematische Annalen, 1932, 107.

Fréchet M., *Les espaces abstraits*, Paris, 1928.

Hahn H., *Reelle Funktionen I.*, Leipzig, 1932.

Novák J., *Sur les espaces* ($\mathcal{L}$) *et sur les produits cartésiens* ($\mathcal{L}$). Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, Brno 1939.

Pospíšil B., *Sur les fonctions continues*, Fundamenta mathematicae, 1938, 31.

Выводы

1. Диагональная подпоследовательность двойной последовательности $\left\{x_{m,n}\right\}_{m,n=1}^{\infty}$ есть последовательность $\left\{x_{m_i,n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$, из которой нельзя из последовательности показателей $\left\{m_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ выделить постоянную подпоследовательность. Точка x в пространстве L имеет свойство ϱ, если существует такова двойная последовательность $\left\{x_{m,n}\right\}_{m,n=1}^{\infty}$ точек из L, что каждая строка сходится к точке x (элементы с двумя показателями мы пишем в виде матрицы в квадратной схеме), но никакая диагональная последовательность несходится к x. Такую систему $\left\{x_{m,n}\right\}_{m,n=1}^{\infty}$ мы называем тоже ϱ-системой для точки x.

Под L_1 или-же L_2 (в тексте работы мы обозначаем его через L_5), разуmеется пространство непрерывных функций определенных на отрезке $<0,1>$ и где $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow f(x)$, если эта последовательность сходится в каждой точке x_o от $<0,1>$ к $f(x_o)$, или-же, если эта последовательность равномерно сходится на $<0,1>$ к $f(x)$. l_1 или-же l_2 обозначают топологию в L_1 или-же L_2. Если точка x пространства L имеет свойство ϱ, то её характер неисчисляемый.

2. Если $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность непрерывных функций определенных на $<0,1>$, для которых есть в силе $f_k(0) = f_k(1)$ для $k = 1, 2, 3 \ldots$, то положим для $0 \leq x \leq \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ $f_{i,k}(x) = f_k(ix)$ и для всех значений показателей $i, k = 1, 2, 3 \ldots$ $f_{i,k}\left(x + \frac{1}{i}\right) = f_{i,k}\left(x + \frac{2}{i}\right) = \ldots = f_{i,k}\left(x + \frac{i-1}{i}\right) = f_{i,k}(x)$. Коротко мы будем двойную последовательность $\left\{f_{i,k}(x)\right\}_{i,k=1}^{\infty}$ называть двойной последовательностью выведенной из последовательности $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ операцией d.

Если $\left\{a_{n,k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}$ есть двойная последовательность, то мы двойную последовательность $\left\{a_{n_s,k_r}\right\}_{s,r=1}^{\infty}$, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ будем называть двойной подпоследовательностью последовательности $\left\{a_{n,k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Пусть $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность сходящаяся к 0 в L_1 (в L_1 0 обозначает функцию равняющуюся тождественно нулю), пусть $f_k(0) = f_k(1)$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$, пусть $\left\{f_{i,k}(x)\right\}_{i,k=1}^{\infty}$ есть двойная последовательность выведенная из последовательности $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ операцией d,

то необходимое и достаточное условие того, чтобы из двойной последовательности $\left\{f_{i,k}(x)\right\}_{i,k=1}^{\infty}$ нельзя было выбрать никакую ϱ-систему, для точки 0 есть, чтобы последовательность $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ несходилась равномерно к точке 0 в L_1. В пространстве L_1 находятся точки имеющие свойство ϱ.

3. Топологическое $\mathcal{L}$-пространство L_1 которое исполняет две аксиомы сходимости Фрешета и аксиому Урисона, мы называем комутативной топологической группой, если каждой паре элементов $x, y, \varepsilon L$ присужден элемент из L, названный их суммой и обозначаемый $z = x + y$, при том справедливо: I. для всех $x, y, z \,\varepsilon L$ есть $(x + y) + z = x + (y + z)$, II. для $x, y \,\varepsilon L$ есть $x + y = y + x$, III. существует элемент $0 \,\varepsilon L$ такой, что $x + 0 = x$ для каждого $x \,\varepsilon L$, IV. для каждого $x \,\varepsilon L$ существует элемент $-x \,\varepsilon L$ такой, что $x + (-x) = 0$, V. если $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow x$ и $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow y$, то $\left\{x_n \pm y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow x \pm y$.

Если L есть топологическая комутативная группа, то необходимое и удовлетворительное условие того, чтобы пространство L исполняло третью аксиому Куратовского есть, чтобы не существовала точка, обладающая свойством ϱ.

4. Если L' и L'' суть два неизолированные $\mathcal{L}$-пространства и если хотя одно из них содержит точку с свойством ϱ, то их картезское произведение не является $\mathcal{L}$-пространством.

Знаком (L, u) обозначим топологическую комутативную группу непрерывных функций определенных на отрезке $<0,1>$, в котором сходимость u выполняет следующее условие: каждая двойная последовательность $\left\{f_{i,k}(x)\right\}_{i,k=1}^{\infty}$ выведенная из сходящейся последовательности $\left\{f_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ операцией d обладает этим свойством, что в каждой строке оно содержит сходящуюся последовательность.

Если (L, u_1) и (L, u_2) суть два $\mathcal{L}$-пространства имеющие упомянутое свойство, где $l_2 < u_1 < l_1$ и $l_2 < u_2 < l_1$ (где знак $u < v$ обозначает, что топология u более слабая чем топология v), необходимое и достаточное условие того, чтобы их картезское произведение было $\mathcal{L}$-пространством, есть $u_1 = u_2 = l_2$. Специально $L_1 \times L_1$ и $L_1 \times L_2$ не суть $\mathcal{L}$-пространствами.

Résumé

1. Une suite diagonale extraite d'une suite double $\{x_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ est une suite $\{x_{m_i,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ telle qu'il n'est possible d'extraire aucune suite constante de la suite des indices $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$. Un point x dans l'espace $(\mathcal{L})$ L possède la propriété ϱ quand il existe une suite double $\{x_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ de points de L telle que chaque ligne converge vers le point x (nous imaginons ces éléments à deux indices rangés dans un schéma carré à la façon d'une matrice), mais aucune suite diagonale $\{x_{m_i,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ne converge pas vers x. Un tel système $\{x_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ sera appelé aussi un système ϱ pour le point x.

L_1 resp. L_2 (dans le text complet de notre travail, nous le désignons par L_5), est l'espace des fonctions continues définies dans l'interval $<0,1>$ et où $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x)$, si cette suite converge en chaque point x_0 de $<0,1>$ vers $f(x_0)$, resp. si, cette suite est uniformément convergente sur $<0,1>$ vers $f(x)$. Soit l_1, resp. l_2, la topologie dans L_1, resp. L_2.

Si le point x de l'espace $(\mathcal{L})$ L possède la propriété ϱ, le caractère de ce point est non dénombrable.

2. Soit $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ une suite quelconque de fonctions continues définies dans $<0,1>$, soit $f_k(0) = f_k(1)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Si $0 \leqq x \leqq \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, posons $f_{i,k}(x) = f_k(ix)$, et pour toutes les valeurs des indices i, k $(i, k = 1, 2, 3, \ldots)$ écrivons $f_{i,k}\left(x + \frac{1}{i}\right) = f_{i,k}\left(x + \frac{2}{i}\right) = \ldots = f_{i,k}\left(x + \frac{i-1}{i}\right) = f_{i,k}(x)$. Nous dirons brièvement que la suite double $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ a été dérivée de la suite $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ par l'opération d.

Soit $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ une suite double. La suite double $\{a_{n_s,k_r}\}_{s,r=1}^{\infty}$ où $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ et $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ sera appelée une suite double extraite de la suite double $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Soit $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ une suite convergente vers 0 dans L_1 (dans L_1, 0 est la fonction égale identiquement à zero), soit $f_k(0) = f_k(1)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, soit $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ la suite double dérivée de la suite $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ par l'opération d. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ne puisse pas extraite de la suite double $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ un système ϱ pour le point 0 dans L_1, est que la suite $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformément vers 0 dans L_1. Dans l'espace L_1 il y a toujours des points jouissant de la propriété ϱ.

3. On dit, d'après D. van Dantzig, qu'un espace $(\mathcal{L})$ L, satisfaisant aux deux axiomes de convergence de Fréchet et à l'axiome d'Urysohn, est un groupe topologique commutatif, lorsqu'on fait correspondre à chaque couple de points $x, y \in L$ un élément $z \in L$, appelé leur somme et désigné par $z = x + y$, de façon que: I. pour tous $x, y, z \in L$ on a $(x + y) + z = x + (y + z)$, II. pour $x, y \in L$ on a $x + y = y + x$, III. il existe un élément $0 \in L$ tel que $x + 0 = x$ pour chaque $x \in L$, IV. pour chaque $x \in L$ il existe un élément $-x \in L$ tel que $x + (-x) = 0$, V. si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ et $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$, alors on a $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty} \to x \pm y$.

Soit L un groupe topologique commutatif. La condition nécessaire et suffisante pour que dans L le troisième axiome de Kuratowski soit rempli est que dans L il n'existe aucun point ayant la propriété ϱ.

4. Si L' et L'' sont deux espaces $(\mathcal{L})$ non isolés et si au moins un de ces espaces possède un point jouissant de la propriété ϱ, leur produit cartésien n'est pas un espace $(\mathcal{L})$.

Par (L, u) sera désigné un groupe topologique commutatif de fonctions continues définies dans l'interval $<0,1>$ dans lequel la convergence satisfait à la condition suivante: chaque suite double $\{f_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{\infty}$ dérivée d'une suite convergente $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ par l'opération d possède la propriété que chaque ligne est une suite convergente.

Soit (L, u_1) et (L, u_2) deux espaces ayant chaque la propriété qui vient d'être définie, où $l_2 \subset u_1 \subset l_1$ et $l_2 \subset u_2 \subset l_1$ (la notation $u \subset v$ indique que la topologie u est plus faible que la topologie v). La condition nécessaire et suffisante pour que leur produit cartésien soit un espace $(\mathcal{L})$ est que $u_1 = u_2 = l_2$. Spécialement, les produits cartésiens $L_1 \times L_1$ et $L_1 \times L_2$ ne sont pas des espaces $(\mathcal{L})$.